# نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

## درس‌نامه‌ی ۳

کاظم فولادی
http://kazim.fouladi.ir

ویراست اول: ۱۳۸۵
ویراست دوم: ۱۳۸۷
ویراست سوم: ۱۳۹۳

# فهرست مطالب

# ۳ زبان‌های منظم و گرامرهای منظم

Regular Languages and Regular Grammars

- یک زبان منظم زبانی است که برای آن یک پذیرنده‌ی متناهی (FA) موجود باشد.
- هر زبان منظم می‌تواند توسط یک DFA یا NFA توصیف شود.

## ۳-۱ عبارت‌های منظم

برای نمایش رشته‌های یک زبان منظم، روش‌های گوناگونی وجود دارد، اما مشکل بیشتر آنها، شلوغ بودن بازنمایی است. عبارت‌های منظم، روشی مناسب برای نمایش زبان‌های منظم پیشنهاد می‌کند.

### ۳-۱-۱ تعریف رسمی عبارت منظم

**تعریف** عبارت منظم **(regular expression)**. فرض می‌کنیم که $\Sigma$ یک الفبای داده شده باشد:

۱) $\varnothing$، $\lambda$ و $a$ $(a \in \Sigma)$ عبارت‌های منظم هستند (عبارات منظم ابتدایی).

۲) اگر $r_۱$ و $r_۲$ دو عبارت منظم باشند،

- $r_۱ + r_۲$
- $r_۱ . r_۲$
- $r_۱^*$
- $(r_۱)$

هم عبارات منظم هستند.

۳) یک رشته عبارت منظم است، اگر و فقط اگر بتوان آن را از ترکیب عبارات منظم ابتدایی با بکارگیری تعداد متناهی قانون ۲ به دست آورد.

**مثال**

هر یک از موارد زیر، یک عبارت منظم روی الفبای $\Sigma = \{a, b, c\}$ است:

$$(a + bc)^*, \quad (a + bc)^*(c + \varnothing)$$

### ۳-۱-۲ زبان متناظر با یک عبارت منظم

اگر $r$ یک عبارت منظم باشد، $L(r)$ زبان مرتبط با $r$ است و مطابق جدول زیر تعریف می‌شود:

| |
|---|
| $L(\varnothing) = \varnothing$ |
| $L(\lambda) = \{\lambda\}$ |
| $L(a) = \{a\} \qquad , a \in \Sigma$ |
| $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$ |
| $L(r_1 . r_2) = L(r_1) . L(r_2)$ |
| $L((r)) = L(r)$ |
| $L(r^*) = (L(r))^*$ |

◄ **تذکر** عبارت منظم $r^+$ به صورت $r.r^*$ و عبارت منظم $r^?$ به صورت $r + \lambda$ تعریف می‌شود.

◄ **تذکر** برای اجتناب از پرانتزگذاریهای زیاد، از تقدم عملگرها استفاده می‌کنیم: بالاترین تقدم مربوط به بستار ستاره‌ای و پس از آن الحاق و سپس اجتماع می‌باشد.

**مثال**

زبان متناظر با عبارت منظم $a^*.(a+b)$ عبارت است از:

$$L(a^*.(a+b)) = L(a^*).L(a+b) = (L(a))^*.(L(a) \cup L(b)) = \{a\}^*.\{a,b\}$$

**مثال**

مجموعه‌ی تمام رشته‌های روی الفبای $\{a,b\}$ که به $a$ یا $bb$ ختم می‌شوند، با عبارت منظم زیر توصیف می‌شود:

$$(a+b)^*(a+bb)$$

**مثال**

مجموعه‌ی تمام رشته‌های روی الفبای $\{a,b\}$ که با تعداد زوجی $a$ آغاز می‌شوند و پس از آن به تعداد فردی $b$ ختم می‌شوند، با عبارت منظم زیر توصیف می‌شود:

$$(aa)^*(bb)^*b$$

**مثال**

مجموعه‌ی تمام رشته‌های روی الفبای $\{۰, ۱\}$ که حداقل یک زوج صفر متوالی در آن‌ها وجود دارد، با عبارت منظم زیر توصیف می‌شود:

$$(۰ + ۱)^*۰۰(۰ + ۱)^*$$

زبان متناظر با این عبارت منظم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L = \{w_۱۰۰w_۲ : w_۱, w_۲ \in \{۰, ۱\}^*\}$$

