فصل ۸

① نشان دهید که زبان $L=\{a^n : n \text{ is prime}\}$ مستقل از متن نیست.

با استفاده از لم تزریق: با فرض مستقل از متن بودن L

۱) $m \in \mathbb{N}$

۲) $w = a^k \in L \quad , |w| \geq m$ k: اولین عدد اول بزرگتر یا مساوی با m

۳) $w = \underbrace{a^{t_1}}_{u}\ \underbrace{a^{t_2}}_{v}\ \underbrace{a^{t_3}}_{x}\ \underbrace{a^{t_4}}_{y}\ \underbrace{a^{k-(t_1+t_2+t_3+t_4)}}_{z}$ $|vxy| = t_2+t_3+t_4 \leq m$

$|vy| = t_2+t_4 \geq 1$

۴) $w_i = uv^ixy^iz \in L \quad \forall i$

$i=0 \Rightarrow w_i = a^{k-(t_2+t_4)} \in L$

$i=1 \Rightarrow w_i = a^k \in L$

$i=2 \Rightarrow w_i = a^{k+(t_2+t_4)} \in L$

$i=3 \Rightarrow w_i = a^{k+2(t_2+t_4)} \in L$

⋮

ولی این رشته‌ها نمی‌توانند متعلق به L باشند، زیرا توان‌ها تصاعد حسابی با قدر نسبت t_2+t_4 دارند و یعنی اول نیستند! این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل است و L مستقل از متن نیست.

۲) مشخص کنید که آیا زبان زیر مستقل از متن است یا خیر؟

$$L = \{ w_1 c w_2 : w_1, w_2 \in \{a,b\}^*, \ w_1 \neq w_2 \}$$

این زبان مستقل از متن است زیرا به صورت زیر می‌توان برای آن گرامر مستقل از متن ارائه کرد:

- $w_1 \neq w_2 \Rightarrow$

(a) $|w_1| < |w_2| \Rightarrow \quad w_1 = u_1, \ w_2 = u_2 v, \ |u_1| = |u_2|, \ v \neq \lambda$

برای رشته‌هایی به فرم $\underline{u_1 c u_2} v$

(b) $|w_1| > |w_2| \Rightarrow \quad w_1 = v u_1, \ w_2 = u_2, \ |u_1| = |u_2|, \ v \neq \lambda$

برای رشته‌هایی به فرم $v \underline{u_1 c u_2}$

(c) $w_1 = u_1 a v_1, \ w_2 = u_2 b v_2, \ |u_1| = |u_2|$

$\overrightarrow{u_1} | \underline{a} v_1 c \overrightarrow{u_2} | \underline{b} v_2$

(d) $w_1 = u_1 b v_1, \ w_2 = u_2 a v_2, \ |u_1| = |u_2|$

$\overrightarrow{u_1} | \underline{b} v_1 c \overrightarrow{u_2} | \underline{a} v_2$

(a), (b) $\rightsquigarrow$

$S \to S_1 W \mid W S_1$ — برای تولید رشته‌های با طول مساوی S_1

$S_1 \to U S_1 U \mid c$ — $S_1 \Rightarrow^* w$ iff $w = u_1 c u_2$, $|u_1| = |u_2|, u_1, u_2 \in \{a,b\}^*$

$W \to UW \mid U$ — $W \Rightarrow^* y$ iff $y \in \{a,b\}^+$

$U \to a \mid b$ — $U \Rightarrow^* x$ iff $x \in \{a,b\}$

(c) $\rightsquigarrow$

$S \to S_2 b V$

$S_2 \to U S_2 U \mid a V c$

$V \to W \mid \lambda$

(d) $\rightsquigarrow$

$S \to S_3 a V$

$S_3 \to U S_3 U \mid b V c$

۳) نشان دهید که زبان زیر مستقل از متن است. اما خطی نیست:

$$L = \{ a^n b^n a^m b^m : n \geq 0 , m \geq 0 \}$$

این زبان مستقل از متن است، زیرا گرامر مستقل از متن زیر را دارد:

$S \rightarrow AA$

$A \rightarrow aAb \mid \lambda$

اما با لم تزریق برای زبان های خطی ثابت می‌کنیم که L خطی نیست:

فرض خلف: با فرض خطی بودن L:

۱) $m \in \mathbb{N}$

۲) $w = a^m b^m a^m b^m \in L \quad , |w| = 4m \geq m$

۳) $w = \underbrace{a^{t_1}}_{u} \underbrace{a^{t_2}}_{v} \underbrace{a^{m-(t_1+t_2)} b^m a^m b^{m-(t_3+t_4)}}_{x} \underbrace{b^{t_3}}_{y} \underbrace{b^{t_4}}_{z} \qquad |vy| = t_2 + t_3 \geq 1$

$|uvyz| = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \ngeq m$

۴) $w_i = uv^i x y^i z \in L \quad \forall i$

$i = 0 \Rightarrow w_i = a^{m-t_2} b^m b^m a^{m-t_3} \notin L \quad \times$

پس فرض خلف باطل است و L نمی‌تواند خطی باشد.

④ نشان دهید که خانواده ی زبان های مستقل از متن تحت عمل همریختی بسته است.

فرض می کنیم که L یک زبان مستقل از متن و G گرامر تولید کننده ی آن باشد. $L=L(G)$

همریختی h (homomorphism) مطابق تعریف هر حرف از الفبای را به یک رشته نگاشت می دهد.

$$a \longmapsto h(a) \quad , \quad a \in \Sigma$$

در گرامر G، هرجا به جای ترمینال a ، رشته ی $h(a)$ را قرار می دهیم ، حاصل یک گرامر مستقل از متن است

(چرا که سمت چپ قواعد عوض نشده است و همچنان یک ناپایانه است)،

به سادگی با استقرا ثابت می شود که این گرامر جدید زبان $h(L)$ را می پذیرد.

پس تصویر همریختی هر زبان مستقل از متن ، یک زبان مستقل از متن است و

خانواده ی زبان های مستقل از متن تحت عمل همریختی بسته است.

[طرح اثبات با استقرا : روی طول رشته ی w که $w \in L$ است]