



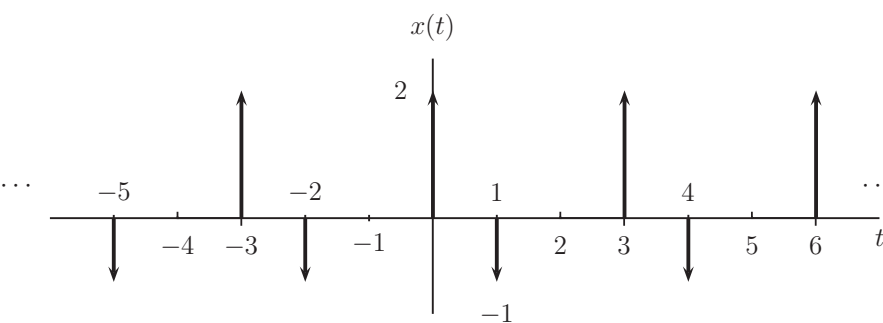
مسائل حل شده شماره‌ی ۴

فصل چهارم

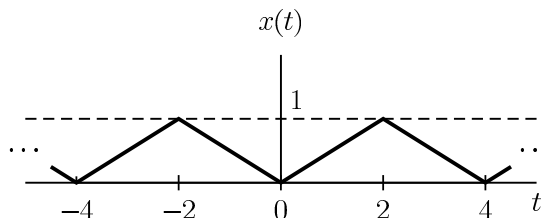
تبدیل فوریه‌ی پیوسته-زمان

THE CONTINUOUS-TIME FOURIER TRANSFORM

۱) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t) = e^{-4|t|}$ را در نظر بگیرید. بازنمایی سری فوریه‌ی خروجی $y(t)$ را برای ورودی زیر به دست آورید:

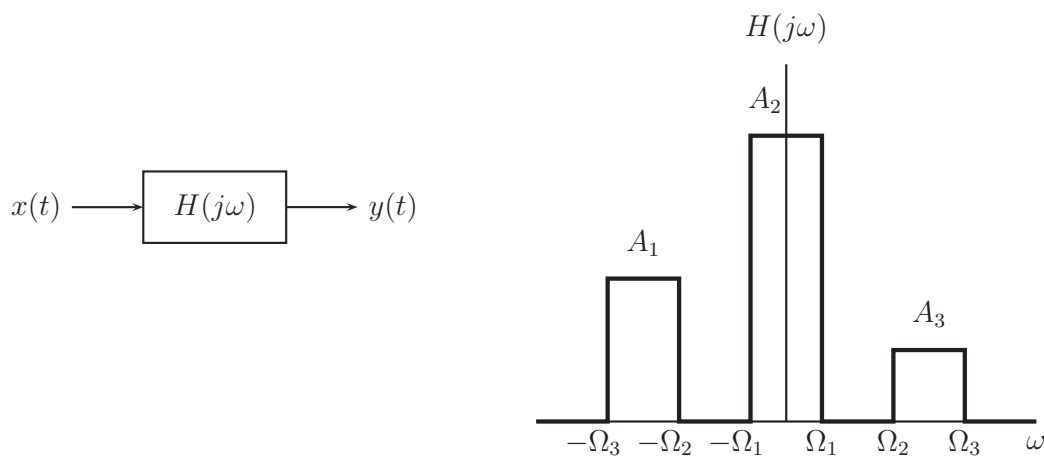


۲) موج مثلثی متناوب نشان داده شده در زیر دارای ضرایب سری فوریه‌ی a_k است.



$$a_k = \begin{cases} 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0. \end{cases}$$

یک سیستم LTI را با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ رسم شده در شکل زیر در نظر بگیرید:



مقادیر $A_1, A_2, A_3, \Omega_1, \Omega_2$ و Ω_3 را برای فیلتر LTI فوق $H(j\omega)$ تعیین کنید به طوری که

$$y(t) = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

۳) یک سیستم LTI گسسته در زمان علی (causal) را در نظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادله‌ی تفاضلی زیر مرتبط شده‌اند:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + 2x[n-4]$$

بازنمایی سری فوریه‌ی خروجی $y[n]$ را بیابید اگر ورودی سیستم به صورت زیر باشد:

$$x[n] = 2 + \sin(\pi n/4) - 2 \cos(\pi n/2)$$

۴) پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI گسسته در زمان را بیابید به طوری که اگر ورودی آن

