

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

درس ۸

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

Linear Time-Invariant (LTI) Systems (4)

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/sigsys>

طرح درس

COURSE OUTLINE

سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

Systems Described with Linear Constant-Coefficient Differential Equations

تعریف عملیاتی سیگنال ضربه: ضربه‌ی واحد به عنوان پالس ایده‌آل «به اندازه‌ی کافی کوتاه»

The unit impulse as an idealized pulse that is “short enough”: The operational definition of $\delta(t)$

توابع ویژه

Special Functions

کاربردهای کانوولوشن

Applications of Convolution

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

۱

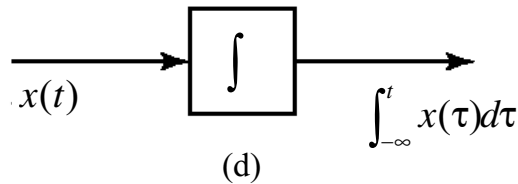
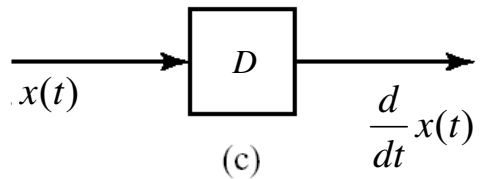
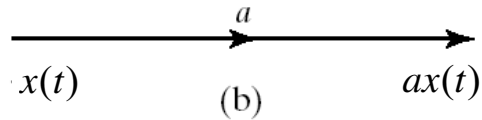
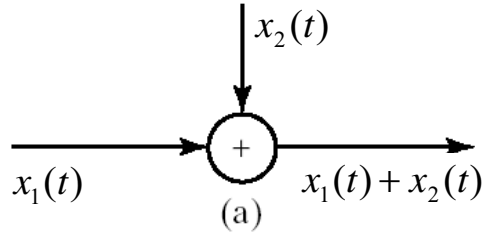
سیستم‌های
توصیف شده
با معادلات
دیفرانسیل
خطی با
ضرایب ثابت

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

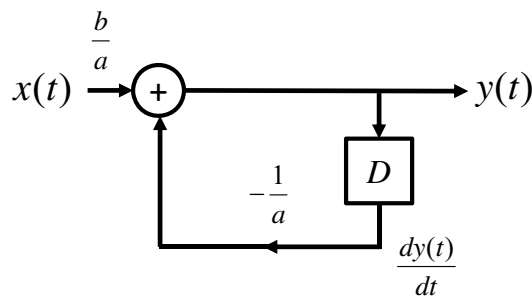
بازنمایی با دیاگرام بلوکی



سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با دیاگرام بلوکی: مثال (معادله‌ی مرتبه اول: با مشتق‌گیر)

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

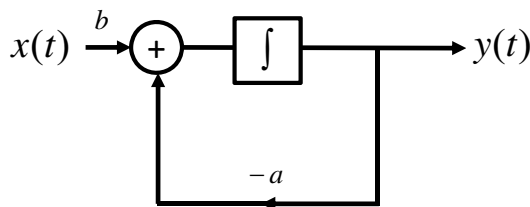


$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t)$$

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با دیاگرام بلوکی: مثال (معادله‌ی مرتبه اول: با انتگرال‌گیر)

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$



$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

مثال

$$\frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) = 0 \qquad y(t) = Ae^{a_1 t}$$

آیا این سیستم پایدار است؟ به ضریب ثابت بستگی دارد:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = Ae^{-2t} \qquad x(t) = K \cos(\omega_0 t) u(t) \rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cos(\omega_0 - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0}{2} \right)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{شرط کمکی:}$$

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} [\cos(\omega_0 - \theta) - e^{-2t} \cos(\theta)] u(t)$$

پاسخ به شرایط اولیه

پاسخ به ورودی

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

سیستم در صورتی **خطی** خواهد بود که $y(0) = 0$ باشد.

شرط **علّی** بودن سیستم، سکون اولیه است.