**مثال**

مجموعه‌ی تمام رشته‌های روی الفبای $\{۰, ۱\}$ که هیچ زوج صفر متوالی در آن‌ها وجود ندارد، با عبارت منظم زیر توصیف می‌شود:

$$(۱ + ۰۱)^*(۰ + \lambda)$$

### ۳-۱-۳ هم‌ارزی عبارت‌های منظم

**تعریف** **هم‌ارزی دو عبارت منظم.** دو عبارت منظم را هم‌ارز (معادل) گویند اگر و فقط اگر زبان‌های متناظر با آنها برابر باشند.

$$\boxed{r_۱ = r_۲ \quad \textbf{iff} \quad L(r_۱) = L(r_۲)}$$

**مثال**

دو عبارت منظم زیر با یکدیگر هم‌ارز هستند، زیرا زبان‌های متناظر با آنها مساوی است.

$$(۱ + ۰۱)^*(۰ + \lambda) = (۱^*۰۱۱^*)^*(۰ + \lambda) + ۱^*(۰ + \lambda)$$

هر دوی این عبارت‌ها بیان می‌کنند که دو صفر متوالی در این رشته‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد.

**چند رابطه برای هم‌ارزی عبارت‌های منظم** فرض می‌کنیم $r$ و $s$ عبارت‌های منظم روی الفبای $\Sigma$ باشند.

- $(r+s)^* = (r^* + s^*)^*$
- $(r+s)^* = (r^* + s)^*$
- $(r+s)^* = (r + s^*)^*$
- $(r+s)^* = (r^* s^*)^*$
- $(r+s)^* = r^*(sr^*)^*$
- $(r+s)^* = s^*(rs^*)^*$
- $(r+s)^* = (r^*s + rs^*)^*$

- $(rs)^*r = r(sr)^*$
- $r^*r^* = r^*$
- $(r^*)^* = r^*$

- $L(s) \subseteq L(r) \quad \Rightarrow \quad (r+s)^* = r^*$
- $L(s) \subseteq L(r) \quad \Rightarrow \quad s^* \subseteq r^*$

- $r^+ = r.r^*$
- $r^* = r^+ + \lambda$
- $(r^+)^* = (r^*)^+ = r^*$
- $r^? = r + \lambda$

- $r + \varnothing = r$
- $r\varnothing = \varnothing$
- $\varnothing^* = \lambda$

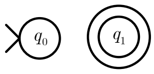
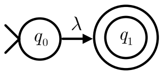
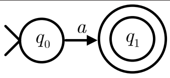
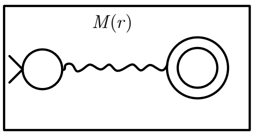
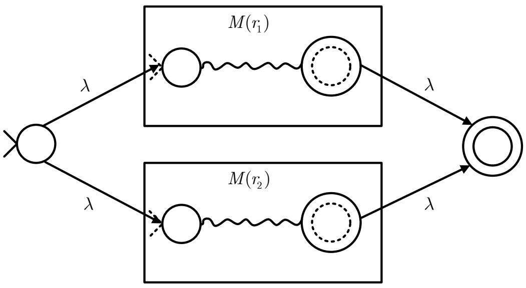
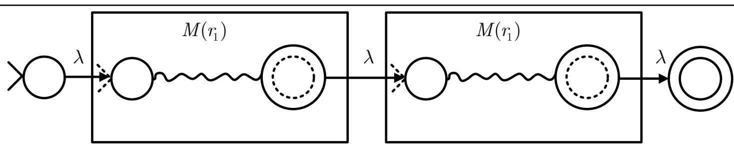
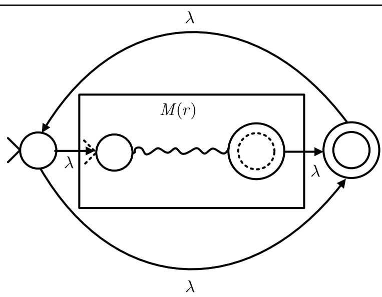
- $(r+s)^R = r^R + s^R$
- $(rs)^R = s^R r^R$
- $(r^*)^R = (r^R)^*$