$$x[n] = 2 + \cos(\pi n) - \sin(\pi n/2) + 2 \cos(\pi n/4 + \pi/4)$$

باشد، خروجی به صورت

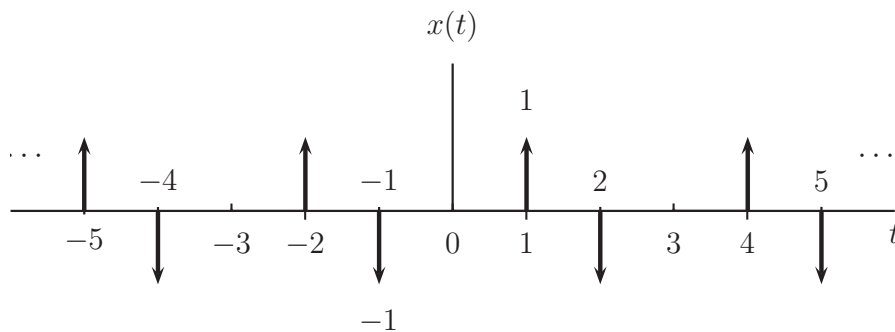
$$y[n] = 4 - 2 \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n/4)$$

شود.

۵) تبدیل فوریه‌ی هر یک از سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(الف) \quad x(t) = e^{-|t|} \cos 2t$$

(ب) سیگنال $x(t)$ ترسیم شده در زیر:



۶) سیگنال پیوسته در زمان متناظر با هر یک از تبدیل‌های زیر را تعیین کنید.

$$(الف) \quad X(j\omega) = j[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] - 3[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)]$$

$$(ب) \quad X(j\omega) = 2 \sin(2\omega - \pi/2)$$

۷) تعیین کنید تبدیل فوریه‌ی کدام یک از سیگنال‌های حقیقی شکل زیر، هر یک از شرایط زیر را برآورده می‌کند:

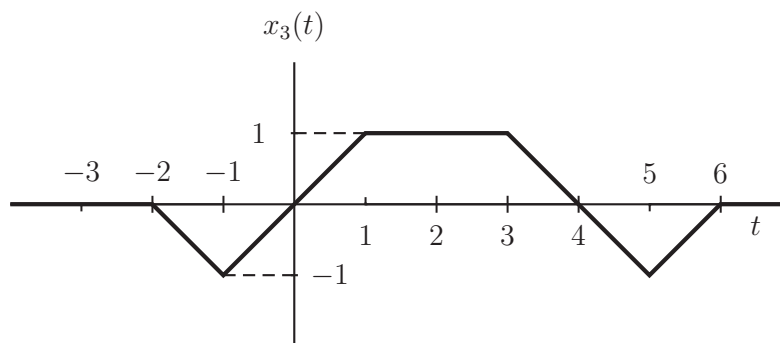
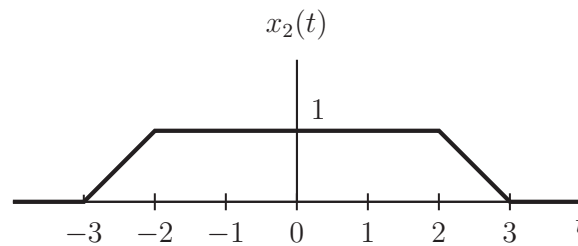
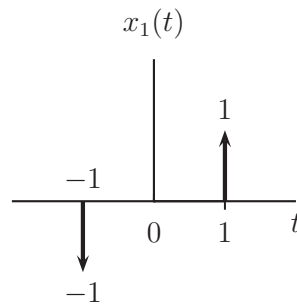
$$(الف) \quad \text{Im}\{X(j\omega)\} = 0$$

(ب) می‌توان یک α حقیقی به دست آورد به نحوی که $e^{j\alpha\omega} X(j\omega)$ حقیقی باشد.

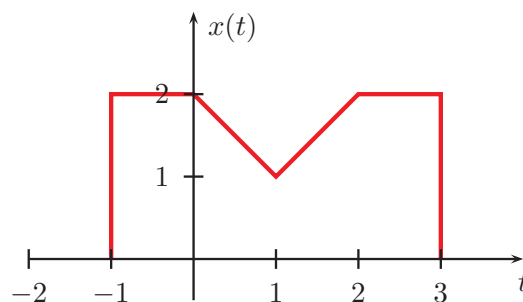
$$(ج) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega = 0$$

$$(د) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega) d\omega = 0$$

(ه) $X(j\omega)$ متناوب است.



۸) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x(t)$ شکل زیر است:



(الف) $X(j\omega)$ می‌تواند به صورت $A(j\omega)e^{j\theta(j\omega)}$ نوشته شود که در آن $A(j\omega)$ و $\theta(j\omega)$ حقیقی هستند. $\theta(j\omega)$ را بیابید.

(ب) $X(j^0)$ را بیابید.

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega$ را بیابید.

(د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{\sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$ را بیابید.

(ه) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$ را بیابید.

(و) عکس تبدیل فوریه‌ی $\text{Re}\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید.

(راهنمایی: تمام این محاسبات را می‌توانید بدون یافتن $X(j\omega)$ انجام دهید.)