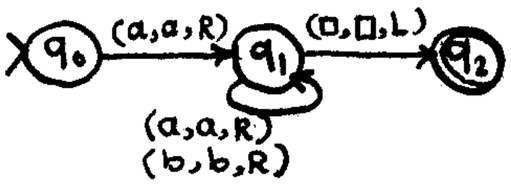
تکلیف ۹

# ماشین‌های تورینگ

## Turing Machines

۱. یک ماشین تورینگ با حداکثر سه حالت برای پذیرش زبان $L(a(a+b)^*)$ روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ طراحی کنید. آیا انجام این کار با یک ماشین دو حالتی هم ممکن است؟ بله (حذف $q_2$ و نهایی کردن $q_1$)




۲. ماشین‌های تورینگی طراحی کنید که زبان‌های زیر را روی $\{a, b\}$ بپذیرند:

آ) $L = \{w : |w| \text{ is even}\}$

ب) $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$

پ) $L = \{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$

۳. یک ماشین تورینگ برای پذیرش زبان $\{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ طراحی کنید.

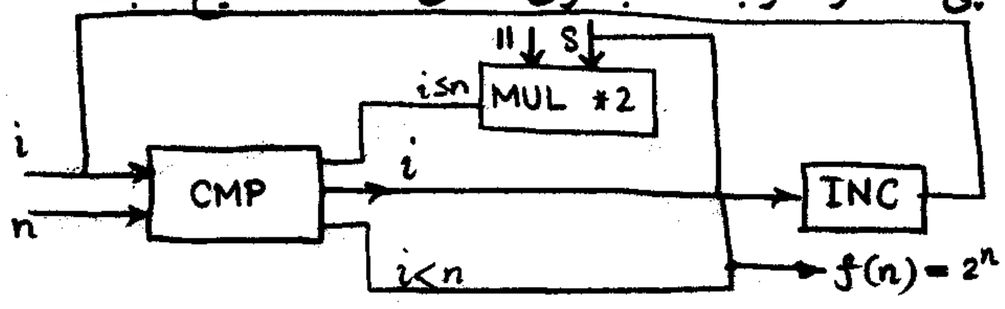
۴. یک ماشین تورینگ برای محاسبه‌ی تابع $f$ با ضابطه‌ی $f(w) = w^R$ طراحی کنید که در آن $w \in \{a, b\}^+$.

۵. یک ماشین تورینگ طراحی کنید که تابع $f(x) = x \bmod 5$ را محاسبه کند که در آن $x \in \mathbb{Z}^+$.

۶. آیا گزاره‌ی زیر درست است؟ برای هر ماشین تورینگ معادلی با فقط یک حالت نهایی وجود دارد. بله
اگر $|F| > 1$ باشد، حالت جدید $q_f$ را تعریف می‌کنیم با تعدی $\delta(q,a) = (q_f, a, R)$ برای همه‌ی $q \in F$ و $a \in T$

۷. دیاگرام بلوکی توابع زیر را با استفاده از جمع‌کننده، تفریق‌کننده، کپی‌کننده و ضرب‌کننده به ازای همه‌ی اعداد صحیح مثبت $n$ رسم کنید:

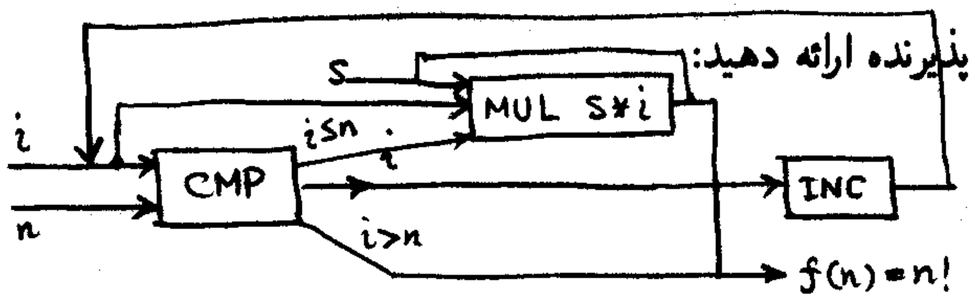
آ) $f(n) = 2^n$




ب) $f(n) = n!$

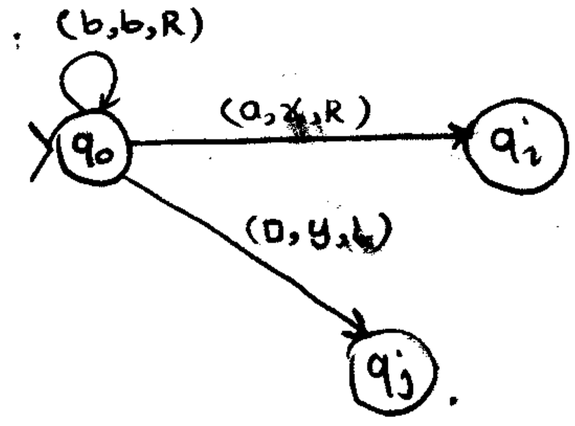
۸. برای زبان‌های زیر، یک توصیف سطح بالا برای ماشین تورینگ پذیرنده ارائه دهید:

آ) $L = \{a^n b^{n^2} : n \geq 1\}$



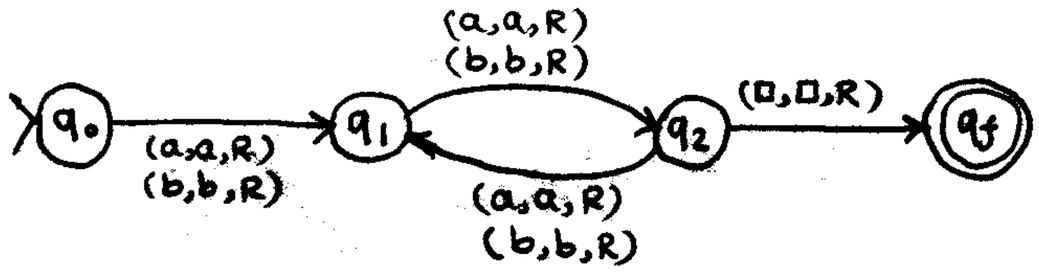

ب) $L = \{a^n : n \text{ is prime}\}$

۹. دستورالعمل سطح بالای $searchright(a, q_i, q_j)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را با ماشین تورینگ پیاده‌سازی کنید: ماشین باید نوار را از محل فعلی برای یافتن اولین $a$ جستجو کند. اگر یک $a$ قبل از یک □ بود، ماشین به حالت $q_i$ می‌رود و در غیر این صورت وارد حالت $q_j$ می‌شود.




$x, y \notin T$
$b \in T$
$a \neq b$
$b \neq \square$

آ)



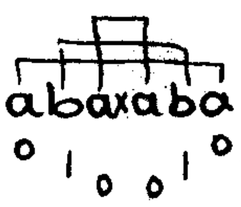

ب)

$\delta(q_0,a)=(q_1,x,R)$ — جایگزینی اولین a با x و y
$\delta(q_0,b)=(q_2,y,R)$ — یافتن اولین b و جایگزینی آن با y
$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$ — یافتن اولین a و جایگزینی آن با x
$\delta(q_1,x)=(q_1,x,R)$
$\delta(q_1,y)=(q_1,y,R)$
$\delta(q_2,b)=(q_2,b,R)$
$\delta(q_2,x)=(q_2,x,R)$
$\delta(q_2,y)=(q_2,y,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_3,y,L)$
$\delta(q_2,a)=(q_4,x,L)$
$\delta(q_3,a)=(q_3,a,L)$ — برگرداندن هد به ابتدا
$\delta(q_3,x)=(q_3,x,L)$
$\delta(q_3,y)=(q_3,y,L)$
$\delta(q_4,x)=(q_4,x,L)$ — مشابه $q_3$
$\delta(q_4,y)=(q_4,y,L)$
$\delta(q_4,b)=(q_4,b,L)$
$\delta(q_3,\square)=(q_5,\square,R)$
$\delta(q_4,\square)=(q_5,\square,R)$
$\delta(q_5,a)=(q_1,x,R)$
$\delta(q_5,b)=(q_2,y,R)$
$\delta(q_5,x)=(q_5,x,R)$
$\delta(q_5,y)=(q_5,y,R)$
$\delta(q_5,\square)=(q_f,\square,L)$

پ)