# ۳-۲ ارتباط میان عبارت‌های منظم و زبان‌های منظم

## ۳-۲-۱ تعیین آتوماتون متناهی متناظر با یک عبارت منظم

**قضیه** اگر $r$ یک عبارت منظم باشد، برای آن یک $\lambda$-$NFA$ وجود دارد که $L(r)$ را می‌پذیرد.

**ساخت NFA با گذر تهی از روی عبارت منظم** مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم:

| Regular expression | Finite automaton |
|---|---|
| $\varnothing$ |   |
| $\lambda$ |   |
| $a \quad (a \in \Sigma)$ |   |
| $r$ |   |
| $r_1 + r_2$ |   |
| $r_1.r_2$ |   |
| $r^*$ |   |

**نتیجه** اگر $r$ یک عبارت منظم باشد، زبان $L(r)$ منظم است.

### ۲-۲-۳ تعیین عبارت منظم متناظر با یک آتوماتون متناهی

**قضیه** اگر $L$ یک زبان منظم باشد، آنگاه عبارت منظم $r$ وجود دارد به طوری که $L = L(r)$.

◄ برای هر زبان منظم یک NFA وجود دارد که آن را می‌پذیرد.
برای هر NFA یک عبارت منظم متناظر با آن وجود دارد.

#### حل دستگاه معادلات منظم برای یافتن عبارت منظم متناظر با یک آتوماتون متناهی

برای تعیین عبارت منظم متناظر با یک آتوماتون متناهی

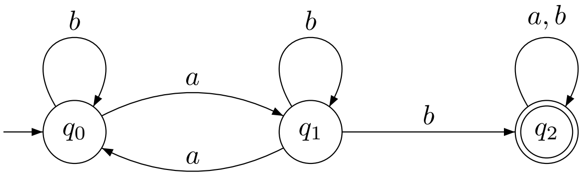
- برای هر حالت یک معادله‌ی منظم می‌نویسیم.
  - اگر $q \notin F$ و گذرهای $q_۱ \in \delta(q, a)$ و $q_۲ \in \delta(q, b)$ را داشتیم، معادله‌ی منظم
  $$q = aq_۱ + bq_۲$$
  را به دستگاه اضافه می‌کنیم.
  - اگر $q \in F$ و گذرهای $q_۱ \in \delta(q, a)$ و $q_۲ \in \delta(q, b)$ را داشتیم، معادله‌ی منظم
  $$q = aq_۱ + bq_۲ + \lambda$$
  را به دستگاه اضافه می‌کنیم.
- دستگاه حاصل را با شروع از یک معادله و با جایگذاری حل می‌کنیم و $q_۰$ را می‌یابیم.
  اگر معادله به صورت بازگشتی بود، آن را به کمک قاعده‌ی Arden حل می‌کنیم.
- عبارت منظم متناظر با آتوماتون متناهی در $q_۰$ قرار دارد.

