# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

## درس ۹

# بازنمایی سری فوریه سیگنال‌های متناوب (۱)

# Fourier Series Representation of Periodic Signals (1)

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/sigsys

# طرح درس

## COURSE OUTLINE

| |
|---|
| نمایی‌های مختلط به‌عنوان توابع ویژه‌ی سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان |
| Complex Exponentials as Eigenfunctions of LTI Systems |
| بازنمایی سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب پیوسته–زمان |
| Fourier Series representation of CT periodic signals |
| چگونه می‌توانیم ضرایب فوریه را محاسبه کنیم؟ |
| How do we calculate the Fourier coefficients? |
| همگرایی و پدیده‌ی گیبس |
| Convergence and Gibbs’ Phenomenon |

# Portrait of Jean Baptiste Joseph Fourier

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

Signals & Systems, 2nd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997, p. 179.

# ۱

# نمایی‌های مختلط به‌عنوان توابع ویژه‌ی سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

## Desirable Characteristics of a Set of “Basic” Signals

a. We can represent large and useful classes of signals using these building blocks

b. The response of LTI systems to these basic signals is particularly simple, useful, and insightful

Previous focus: Unit samples and impulses

Focus now: Eigenfunctions of all LTI systems

# The eigenfunctions $\phi_k(t)$ and their properties

(Focus on CT systems now, but results apply to DT systems as well.)

$$\phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \underbrace{\lambda_k}_{\text{eigenvalue}} \; \underbrace{\phi_k(t)}_{\text{eigenfunction}}$$

Eigenfunction in $\rightarrow$ same function out with a “gain”

From the superposition property of LTI systems:

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = \sum_k \lambda_k a_k \phi_k(t)$$

Now the task of finding response of LTI systems is to determine $\lambda_k$.

## Complex Exponentials as the Eigenfunctions of any LTI Systems

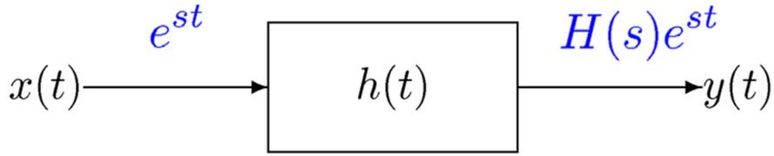
$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right] e^{st} \\ &= \underbrace{H(s)}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{e^{st}}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$

$$x[n] = z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}\right] z^{n} \\ &= \underbrace{H(z)}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{z^{n}}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$

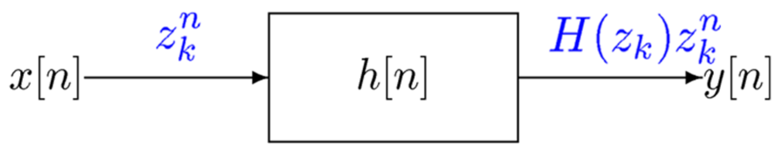
CT:




$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(s_k)a_k e^{s_k t}$$

DT:




$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k H(z_k)a_k z_k^n$$

## What kinds of signals can we represent as "sums" of complex exponentials?

For Now: Focus on restricted sets of complex exponentials

CT: $s = jw$ – purely imaginary,
i.e., signals of the form $e^{j\omega t}$

Magnitude 1

DT: $z = e^{jw}$,
i.e., signals of the form $e^{j\omega n}$

$$\Downarrow$$

CT & DT Fourier Series and Transforms

Periodic Signals

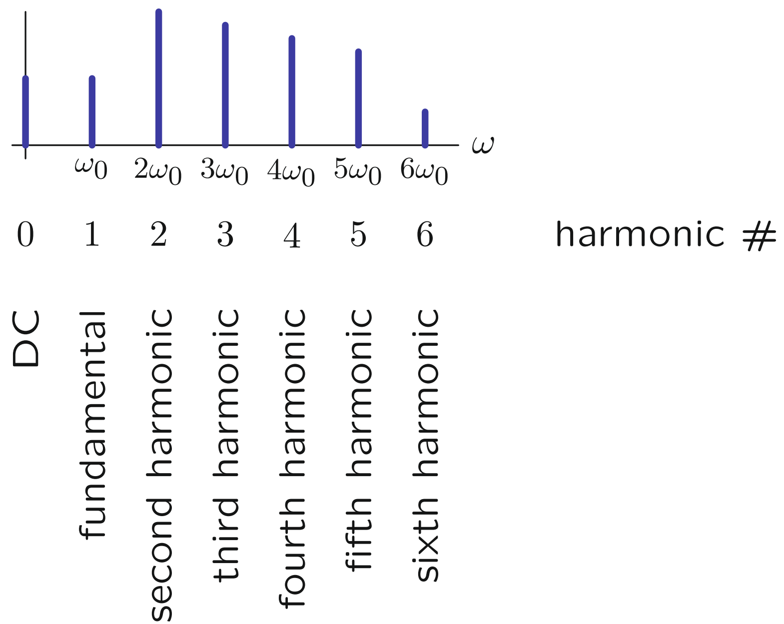
# ۲

# بازنمایی سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب پیوسته–زمان

# سری فوریه

## Fourier Series

**سری فوریه:** بازنمایی سیگنال‌ها با مؤلفه‌های هارمونیک آنها

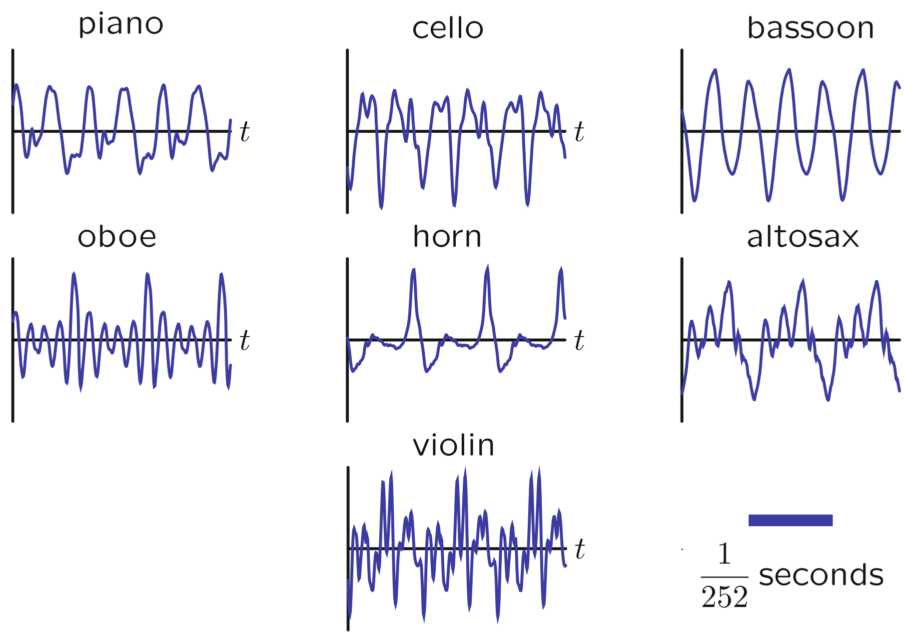


# سری فوریه

## مثال: آلات موسیقی

## Musical Instruments

محتوای هارمونیک یک روش طبیعی برای توصیف برخی از انواع سیگنال‌هاست.
مانند: آلات موسیقی

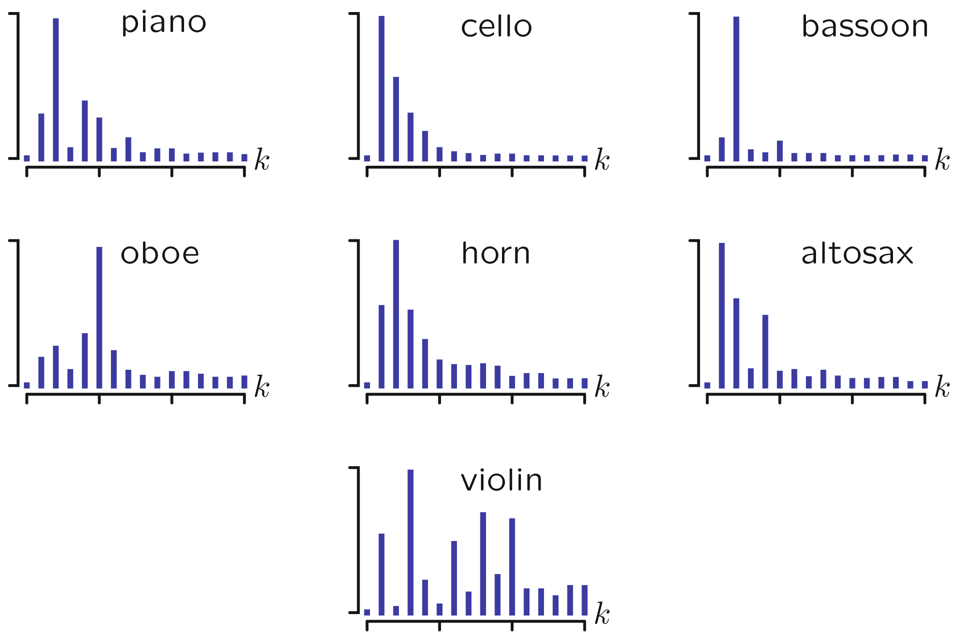


# سری فوریه

مثال: آلات موسیقی

## MUSICAL INSTRUMENTS

محتوای هارمونیک یک روش طبیعی برای توصیف برخی از انواع سیگنال‌هاست.
مانند: آلات موسیقی



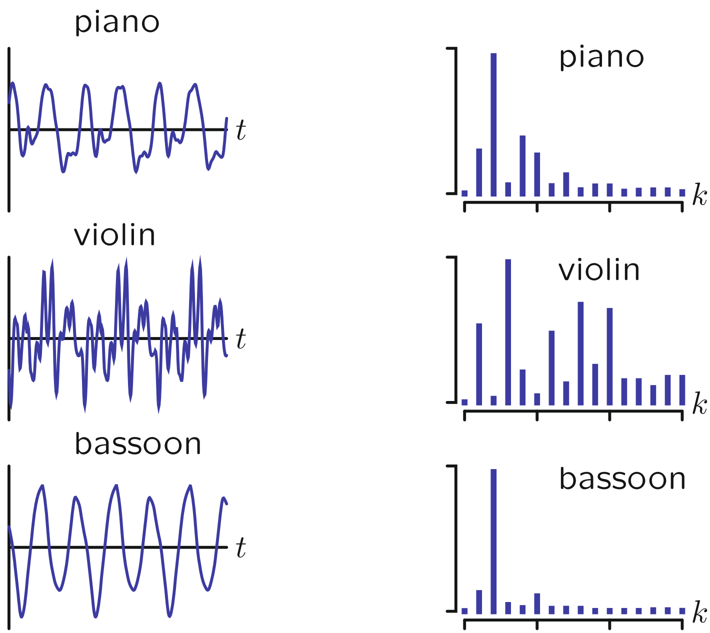
# سری فوریه

مثال: آلات موسیقی

MUSICAL INSTRUMENTS

محتوای هارمونیک یک روش طبیعی برای توصیف برخی از انواع سیگنال‌هاست.