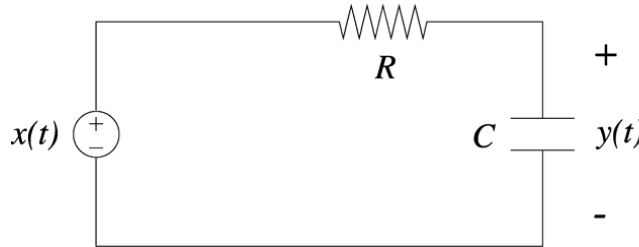
$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ x_2(t) &= u(t+1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1(t) &= 0 \\ y_2(t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2 \right) e^{-2(t+1)} \end{aligned}$$

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

۲

تعریف عملیاتی سیگنال ضربه

The impulse as an idealized “short” pulse



$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

Consider response from initial rest to pulses of different shapes and durations, but with unit area. As the duration decreases, the responses become similar for different pulse shapes.

The Operational Definition of the Unit Impulse $\delta(t)$

$\delta(t)$ — idealization of a unit-area pulse that is so short that, for any physical systems of interest to us, the system responds only to the area of the pulse and is insensitive to its duration

Operationally: The unit impulse is the signal which when applied to any LTI system results in an output equal to the impulse response of the system. That is,

$$\delta(t) * h(t) = h(t) \quad \text{for all } h(t)$$

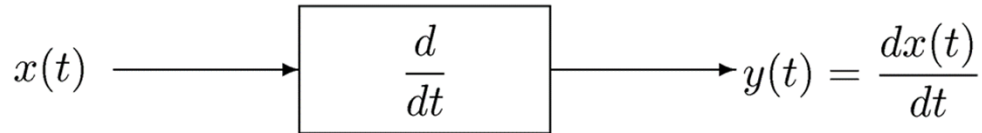
— $\delta(t)$ is defined by what it does under convolution.

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

۳

توابع ویژه

The Unit Doublet — Differentiator



Impulse response = unit doublet

$$u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

The operational definition of the unit doublet:

$$x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Triplets and beyond!

$$n > 0$$

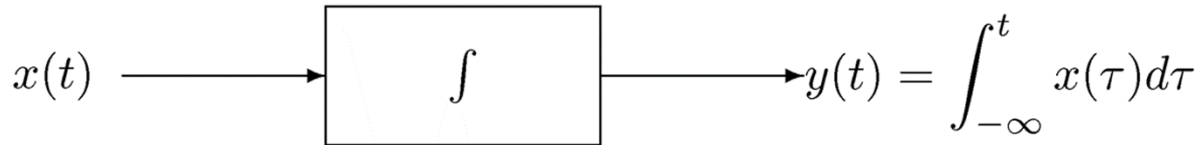
$$u_n(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{n \text{ times}}$$

n is number of
differentiations

Operational definitions

$$x(t) * u_n(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (n > 0)$$

Integrators



Impulse response: $u_{-1}(t) \equiv u(t)$

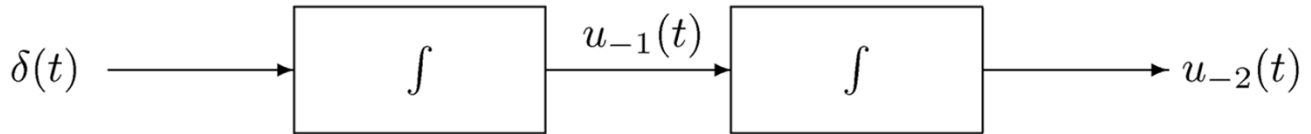
“-1 [↑]derivatives” = integral $\Rightarrow$ I.R. = unit step

Operational definition: $x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Cascade of n integrators:

$$u_{-n}(t) = \underbrace{u_{-1}(t) * \cdots * u_{-1}(t)}_{n \text{ times}} \quad (n > 0)$$

Integrators (continued)



$$\begin{aligned} u_{-2}(t) &= \int_{-\infty}^t u_{-1}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \\ &= t \cdot u(t) \quad \text{the unit ramp} \end{aligned}$$

More generally, for $n > 0$

$$u_{-n}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$$

Notation

Define $u_0(t) = \delta(t)$

Then $u_n(t) * u_m(t) = u_{n+m}(t)$

n and m can be $\pm$.