قاعده‌ی Arden

$$x = ax + b \quad \Rightarrow \quad x = a^*b \quad , \lambda \notin L(a)$$

**مثال**

عبارت منظم متناظر با آتوماتون متناهی غیرقطعی زیر را محاسبه می‌کنیم:



دستگاه معادلات منظم برای آتوماتون فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} q_0 &= bq_0 + aq_1 \\ q_1 &= bq_1 + aq_0 + bq_2 \\ q_2 &= (a+b)q_2 + \lambda \end{aligned}$$

که با اعمال قاعده‌ی آردن روی معادله‌ی سوم به دست می‌آوریم $q_2 = (a+b)^*$. با جایگذاری عبارت $q_2$ در معادله‌ی حالت $q_1$ داریم:

$$q_1 = bq_1 + aq_0 + b(a+b)^*$$

که با اعمال قاعده‌ی آردن روی آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} q_1 &= b^*(aq_0 + b(a+b)^*) \\ &= b^*aq_0 + b^*b(a+b)^* \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت $q_1$ در معادله‌ی حالت $q_0$ داریم:

$$\begin{aligned} q_0 &= bq_0 + ab^*aq_0 + ab^*b(a+b)^* \\ &= (b + ab^*a)q_0 + ab^*b(a+b)^* \end{aligned}$$

که با اعمال قاعده‌ی آردن، به عبارت منظم زیر برای $q_0$ و آتوماتون مفروض می‌رسیم:

$$q_0 = (b + ab^*a)^*ab^*b(a+b)^*$$

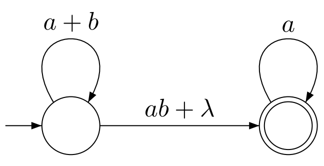
▲

## گراف گذر حالت تعمیم‌یافته برای یافتن عبارت منظم متناظر با یک آتوماتون متناهی

**تعریف** **گراف گذر حالت تعمیم‌یافته (generalized transition graph: GTG).** گراف گذر حالت تعمیم‌یافته، همانند گراف گذر حالت عادی است، با این تفاوت که یال‌های آن با یک عبارت منظم برچسب‌گذاری می‌شود.

**مثال** ▼

شکل زیر یک گراف گذر حالت تعمیم‌یافته را نشان می‌دهد:

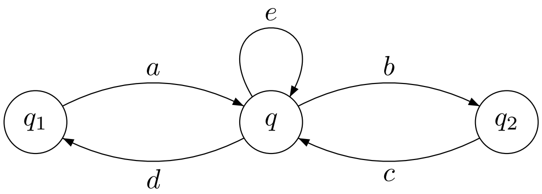



▲

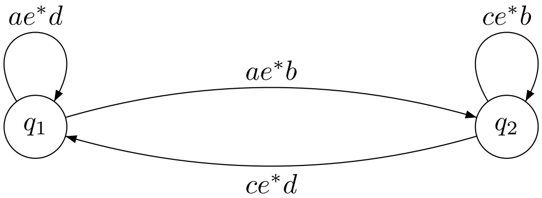
از گراف گذر حالت تعمیم‌یافته می‌توان برای یافتن عبارت منظم متناظر با یک آتوماتون متناهی استفاده کرد.

**مثال**

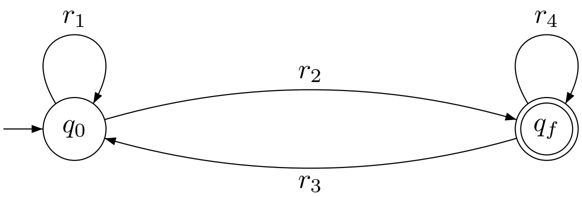
گراف گذر حالت زیر با سه حالت




را می‌توان به یک گراف گذر حالت تعمیم‌یافته‌ی زیر با دو حالت تبدیل کرد:




در حالت کلی، از گراف گذر NFA با یک حالت نهایی شروع می‌کنیم. بین تمام رئوس گراف، یال رسم می‌شود. اگر گراف $|V|$ رأس داشته باشد، $|V|^۲$ یال (شامل طوقه‌ها) خواهد داشت. یال‌هایی که در گراف گذر اصلی وجود ندارند، با عبارت منظم $\varnothing$ برچسب‌گذاری می‌شوند. سپس مشابه مثال فوق، بین هر سه حالت، حالت میانی حذف می‌شود. این کار آن قدر تکرار می‌شود تا به گرافی با دو حالت $q_۰$ و $q_f$ برسیم:




در این صورت، عبارت منظم متناظر با این گراف می‌شود:

$$r = r_۱^* r_۲ (r_۴^* + r_۳ r_۱^* r_۲)^*$$

که بر اساس خواص هم‌ارزی عبارت‌های منظم می‌تواند به صورت زیر هم نوشته شود:

$$r = r_۱^* r_۲ (r_۴ + r_۳ r_۱^* r_۲)^*$$

### ۳-۲-۳ کاربرد عبارت‌های منظم در توصیف الگوهای ساده

- تحلیل‌گر لغوی در یک کامپایلر
- تطابق الگو (برنامه‌های sed، grep در UNIX)
- ...

## ۳-۳ گرامرهای منظم

**تعریف** **گرامرهای خطی از راست و خطی از چپ.** گرامر $G = (V, T, S, P)$ با $A, B \in V$ و $x \in T^*$ را در نظر می‌گیریم.

گرامر خطی از راست *(right linear)* گرامری است که همه‌ی قواعد آن به صورت زیر باشد.

$$A \to xB \quad \text{یا} \quad A \to x$$

گرامر خطی از چپ *(left linear)* گرامری است که همه‌ی قواعد آن به صورت زیر باشد.

$$A \to Bx \quad \text{یا} \quad A \to x$$

**تعریف** **گرامر منظم.** گرامر منظم، گرامری است که خطی از راست یا خطی از چپ باشد.

◄ **تذکر** **گرامر خطی** گرامری است که در سمت راست همه‌ی قواعد آن حداکثر یک متغیر وجود داشته باشد.

◄ **تذکر** در یک گرامر منظم، حداکثر یک متغیر در سمت راست هر قاعده ظاهر می‌شود و بعلاوه این متغیر باید همواره آخرین نماد یا اولین نماد سمت راست باشد.

◄ **تذکر** هرگرامر منظم، حتماً خطی است؛ اما هرگرامر خطی لزوماً منظم نیست (مانند $S \to aSb \mid \lambda$).

**مثال**

گرامر زیر یک گرامر خطی از راست است:

$$S \to abS \mid a$$

همچنین گرامر زیر یک گرامر خطی از چپ است:

$$\begin{aligned} S &\to Aab \\ A &\to Aab \mid B \\ B &\to a \end{aligned}$$

و مطابق تعریف هر دوی این گرامرها منظم هستند.

**مثال**

گرامر زیر یک گرامر منظم نیست:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow aB \mid \lambda \\ B &\rightarrow Ab \end{aligned}$$

زیرا نه خطی از راست و نه خطی از چپ است. البته این گرامر خطی است.

**قضیه** اگر $G = (V, T, S, P)$ یک گرامر خطی از راست باشد، آن‌گاه $L(G)$ یک زبان منظم است.

**قضیه** اگر $L$ یک زبان منظم بر روی الفبای $\Sigma$ باشد، آن‌گاه یک گرامر خطی از راست مانند $G$ وجود دارد که $L = L(G)$.