مانند: آلات موسیقی

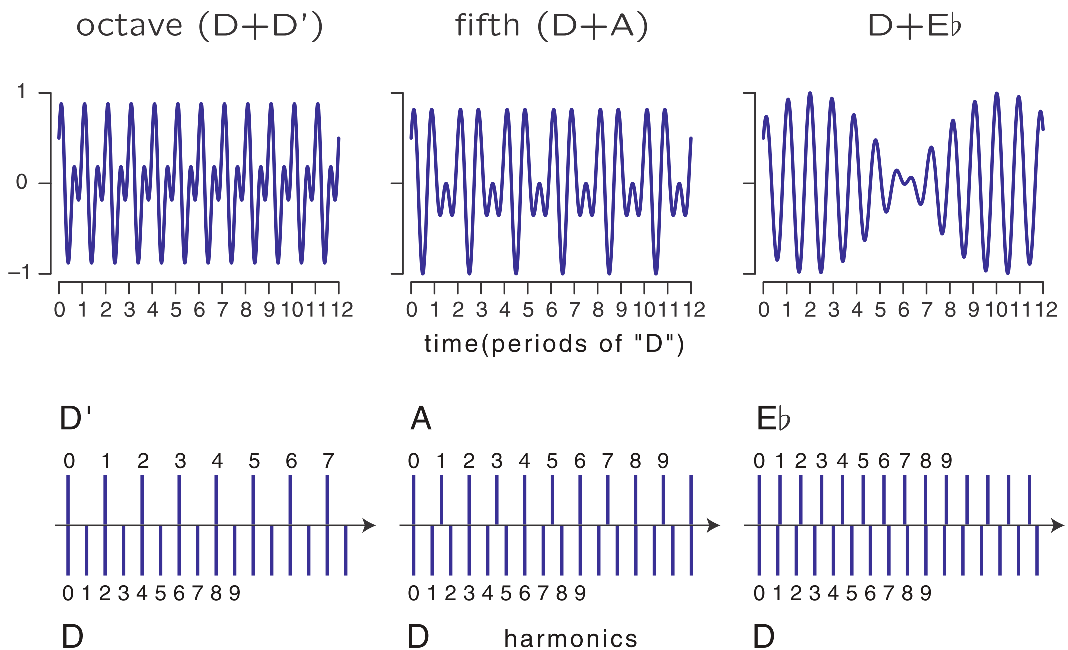


# سری فوریه

## هارمونیک‌ها

## HARMONICS

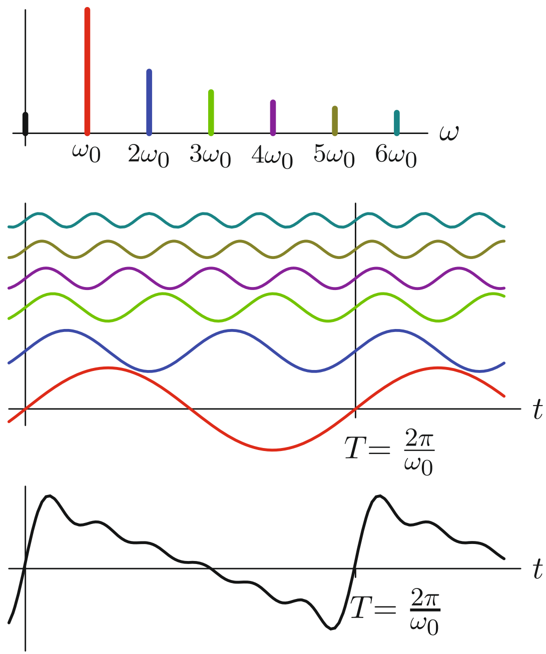
ساختار هارمونیک consonance (هم‌آوایی) و dissonance (ناهم‌آوایی) را مشخص می‌کند.



# بازنمایی هارمونیک

## Harmonic Representations

چه سیگنال‌هایی می‌توانند توسط مجموع مؤلفه‌های هارمونیک بازنمایی شوند؟

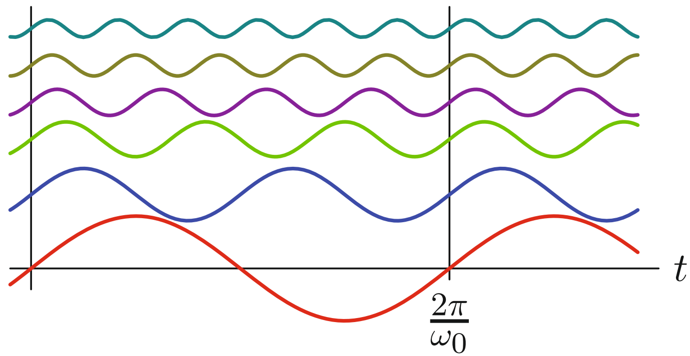


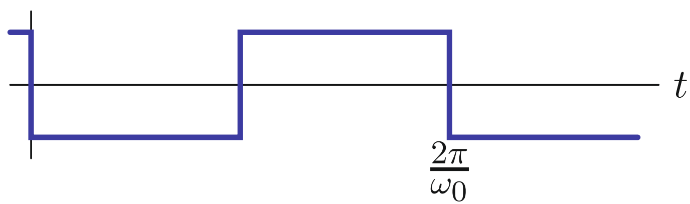

فقط سیگنال‌های متناوب: همه‌ی هارمونیک‌های $\omega_0$ متناوب هستند با دوره‌ی $T = 2\pi/\omega_0$

# بازنمایی هارمونیک

## Harmonic Representations

چه سیگنال‌هایی می‌توانند توسط مجموع مؤلفه‌های هارمونیک بازنمایی شوند؟




سیگنال‌های ناپیوسته را هم می‌توان به‌صورت مجموع سیگنال‌های پیوسته نوشت.

# بازنمایی هارمونیک

## خصوصیات هارمونیک‌ها

### HARMONIC REPRESENTATIONS

۱) ضرب دو هارمونیک، یک هارمونیک جدید با همان فرکانس پایه تولید می‌کند:

$$e^{jk\omega_0 t} \times \quad {}^{jl\omega_0 t} = e^{j(k+l)\omega_0 t}$$

۲) انتگرال یک هارمونیک بر روی هر بازه‌ی زمانی به طول دوره‌ی تناوب صفر است،
مگر اینکه هارمونیک در مؤلفه‌ی DC باشد.