E.g. $u_1(t) * u_{-1}(t) = u_0(t)$

$\Downarrow$

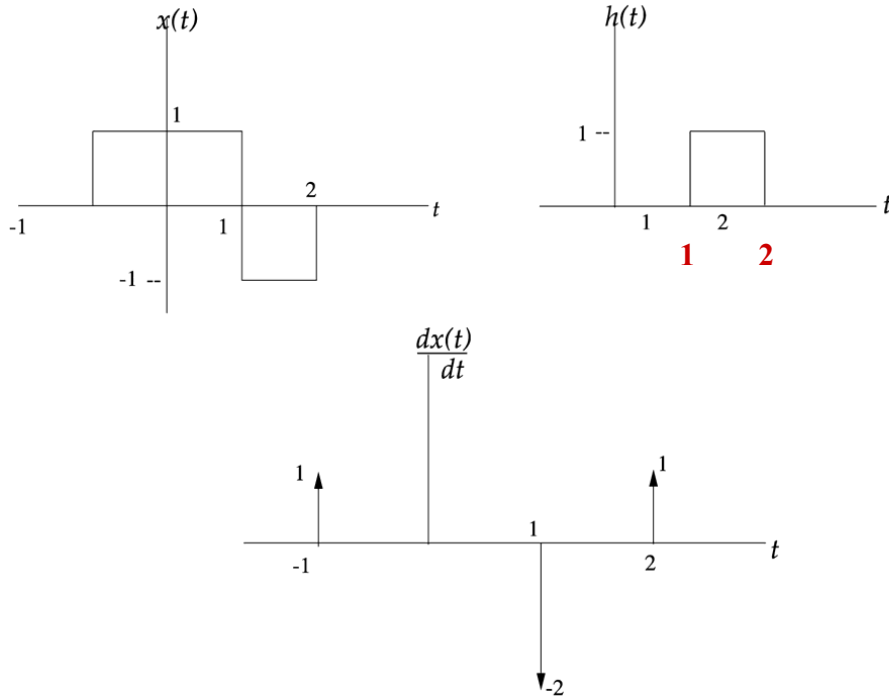
$$\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) = \delta(t)$$

Sometimes Useful Tricks

$$\begin{aligned}x(t) * h(t) &= x(t) * \delta(t) * h(t) \\&= x(t) * u_1(t) * u_{-1}(t) * h(t) \\&= \{[x(t) * u_1(t)] * h(t)\} * u_{-1}(t)\end{aligned}$$

Differentiate first, then convolve, then integrate

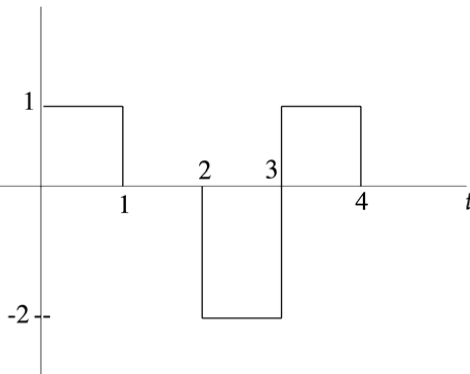
Example



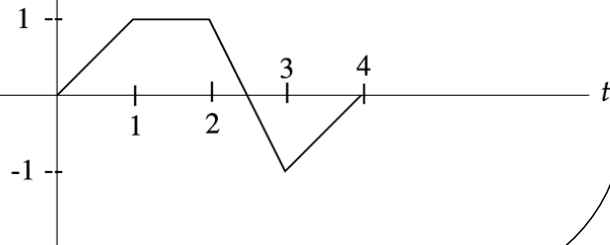
$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t + 1) - 2\delta(t - 1) + \delta(t - 2)$$

Example (continued)

$$\frac{dx(t)}{dt} * h(t) = h(t+1) - 2h(t-1) + h(t-2)$$



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{dx(\tau)}{d\tau} * h(\tau) \right] d\tau$$



سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

۴

کاربردهای
کانوولوشن

کاربردهای کانولوشن

APPLICATIONS OF CONVOLUTION

کانولوشن یک ابزار مفهومی مهم است:
که روش جدیدی را برای **تفکر** درباره‌ی رفتار سیستم‌ها فراهم می‌کند.