### ۳-۳-۱ ساخت گرامر خطی از راست از روی آتوماتون متناهی

- برای هر حالت $q_i \in Q$ $(0 \le i \le |Q| - 1)$ یک ناپایانه $A_i$ را در نظر می‌گیریم.
- نماد شروع $S$ را متناظر با حالت اولیه $q_0$ به صورت $A_0$ در نظر می‌گیریم.
- اگر $q_j \in \delta(q_i, a)$ در تابع گذر وجود داشت $(a \in \Sigma)$ (مصرف $a$)، آن‌گاه قاعده‌ی $A_i \rightarrow aA_j$ را به گرامر می‌افزاییم (تولید $a$).
- اگر $q_j \in \delta(q_i, \lambda)$ در تابع گذر وجود داشت، آن‌گاه قاعده‌ی $A_i \rightarrow A_j$ را به گرامر می‌افزاییم.
- اگر $q_i \in F$، آن‌گاه قاعده‌ی $A_i \rightarrow \lambda$ را به گرامر می‌افزاییم.

**مثال**

تابع گذر حالت برای NFAی $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_f\})$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$$
$$\delta(q_1, a) = \{q_2\}$$
$$\delta(q_2, b) = \{q_2\}$$
$$\delta(q_2, a) = \{q_f\}$$

گرامر خطی از راست معادل با این آتوماتون به صورت زیر است:

$$G = (\{A_۰, A_۱, A_۲, A_f\}, \{a, b\}, A_۰, P)$$

| $\delta$ | $P$ |
|---|---|
| $\delta(q_۰, a) = \{q_۰, q_۱\}$ | $A_۰ \to aA_۰ \mid aA_۱$ |
| $\delta(q_۱, \lambda) = \{q_۲\}$ | $A_۱ \to A_۲$ |
| $\delta(q_۲, b) = \{q_۲\}$ | $A_۲ \to bA_۲$ |
| $\delta(q_۲, a) = \{q_f\}$ | $A_۲ \to aA_f$ |
| $q_f \in F$ | $A_f \to \lambda$ |

▲

### ۲-۳-۳ ساخت آتوماتون متناهی از روی گرامر خطی از راست

- هر قاعده به صورت $A \to a_۱a_۲\ldots a_k$ با $k \geq ۲$ $(A \in V, a_۱, a_۲, \ldots, a_k \in T)$ را به $k$ قاعده به شکل

$$A \to a_۱B_۱,\ B_۱ \to a_۲B_۲,\ B_۲ \to a_۳B_۳,\ \ldots,\ B_{k-۱} \to a_k$$

تبدیل می‌کنیم که در آن $B_۱$، $B_۲$، $\ldots$، $B_{k-۱}$ ناپایانه‌های جدید هستند.

- هر قاعده به صورت $A \to a_۱a_۲\ldots a_kB$ با $k \geq ۲$ $(A, B \in V, a_۱, a_۲, \ldots, a_k \in T)$ را به $k$ قاعده به شکل

$$A \to a_۱B_۱,\ B_۱ \to a_۲B_۲,\ B_۲ \to a_۳B_۳,\ \ldots,\ B_{k-۱} \to a_kB,$$

تبدیل می‌کنیم که در آن $B_۱$، $B_۲$، $\ldots$، $B_{k-۱}$ ناپایانه‌های جدید هستند.

- هر قاعده به صورت $A \to a$ $(A \in V, a \in T)$ را به دو قاعده به شکل

$$A \to aB, \qquad B \to \lambda$$

تبدیل می‌کنیم که در آن $B$ یک ناپایانه‌ی جدید است (البته، این تبدیل اختیاری است).

- به ازای هر ناپایانه‌ی $A_i$ موجود در گرامر، یک حالت $q_i$ را در نظر می‌گیریم.
- حالت اولیه $q_۰$ را متناظر با نماد شروع $S$ $(A_۰)$ در نظر می‌گیریم.
- یک حالت نهایی $q_f$ را در نظر می‌گیریم.
- اگر قاعده‌ی $A_i \to \lambda$ در گرامر موجود بود، حالت $q_i$ را به مجموعه‌ی حالات نهایی $F$ می‌افزاییم.
- اگر قاعده‌ی $A_i \to aA_j$ در گرامر موجود بود، گذر $q_j \in \delta(q_i, a)$ را به تابع $\delta$ می‌افزاییم.
- اگر قاعده‌ی $A_i \to a$ در گرامر موجود بود، گذر $q_f \in \delta(q_i, a)$ را به تابع $\delta$ می‌افزاییم.
- اگر قاعده‌ی $A_i \to A_j$ در گرامر موجود بود، گذر $q_j \in \delta(q_i, \lambda)$ را به تابع $\delta$ می‌افزاییم.