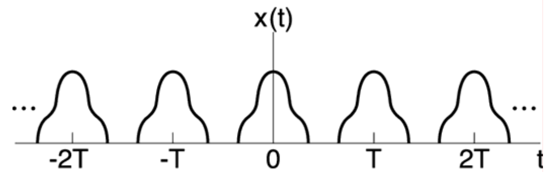
$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t} dt = \int_T e^{jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ T, & k = 0 \end{cases}$$

$$= T\delta[k]$$

# Fourier Series Representation of CT Periodic Signals

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{for all } t$$

- smallest such $T$ is the *fundamental period*
- $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ is the *fundamental frequency*




$$e^{j\omega t} \text{ periodic with period } T \Leftrightarrow \omega = k\omega_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

- periodic with period $T$
- $\{a_k\}$ are the *Fourier (series) coefficients*
- $k = 0$ DC
- $k = \pm 1$ first harmonic
- $k = \pm 2$ second harmonic

# ۳

# چگونه می‌توانیم ضرایب فوریه را محاسبه کنیم؟

**Question #1**: How do we find the Fourier coefficients?

First, for simple periodic signals consisting of a few sinusoidal terms

$$\text{Ex: } x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$$

Euler's relation (memorize!)

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \text{ – no dc component} \\
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_{-1} &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{j} \\
a_{-2} &= -\frac{1}{j} \\
a_3 &= 0 \\
a_{-3} &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- For *real* periodic signals, there are two other commonly used forms for CT Fourier series:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t]$$

or

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)]$$

- Because of the eigenfunction property of $e^{j\omega t}$, we will usually use the complex exponential form in 6.003.

  - A consequence of this is that we need to include terms for *both* positive and negative frequencies:

$$e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} \text{Remember} \cos(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) \\ \text{and} \sin(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2j}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \end{aligned}$$

## Now, the complete answer to Question #1

(Given $x(t)$, how find $a_k$?)

Suppose

1) multiply by $e^{-jn\omega_0 t}$
2) integrate over one period

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

1) multiply by $e^{-jn\omega_0 t}$
2) integrate over one period

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_T \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum^{\infty} a_k \left( \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right)\end{aligned}$$

(Here $\int_T$ denotes integral over *any* interval of length $T$ (one period).)

Next, note that

$$\begin{aligned}\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \\ &= T\delta[k-n] \quad \text{Orthogonality}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

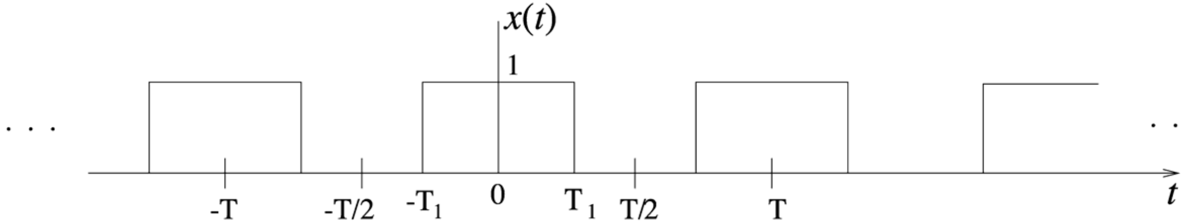
$$\Downarrow$$

CT Fourier Series Pair $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{(Synthesis equation)}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{(Analysis equation)}$$

# Ex: Periodic Square Wave



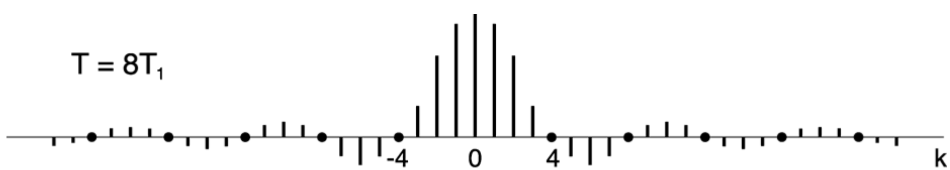

For $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2T_1}{T}$$

DC component is just the average

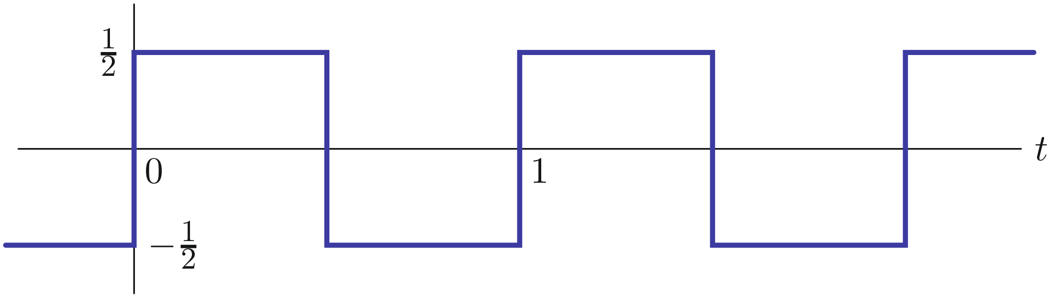
For $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$



# سری فوریه

مثال: پالس مربعی متقارن




$$a_k = \int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-j2\pi kt} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi kt} dt$$

$$= \frac{1}{j4\pi k}\left(2 - e^{j\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{j\pi k} \;; & \text{if } k \text{ is odd} \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

# سری فوریه

## خاصیت مشتق‌گیری

اگر از یک سیگنال بر حسب زمان مشتق بگیریم،
ضرایب سری فوریه‌ی آن در $j\frac{2\pi}{T}k$ ضرب می‌شود.