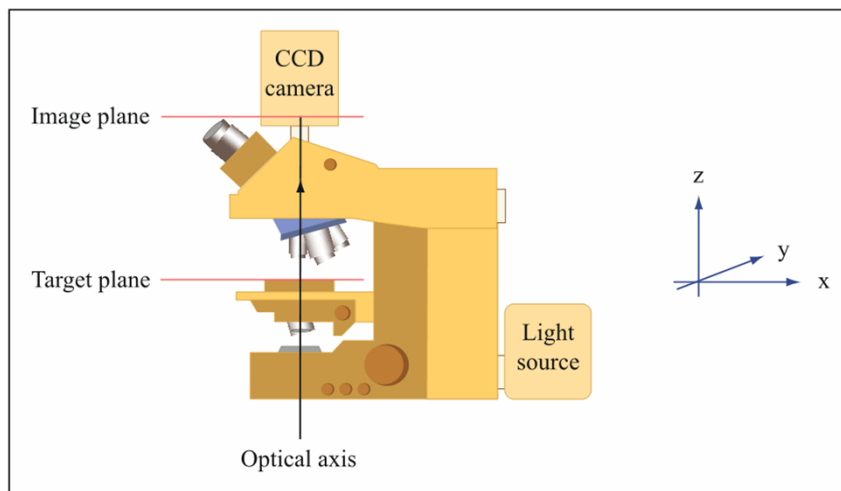
مثال:

میکروسکوپ‌ها و تلسکوپ‌ها

کاربردهای کانونولوشن

میکروسکوپ

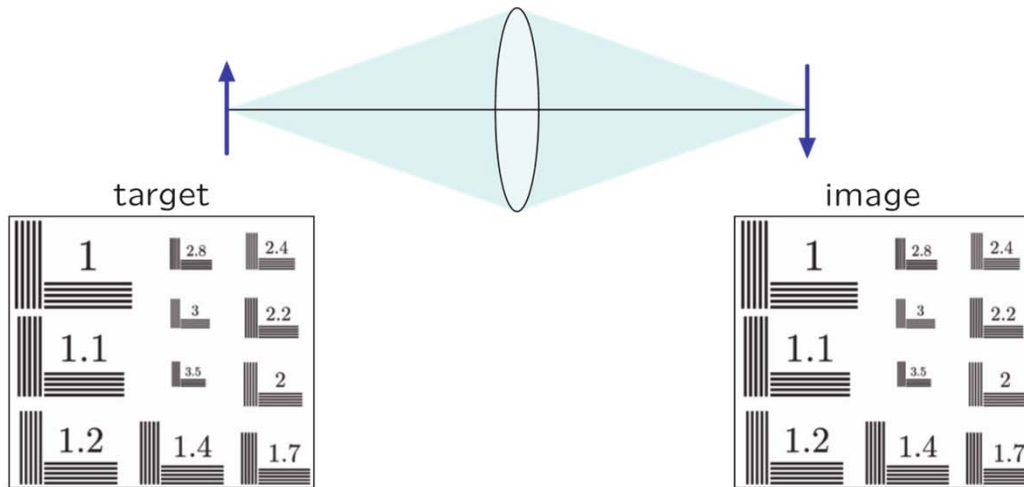
تصاویر دریافتی حتی از بهترین میکروسکوپ‌ها، مات (blurred) است.



کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

یک عدسی (لنز) بی نقص، یک موج کروی از نور شیء هدف را به یک موج کروی تبدیل می‌کند که به تصویر همگرا می‌شود.

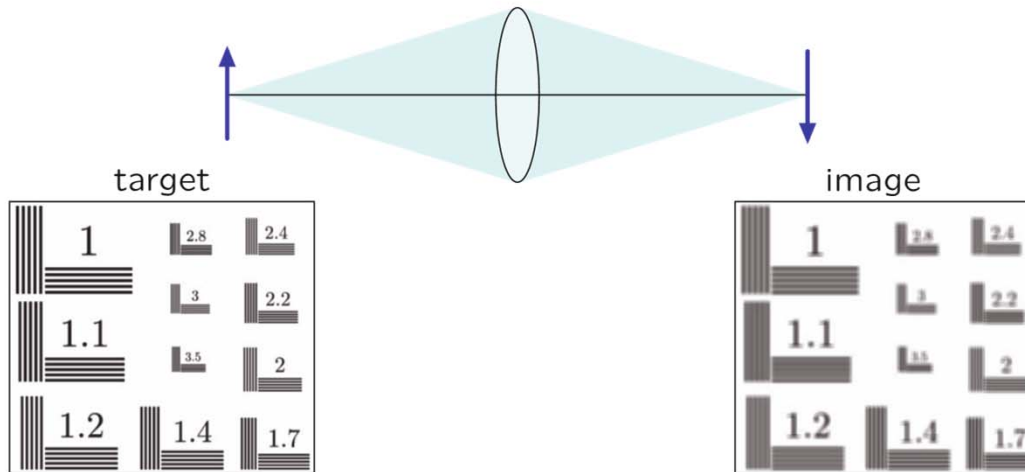


میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

یک عدسی (لنز) بی نقص، یک موج کروی از نور شیء هدف را به یک موج کروی تبدیل می‌کند که به تصویر همگرا می‌شود.

