دانشگاه تهران
پردیس فارابی
دانشکده‌ی مهندسی

سیگنال‌ها و سیستم‌ها
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/sigsys

مسائل حل‌شده شماره‌ی ۶

فصل ششم

مشخصه‌های زمانی و فرکانسی سیگنال‌ها و سیستم‌ها

TIME AND FREQUENCY CHARACTERIZATION OF SIGNALS AND SYSTEMS

۱) در این مسئله، نمونه‌هایی از اثر تغییر غیرخطی فاز را در نظر می‌گیریم.

(الف) یک سیستم LTI پیوسته در زمان با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

که در آن $a > ۰$ است. اندازه‌ی $H(j\omega)$ چقدر است؟ فاز $H(j\omega)$ چقدر است؟ پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

(ب) خروجی سیستم فوق را به ازای $a = ۱$ و ورودی زیر بیابید:

$$x(t) = \cos(t/\sqrt{۳}) + \cos t + \cos(\sqrt{۳}t)$$

ورودی و خروجی را به طور تقریبی رسم کنید.

۲) نمودار بودی پاسخ‌های فرکانسی زیر را رسم کنید.

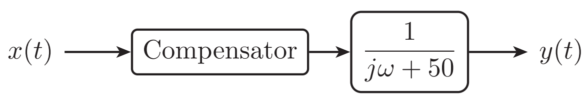
(الف) $\frac{۱۶}{(j\omega+۲)^۴}$

(ب) $\frac{۱-(j\omega/۱۰)}{۱+j\omega}$

۳) سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید. جعبه‌ی «جبران‌ساز» (compensator) یک سیستم LTI پیوسته در زمان است. می‌خواهیم پاسخ فرکانسی جبران‌ساز را چنان انتخاب کنیم که $H(j\omega)$ کل سیستم دارای خصوصیات زیر باشد:

- در $۰ < \omega < ۱۰$ شیب $+۲۰dB$ بر دهه باشد.
- در $۱۰ < \omega < ۱۰۰$ لگاریتم دامنه بین $+۱۰dB$ تا $+۳۰dB$ باشد.
- در $۱۰۰ < \omega < ۱۰۰۰$ شیب $-۲۰dB$ بر دهه باشد.
- در $\omega > ۱۰۰۰$ شیب $-۴۰dB$ بر دهه باشد.

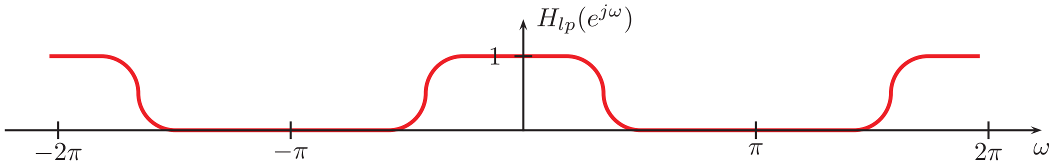
جبران‌ساز مناسبی طراحی کنید (یعنی پاسخ فرکانسی جبران‌ساز برای ارضای این شرایط را به دست آورید) و نمودار بودی $H(j\omega)$ را رسم کنید.



۴) لگاریتم اندازه و فاز پاسخ فرکانسی زیر را رسم کنید:

$$H(j\omega) = \frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})(۱ + \frac{۳}{۴}e^{-j\omega})}$$