Proof: Let

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

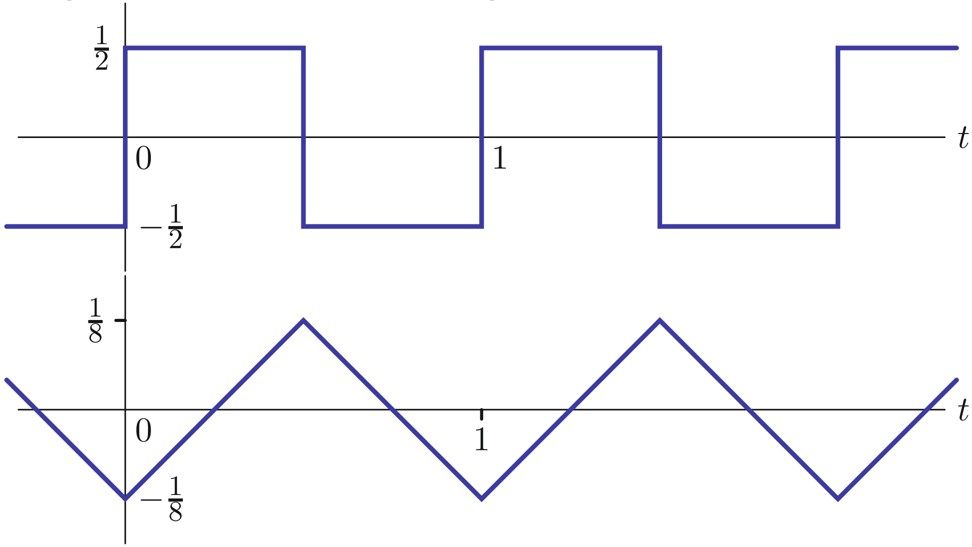
then

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(j\frac{2\pi}{T}k\,a_k\right) e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

# سری فوریه

## خاصیت مشتق‌گیری : مثال

The triangle waveform is the integral of the square wave.




Therefore the Fourier coefficients of the triangle waveform are $\frac{1}{j2\pi k}$ times those of the square wave.

$$b_k = \frac{1}{jk\pi} \times \frac{1}{j2\pi k} = \frac{-1}{2k^2\pi^2} \; ; \; k \text{ odd}$$

بازنمایی سری فوریه سیگنال‌های متناوب (۱)

# ۴

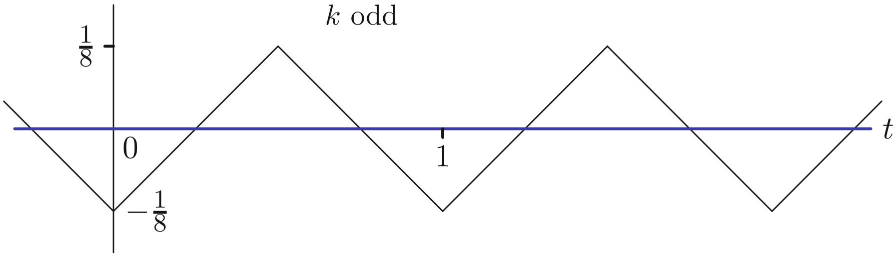
# همگرایی سری فوریه و پدیده‌ی گیبس

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-0 \\ k \text{ odd}}}^{0} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



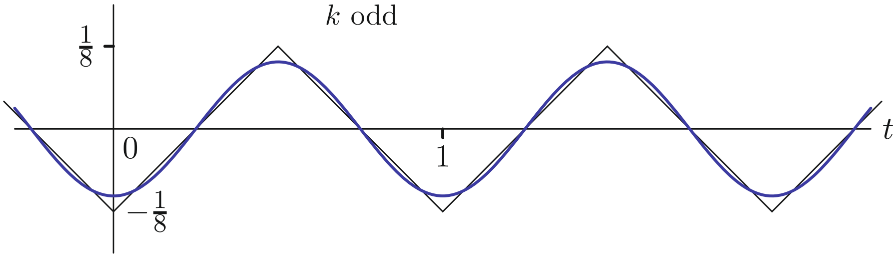

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-1 \\ k \text{ odd}}}^{1} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi k t}$$



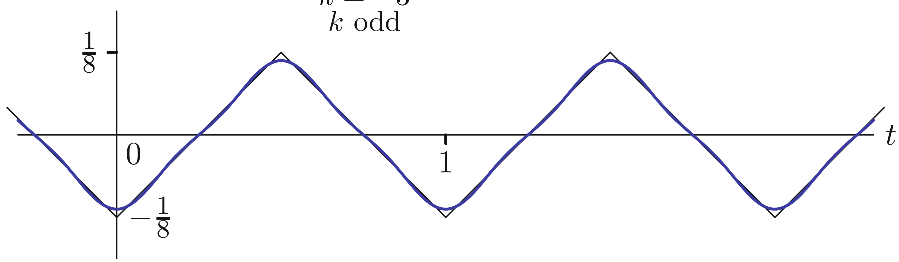

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-3 \\ k \text{ odd}}}^{3} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi k t}$$



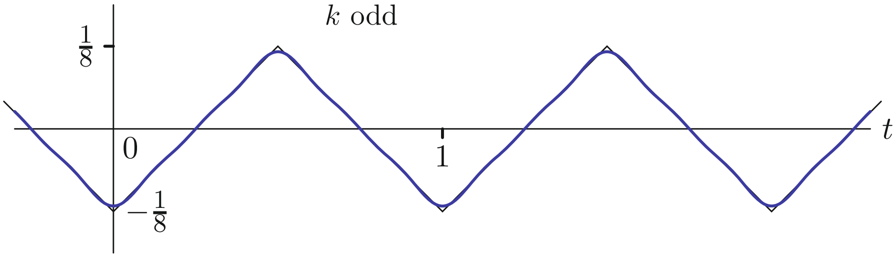

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-5 \\ k \text{ odd}}}^{5} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