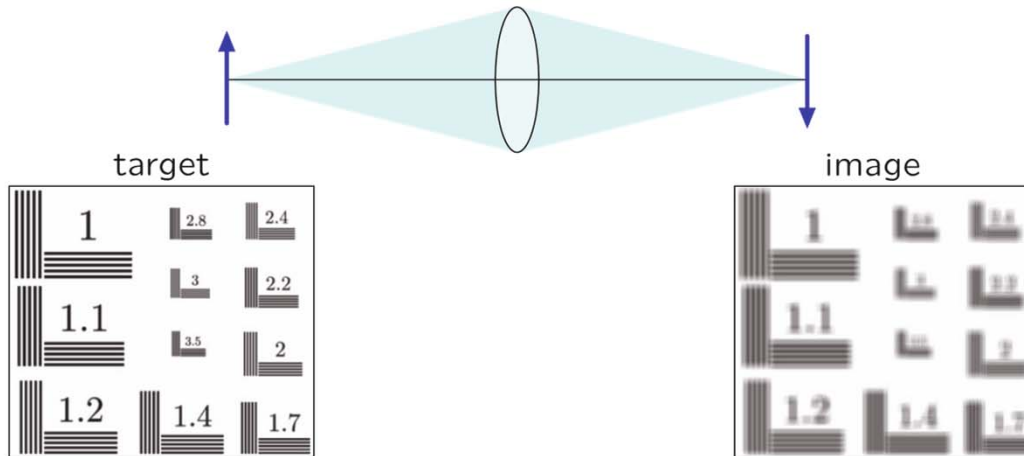


میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

یک عدسی (لنز) بی نقص، یک موج کروی از نور شیء هدف را به یک موج کروی تبدیل می‌کند که به تصویر همگرا می‌شود.

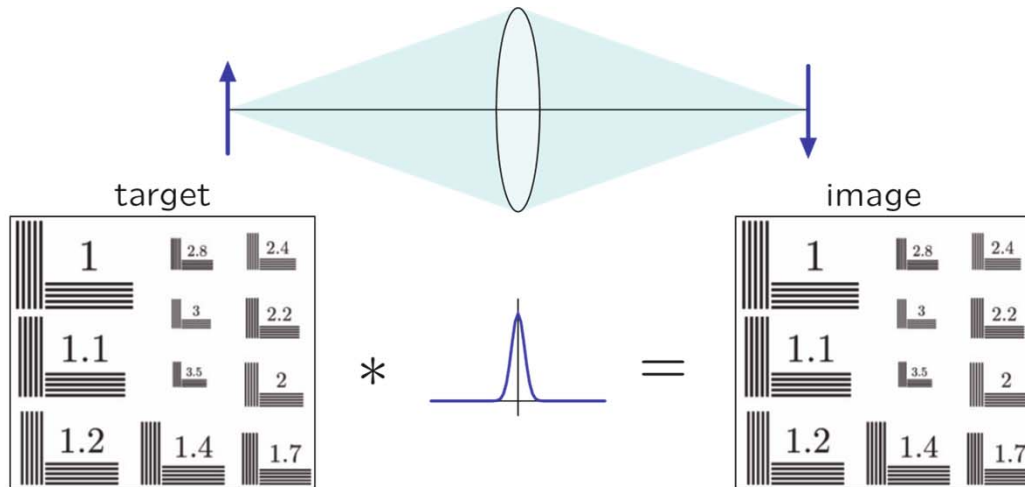


میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

مات‌شدگی (blurring) می‌تواند به وسیله‌ی کانوالو تصویر با «تابع-پخش-نقطه» اپتیکی بازنمایی شود (پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی).