**مثال**

گرامر خطی از راست $G = (\{S, A, B, D, E\}, \{a, b, c, d\}, S, P)$ با قواعد تولید زیر داده شده است:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aS \mid bA \\
A & \rightarrow & abA \mid cB \\
B & \rightarrow & cdD \mid \lambda \\
D & \rightarrow & a \mid E \\
E & \rightarrow & abE \mid a
\end{array}
$$

آتوماتون متناهی معادل با آن به صورت زیر است:

$$M = (Q, \{a, b, c, d\}, \delta, q_S, \{q_f\})$$

| | | |
|---|---|---|
| $S \rightarrow aS$ | $S \rightarrow aS$ | $\delta(q_S, a) = \{q_S\}$ |
| $S \rightarrow bA$ | $S \rightarrow bA$ | $\delta(q_S, b) = \{q_A\}$ |
| $A \rightarrow abA$ | $A \rightarrow aX$ | $\delta(q_A, a) = \{q_X\}$ |
| | $X \rightarrow bA$ | $\delta(q_X, b) = \{q_A\}$ |
| $A \rightarrow cB$ | $A \rightarrow cB$ | $\delta(q_A, c) = \{q_B\}$ |
| $B \rightarrow cdD$ | $B \rightarrow cY$ | $\delta(q_B, c) = \{q_Y\}$ |
| | $Y \rightarrow dD$ | $\delta(q_Y, d) = \{q_D\}$ |
| $B \rightarrow \lambda$ | $B \rightarrow \lambda$ | $\delta(q_B, \lambda) = \{q_f\}$ |
| $D \rightarrow a$ | $D \rightarrow a$ | $\delta(q_D, a) = \{q_f\}$ |
| $D \rightarrow E$ | $D \rightarrow E$ | $\delta(q_D, \lambda) = \{q_E\}$ |
| $E \rightarrow abE$ | $E \rightarrow aZ$ | $\delta(q_E, a) = \{q_Z\}$ |
| | $Z \rightarrow bE$ | $\delta(q_Z, b) = \{q_E\}$ |
| $E \rightarrow a$ | $E \rightarrow a$ | $\delta(q_E, a) = \{q_f\}$ |

$$Q = \{q_S, q_A, q_B, q_D, q_E, q_X, q_Y, q_Z\}$$

## ۳-۳-۳ گرامر خطی چپ و زبان‌های منظم

**قضیه** اگر $G = (V, T, S, P)$ یک گرامر خطی از چپ باشد، آن‌گاه $L(G)$ یک زبان منظم است.

**قضیه** اگر $L$ یک زبان منظم بر روی الفبای $\Sigma$ باشد، آن‌گاه یک گرامر خطی از چپ مانند $G$ وجود دارد که $L = L(G)$.

### ۳-۳-۴ گرامر منظم و زبان منظم

**قضیه** زبان $L$ منظم است اگر و فقط اگر گرامر منظمی مانند $G$ وجود داشته باشد که $L = L(G)$.

## ۳-۴ چند تبدیل روی گرامرها

- هر گرامر خطی از راست $G$ که $L$ را تولید می‌کند، را می‌توان به یک گرامر خطی از چپ $G'$ تبدیل کرد که $L^R$ را تولید کند.