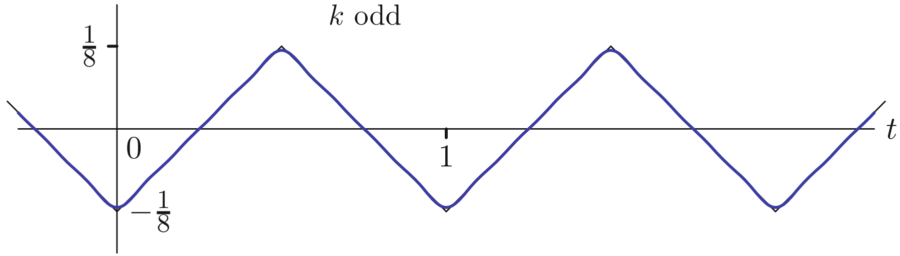

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-7 \\ k \text{ odd}}}^{7} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi k t}$$



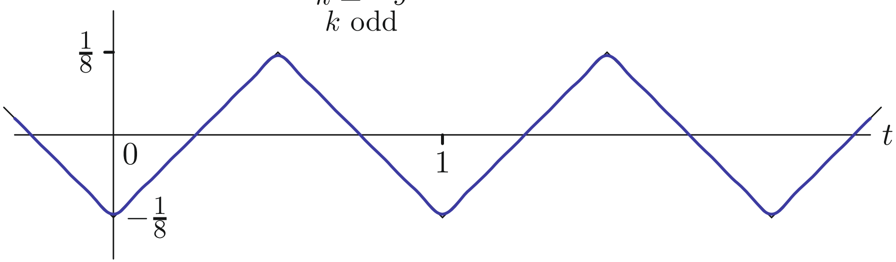

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-9 \\ k \text{ odd}}}^{9} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



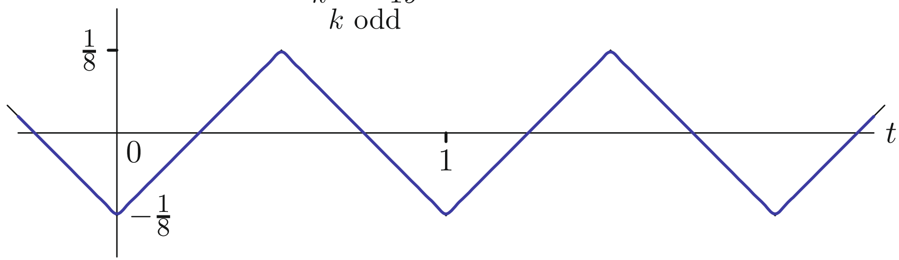

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-19 \\ k \text{ odd}}}^{19} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



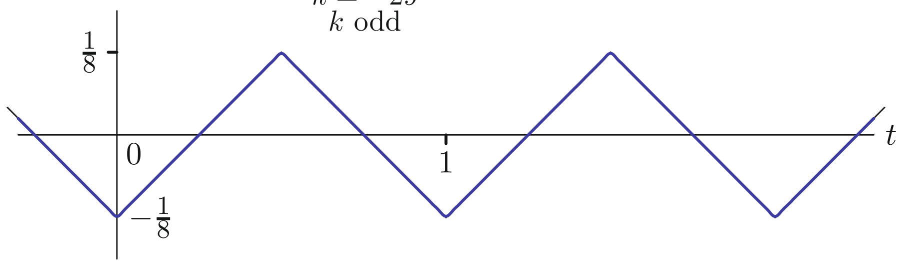

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-29 \\ k \text{ odd}}}^{29} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



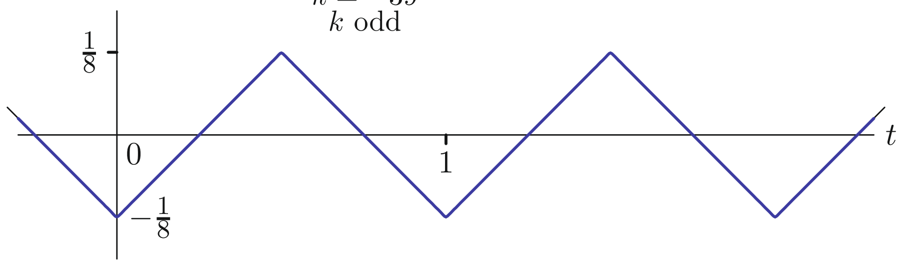

موج مثلثی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-39 \\ k \text{ odd}}}^{39} \frac{-1}{2k^2\pi^2} e^{j2\pi kt}$$



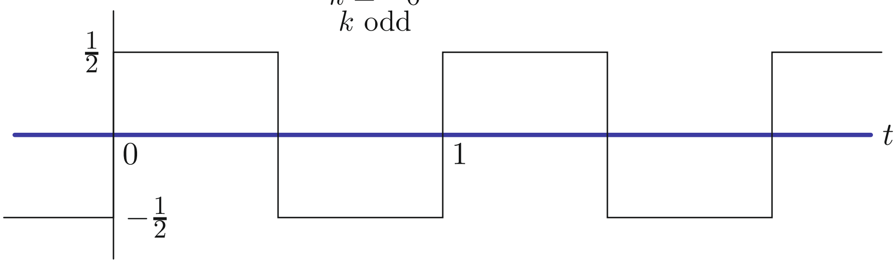

بازنمایی‌های سری فوریه‌ی توابع دارای شیب‌های ناپیوسته،
به سمت توابعی با شیب‌های ناپیوسته همگرا می‌شود.