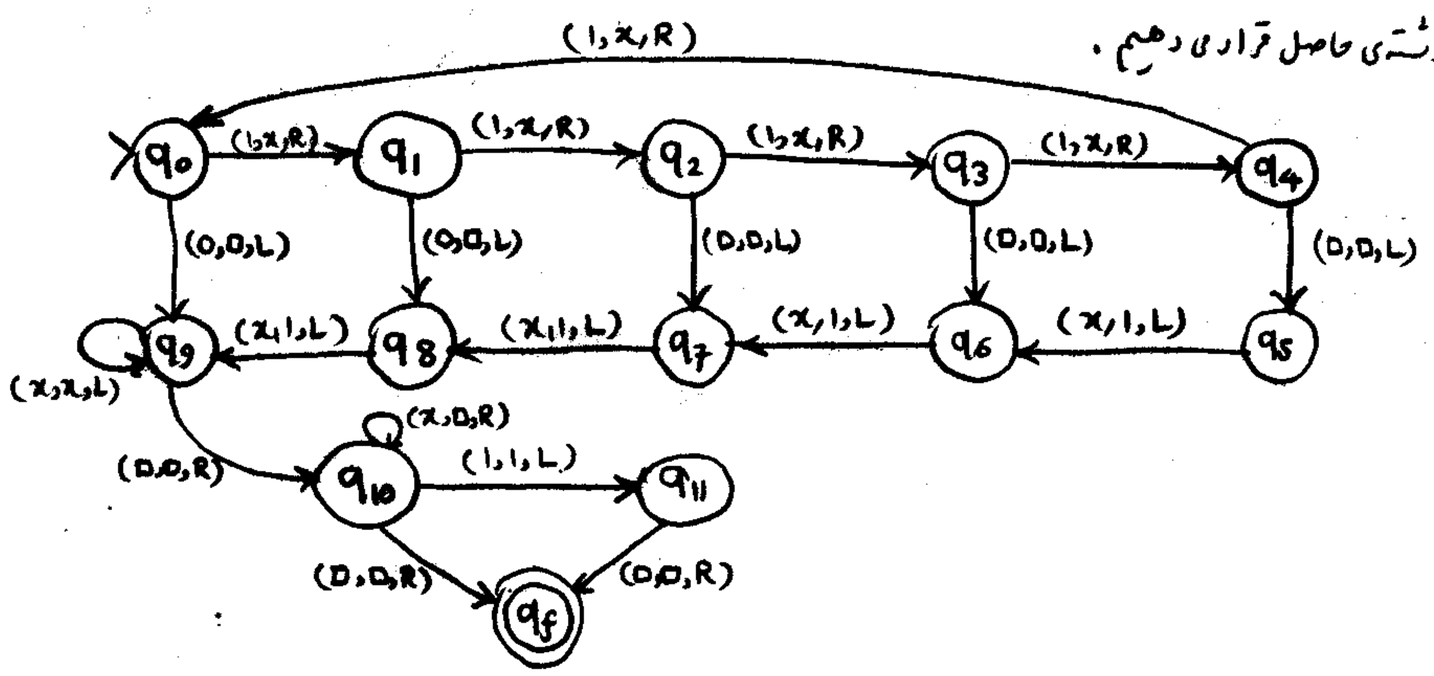
$\delta(q_0,a)=(q_1,x,R)$
$\delta(q_0,x)=(q_0,x,R)$
$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$
$\delta(q_1,y)=(q_1,y,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_2,y,R)$
$\delta(q_2,b)=(q_2,b,R)$
$\delta(q_2,x)=(q_2,x,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_3,x,R)$
$\delta(q_3,a)=(q_3,a,R)$
$\delta(q_3,y)=(q_3,y,R)$
$\delta(q_3,b)=(q_4,y,L)$
$\delta(q_4,a)=(q_4,a,L)$
$\delta(q_4,b)=(q_4,b,L)$
$\delta(q_4,x)=(q_4,x,L)$
$\delta(q_4,y)=(q_4,y,L)$
$\delta(q_4,\square)=(q_0,\square,R)$
$\delta(q_0,y)=(q_5,y,R)$
$\delta(q_5,y)=(q_5,y,R)$
$\delta(q_5,x)=(q_6,x,R)$
$\delta(q_6,x)=(q_6,x,R)$
$\delta(q_6,y)=(q_7,y,R)$
$\delta(q_7,y)=(q_7,y,R)$
$\delta(q_7,\square)=(q_f,\square,L)$

۳) ابتدا رشته‌ی روی نوار را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (طول رشته باید زوج باشد؛ اگر فرد باشد روال در همین جا متوقف می‌شود)
بین دو رشته یک علامت مانند x قرار می‌دهیم.
هر عنصر از قسمت اول را با عنصر متناظر در قسمت دوم مقایسه می‌کنیم و به جای a‌ها 0 و به جای b‌ها 1 قرار می‌دهیم.
در پایان باید تنها عددهای 0 و 1 و x روی نوار موجود باشد.




۴) ابتدا به انتهای رشته می‌رویم و یک علامت جداکننده مانند x در آنجا قرار می‌دهیم.
پس به طور معکوس از انتهای رشته یک نماد می‌خوانیم و آن را با a یا b جایگزین کرده، به انتهای سمت راست x رفته و نماد خوانده شده را در آنجا می‌نویسیم.
مرحله‌ی فوق را آن قدر تکرار می‌کنیم تا کل رشته با a یا b جایگزین شود.
در نهایت کلیه‌ی x‌ها و a‌ها و b‌ها را با □ تبدیل می‌کنیم و هد را در ابتدای رشته‌ی حاصل قرار می‌دهیم.

۵)






آ)

$w_1 = pre(w,a)$ — $w_1$ پیشوند $w$ را برمی‌گرداند که با a تمام می‌شود
$w_2 = post(w,b)$ — $w_2$ پسوند $w$ را برمی‌گرداند که با b شروع می‌شود
$l = |w|$
$l_1 = |w_1|$
$l_2 = |w_2|$
if $(l = l_1 + l_2)$ and $(l_2 = l_1 * l_2)$ and $(l_1 \geq 1)$
then accept
end if

ب)

$w_1 = pre(w,a)$
$l_1 = |w_1|$
$l = |w|$
if $l = l_1$ then
  for $t_i$ := 2 to n−1 do
    if mod(l, i) = 0 then reject endif
accept
endif