۵) برای طراحی فیلترهای بالاگذر و میان‌گذر غالباً مناسب‌تر است فیلتر پایین‌گذری با مشخصات باندگذر و باند قطع مناسب طرح شود و سپس به فیلتر بالاگذر یا میان‌گذر مناسب تبدیل شود. این تبدیل‌ها را تبدیل پایین‌گذر ـ بالاگذر یا پایین‌گذر ـ میان‌گذر می‌نامند. حسن این روش در این است که الگوریتم‌های طراحی فیلتر تنها باید برای فیلتر پایین‌گذر فرمول‌بندی شوند. به عنوان نمونه‌ای از این روش، فیلتر پایین‌گذری با پاسخ ضربه‌ی $h_{lp}[n]$ و پاسخ فرکانسی $H_{lp}(e^{j\omega})$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. فرض کنید پاسخ ضربه با سیگنال $(-1)^n$ مدوله شده، سیگنال $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ به دست آمده است. $H_{hp}(e^{j\omega})$ را بر حسب $H_{lp}(e^{j\omega})$ بیان و رسم کنید. نشان دهید که به ازای $H_{lp}(e^{j\omega})$ شکل زیر، $H_{hp}(e^{j\omega})$ یک فیلتر بالاگذر است.



۶) در طراحی فیلترهای آنالوگ یا دیجیتال غالباً مشخصه‌ی اندازه‌ی خواسته شده را بدون توجه به فاز تقریب می‌زنیم. برای مثال، روش‌های استاندارد طراحی فیلترهای پایین‌گذر و میان‌گذر نوعاً تنها به مشخصه‌های اندازه توجه دارند.

در بسیاری از مسائل مربوط به فیلترها دوست داریم که مشخصه‌ی فاز، صفر یا خطی باشد. برای فیلترهای علّی، صفر بودن فاز، ناممکن است؛ اما در بسیاری از کاربردهای فیلترهای دیجیتال که پردازش در زمان واقعی (real-time) انجام نمی‌شود، لازم نیست پاسخ ضربه‌ی فیلتر به ازای $n < 0$ صفر باشد.

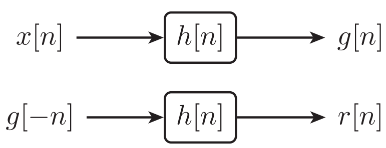
یکی از روش‌های متداول فیلترکردن دیجیتال، هنگامی که داده‌ها عمر محدودی دارند و ضبط شده‌اند، مثلاً بر روی دیسک یا نوار مغناطیسی، عبور داده‌ها از فیلتر به صورت پیشرو و پسرو است.

$h[n]$ را پاسخ ضربه‌ی یک فیلتر علّی با مشخصه‌ی فاز دلخواه در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که $h[n]$ حقیقی و تبدیل فوریه‌ی آن $H(e^{j\omega})$ باشد. $x[n]$ داده‌ای است که می‌خواهیم آن را فیلترکنیم. عمل فیلترکردن به صورت زیر انجام می‌شود:

(الف) **روش اول:** $x[n]$ را مطابق شکل زیر پردازش کرده، $s[n]$ را به دست می‌آوریم.

(الف)۱ـ $h_1[n]$ پاسخ ضربه‌ی ارتباط‌دهنده‌ی بین $s[n]$ و $x[n]$ را تعیین کنید و نشان دهید که فاز آن صفر است.

(الف)۲ـ $|H_1(e^{j\omega})|$ را تعیین کرده و آن را بر حسب $|H(e^{j\omega})|$ و $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ بیان کنید.



$$s[n] = r[-n]$$

(ب) **روش دوم:** $x[n]$ را مطابق شکل زیر توسط فیلتر $h[n]$ پردازش کرده، $g[n]$ را بیابید همچنین $x[n]$ را به صورت پسرو پردازش کرده، $r[n]$ را بیابید. خروجی $y[n]$ حاصل‌جمع $g[n]$ و $r[-n]$ است. کل این عملیات را می‌توان پردازشی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ پنداشت. پاسخ ضربه‌ی این پردازش را $h_2[n]$ بنامید.

(ب)۱ـ نشان دهید که مشخصه‌ی فاز فیلتر $h_2[n]$ صفر است.

(ب)۲ـ $|H_2(e^{j\omega})|$ را تعیین کرده و آن را بر حسب $|H(e^{j\omega})|$ و $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ بیان کنید.