دانشگاه تهران
پردیس فارابی
دانشکده‌ی مهندسی

سیگنال‌ها و سیستم‌ها
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/sigsys

مسائل حل‌شده شماره‌ی ۹

فصل نهم

تبدیل لاپلاس

THE LAPLACE TRANSFORM

۱) تبدیل لاپلاس، ناحیه‌ی همگرایی متناظر و نمودار قطب ـ صفر را برای هر یک از توابع زمانی زیر تعیین کنید.

(الف) $x(t) = e^{-t}u(-t) + ۲e^{-۲t}u(t)$

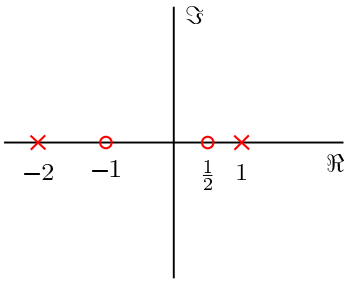
(ب) $x(t) = (e^{t}\cos t)u(t) + u(-t)$

۲) برای هر یک از تبدیلات لاپلاس زیر و ناحیه‌ی همگرایی متناظر با آنها، تابع زمانی $x(t)$ را تعیین کنید.

(الف) $X(s) = \dfrac{s-۲۵}{s^{۲}-s-۱۲}, \quad -۳ < \mathrm{Re}\{s\} < ۴$

(ب) $X(s) = \dfrac{۲s^{۲}+۷s+۹}{(s+۲)^{۲}}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -۲$

۳) در این مسئله فرض می‌کنیم ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس، محور $j\omega$ را شامل می‌شود. سیگنال $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $X(s)$ را چنان در نظر بگیرید که نمودار قطب ـ صفر آن مطابق شکل زیر باشد.



$X_{۱}(s)$ را چنان تعیین کنید که $|X_{۱}(j\omega)| = |X(j\omega)|$ و تمام قطب‌ها و صفرهای $X_{۱}(s)$ در نیمه‌ی چپ صفحه‌ی s واقع باشد (یعنی $\mathrm{Re}\{s\} < ۰$). همچنین $X_{۲}(s)$ را چنان تعیین کنید که تمام قطب‌ها و صفرهای $X_{۲}(s)$ در نیمه‌ی چپ صفحه‌ی s واقع باشد و $\angle X_{۲}(j\omega) = \angle X(j\omega)$.

۴) سیگنال $y(t)$ با دو سیگنال $x_{۱}(t)$ و $x_{۲}(t)$ به صورت زیر مرتبط شده است:

$$y(t) = x_{۱}(t-۲) * x_{۲}(-t+۳)$$

که در آن

$$x_{۱}(t) = e^{-۲t}u(t), \qquad x_{۲}(t) = e^{-۳t}u(t)$$

(الف) با استفاده از رابطه‌ی

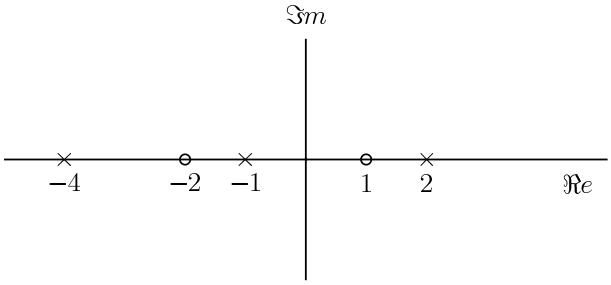
$$e^{-at}u(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{۱}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > a$$

و خواص تبدیل لاپلاس، $Y(s)$ (تبدیل لاپلاس $y(t)$) را بیابید.

(ب) تعیین کنید که آیا این سیستم، پایدار است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)

۵) یک سیستم LTI را در نظر بگیرید که در آن تابع سیستم $H(s)$ گویا (کسری) است و نمودار قطب ـ صفر آن به صورت زیر نشان داده شده است:



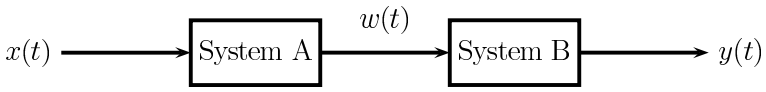
(الف) همه‌ی ROCهای ممکن متناظر با این نمودار قطب ـ صفر را نشان دهید.

(ب) برای هر ROC تعیین شده در بخش قبل، مشخص کنید که سیستم وابسته به آن پایدار و/یا علّی است یا خیر.

۶) یک بازنمایی به فرم مستقیم برای سیستم LTI علّی با تابع سیستم زیر به دست آورید.

$$H(s) = \frac{s(s+۱)}{(s+۳)(s+۴)}$$

۷) اتصال سری دو سیستم LTI را مطابق شکل رسم شده در زیر در نظر بگیرید:



که در مورد آن موارد زیر را داریم:

- سیستم A علّی است و پاسخ ضربه‌ی آن عبارت است از

$$h(t) = e^{-۲t}u(t)$$

- سیستم B علّی است و با معادله‌ی دیفرانسیل زیر که ورودی $w(t)$ و خروجی $y(t)$ را به هم ارتباط می‌دهد، مشخص می‌شود:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dw(t)}{dt} + \alpha w(t)$$

- اگر ورودی $x(t) = e^{-۳t}$ باشد، خروجی $y(t) = ۰$ می‌شود.

(الف) تابع سیستم $H(s) = Y(s)/X(s)$ را بیابید، ROC آن را تعیین کنید و نمودار قطب ـ صفر آن را رسم کنید. تذکر: در پاسخ شما تنها باید اعداد وجود داشته باشند (یعنی، اطلاعات کافی برای تعیین مقدار α وجود دارد).

(ب) معادله‌ی دیفرانسیل ارتباط‌دهنده‌ی $y(t)$ و $x(t)$ را تعیین کنید.

۸) فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم علّی و پایدار LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ و تابع سیستم گویای $H(s)$ داده شده باشد:

- پاسخ حالت ماندگار به یک پله‌ی واحد، $s(\infty) = \frac{۱}{۳}$ باشد.
- وقتی ورودی $e^t u(t)$ باشد، خروجی مطلقاً انتگرال‌پذیر می‌شود.
- سیگنال

$$\frac{d^۲h(t)}{dt^۲} + ۵\frac{dh(t)}{dt} + ۶h(t)$$

دارای عمر محدود می‌باشد.

- $h(t)$ دقیقاً یک صفر در بی‌نهایت دارد.

$H(s)$ و ROC آن را بیابید.