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-0 \\ k \text{ odd}}}^{0} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



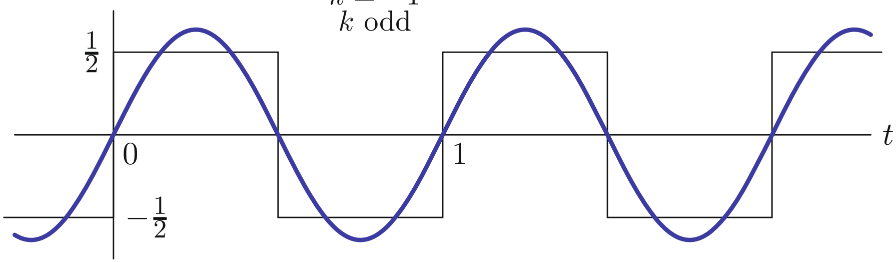

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-1 \\ k \text{ odd}}}^{1} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



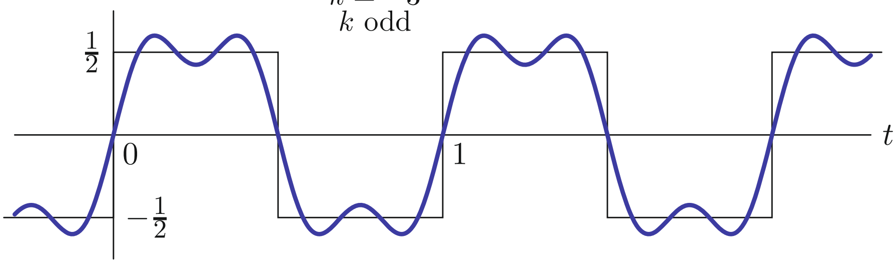

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-3 \\ k \text{ odd}}}^{3} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



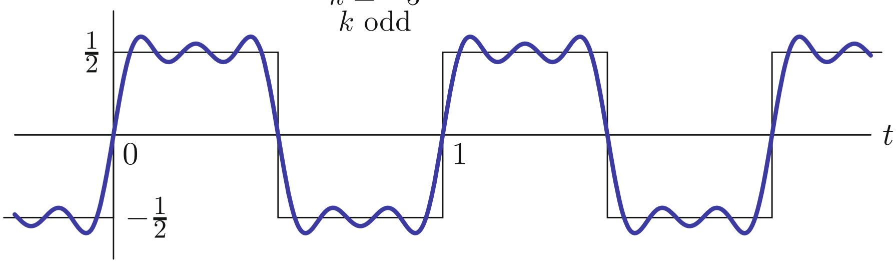

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-5 \\ k \text{ odd}}}^{5} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



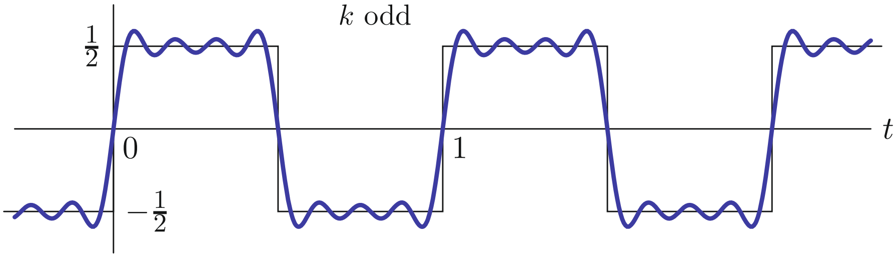

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-7 \\ k \text{ odd}}}^{7} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



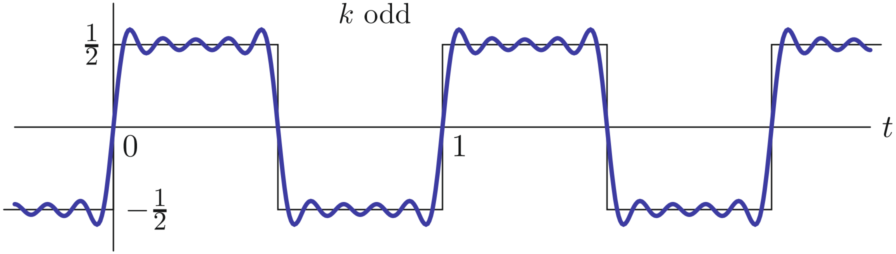

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-9 \\ k \text{ odd}}}^{9} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$

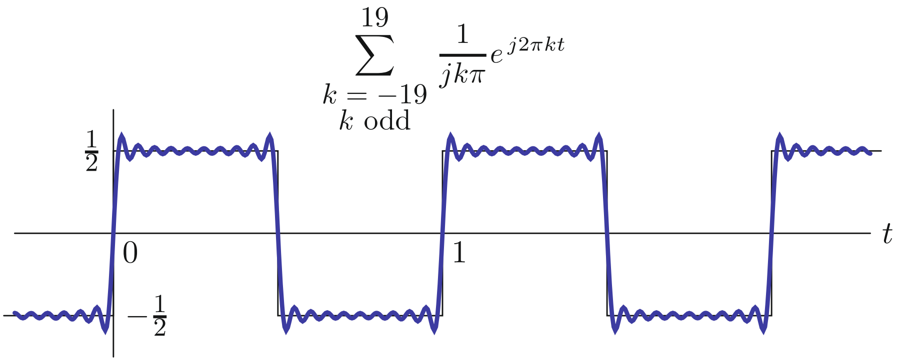



موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:



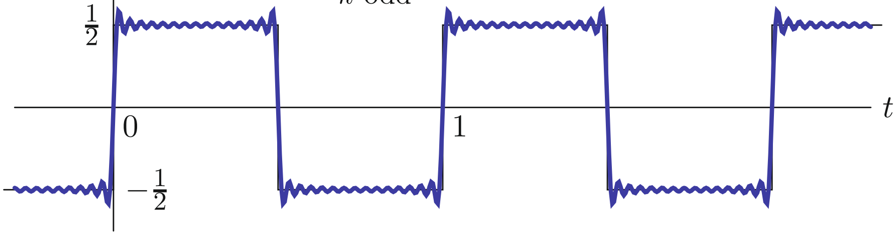

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-29\\ k\ \text{odd}}}^{29} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