  به این صورت که قواعد به فرم زیر در $G$

$$A \to xB, \qquad A \to x$$

  به ترتیب به قواعدی به فرم زیر در $G'$ تبدیل می‌شود:

$$A \to Bx^R, \qquad A \to x^R$$

- هر گرامر خطی از چپ $G$ که $L$ را تولید می‌کند، را می‌توان به یک گرامر خطی از راست $G'$ تبدیل کرد که $L^R$ را تولید کند.

  به این صورت که قواعد به فرم زیر در $G$

$$A \to Bx, \qquad A \to x$$

  به ترتیب به قواعدی به فرم زیر در $G'$ تبدیل می‌شود:

$$A \to x^R B, \qquad A \to x^R$$

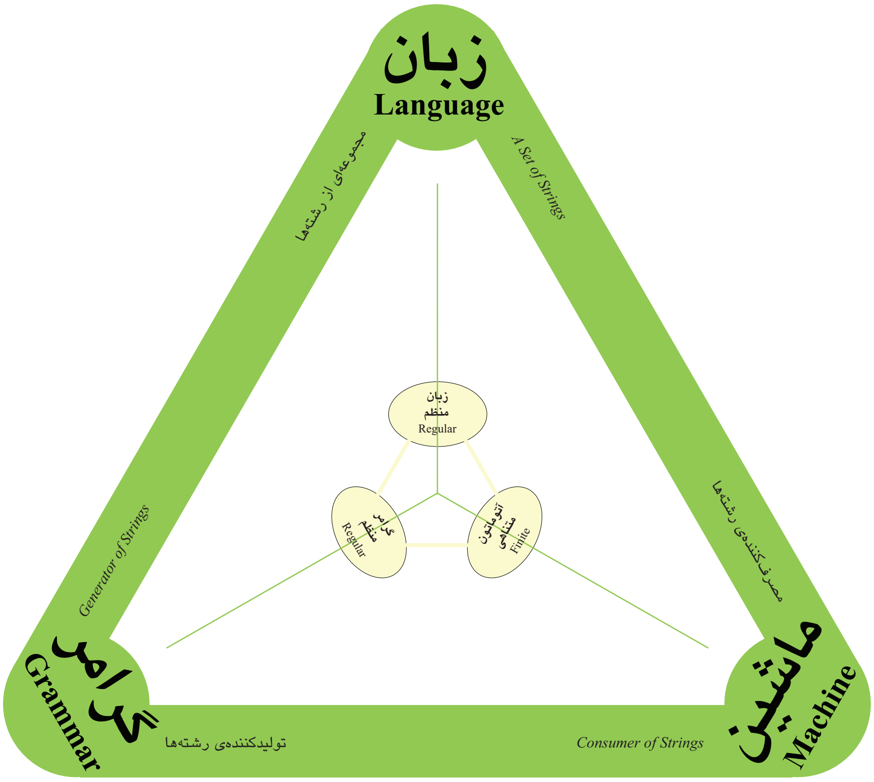
## ۳-۵ روش‌های مختلف برای توصیف زبان‌های منظم

مشاهده کردیم که روش‌های گوناگونی برای توصیف زبان‌های منظم وجود دارد:

- پذیرنده‌ی متناهی قطعی (DFA)
- پذیرنده‌ی متناهی غیرقطعی (NFA)
- عبارت منظم
- گرامر منظم (گرامر خطی راست یا خطی از چپ)

همگی این روش‌ها قدرت یکسانی دارند و تعریف‌های کامل و خالی از ابهامی از زبان‌های منظم ارائه می‌دهند. با استفاده از الگوریتم‌هایی که بررسی شد، هر یک از موارد فوق را می‌توان به دیگری تبدیل کرد.

## ۳-۶ خانواده‌ی زبان‌های نوع سه: زبان، گرامر و ماشین



# مراجع

[1] P. Linz, **An Introduction to Formal Languages and Automata**, 5th Ed., Jones and Bartletts, 2012.

[2] M. Sipser, **Introduction to the Theory of Computation**, 3rd Ed., Cengage Learning, 2013.