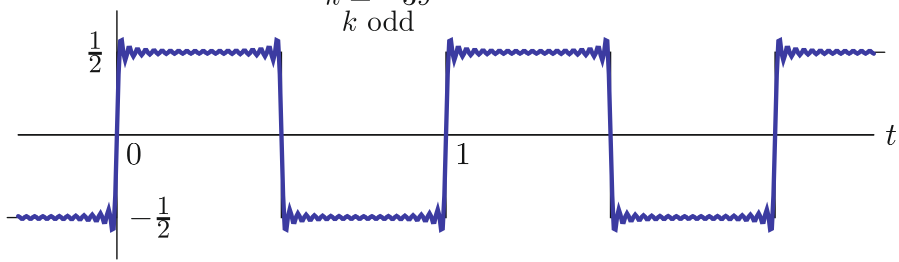

موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

همگرایی سری فوریه را می‌توانیم افزودن گام به گام جملات مشاهده کنیم:

$$\sum_{\substack{k=-39\\ k \text{ odd}}}^{39} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$

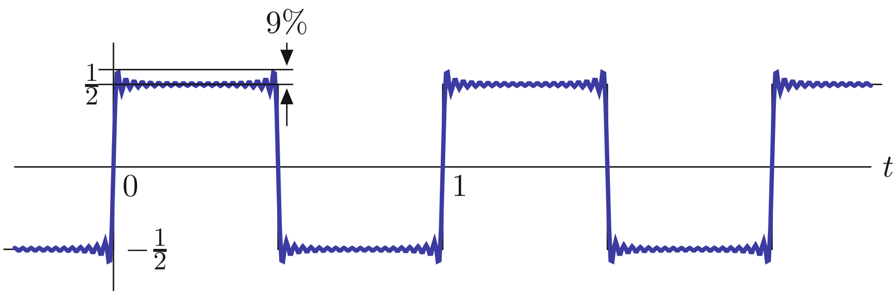



موج مربعی

# سری فوریه

## همگرایی

مجموع‌های جزئی سری فوریه‌ی توابع ناپیوسته، در نزدیکی ناپیوستگی تموج دارند (**پدیده‌ی گیبس**)




علت این تموج این است که اندازه‌ی ضرایب سری فوریه‌ی موج مربعی با ضریب $1/k$ کاهش می‌یابد (در حالی که این ضرایب برای موج مثلثی با ضریب $1/k^2$ کاهش می‌یافتند)

با کاهش اندازه‌ی ضرایب فوریه در فرکانس‌های بالا می‌توان تموج را کم کرد (یا حتی از بین برد).

## Convergence of CT Fourier Series

- How can the Fourier series for the square wave possibly make sense?
- The key is: What do we *mean* by

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad ?$$

- One useful notion for engineers: there is no *energy* in the difference

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

)just need *x*)*t*(odiper rpe yenerg efinit ehav ot (

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

## Under a different, but reasonable set of conditions (the Dirichlet conditions)

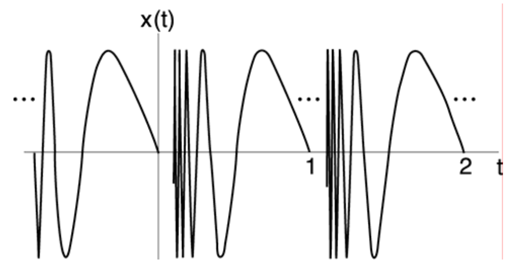
**Condition 1.** $x(t)$ is *absolutely integrable* over one period, i. e.

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

And

**Condition 2.** In a finite time interval, $x(t)$ has a *finite* number of maxima and minima.

**Ex.** An example that violates Condition 2.




$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1$$

And

**Condition 3.** In a finite time interval, $x(t)$ has only a *finite* number of discontinuities.

**Ex.** An example that violates Condition 3.

- Dirichlet conditions are met for the signals we will encounter in the real world. Then

  - The Fourier series = $x(t)$ at points where $x(t)$ is continuous

  - The Fourier series = "midpoint" at points of discontinuity

- Still, convergence has some interesting characteristics:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

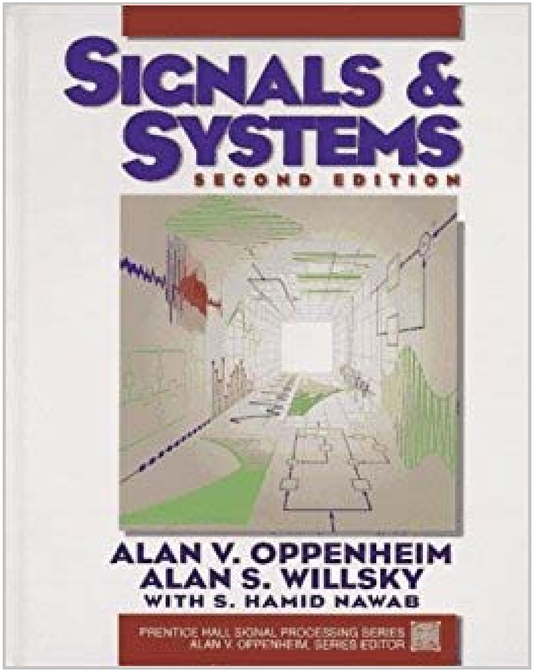
  - As $N \to \infty$, $x_N(t)$ exhibits *Gibbs*' phenomenon at points of discontinuity

**Demo:** Fourier Series for CT square wave (Gibbs phenomenon).

# ۵

# منابع

# منبع اصلی




A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,
**Signals and Systems**,
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

**Chapter 3**