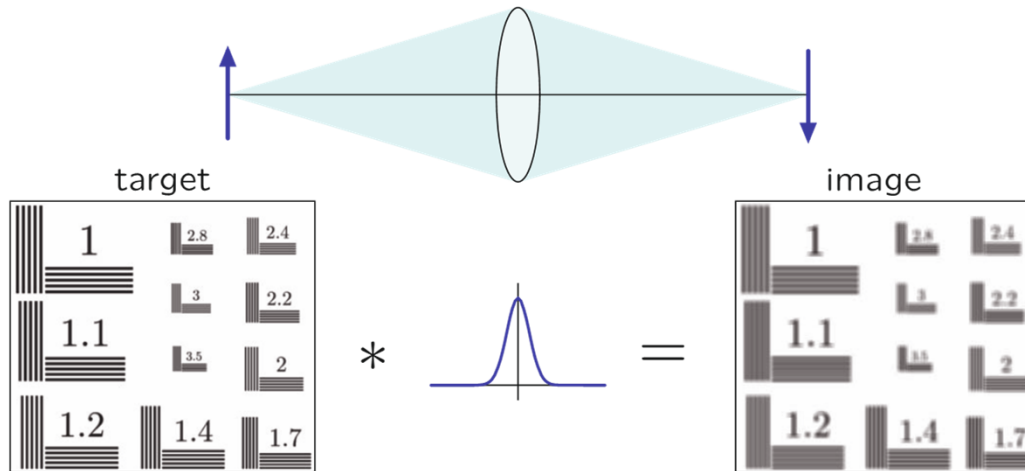


میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

مات‌شدگی (blurring) می‌تواند به وسیله‌ی کانوالو تصویر با «تابع-پخش-نقطه» اپتیکی بازنمایی شود (پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی).

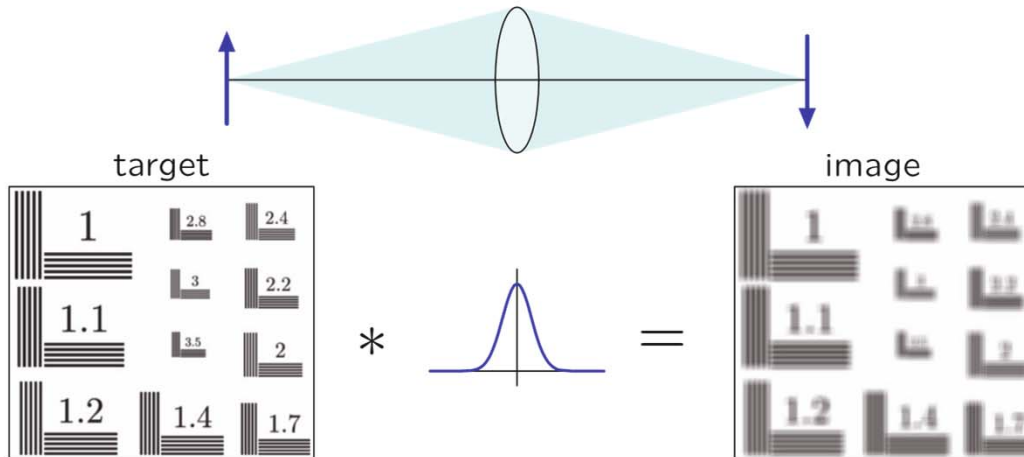


میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

مات‌شدگی (blurring) می‌تواند به وسیله‌ی کانوالو تصویر با «تابع-پخش-نقطه» اپتیکی بازنمایی شود (پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی).



میزان مات‌شدگی (blurring) با قطر عدسی رابطه‌ی معکوس دارد.

کاربردهای کانونولوشن

میکروسکوپ

اندازه‌گیری «پاسخ ضربه»ی یک میکروسکوپ:
 قطر تصویر ≈ 6 برابر قطر شیء هدف: $\text{target} \rightarrow \text{impulse}$

$0.09 \mu\text{m}$ bead

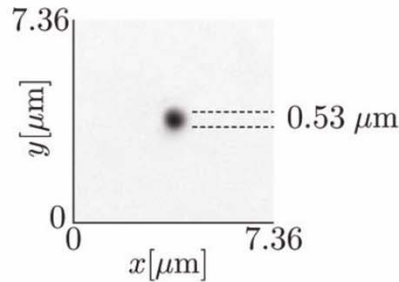
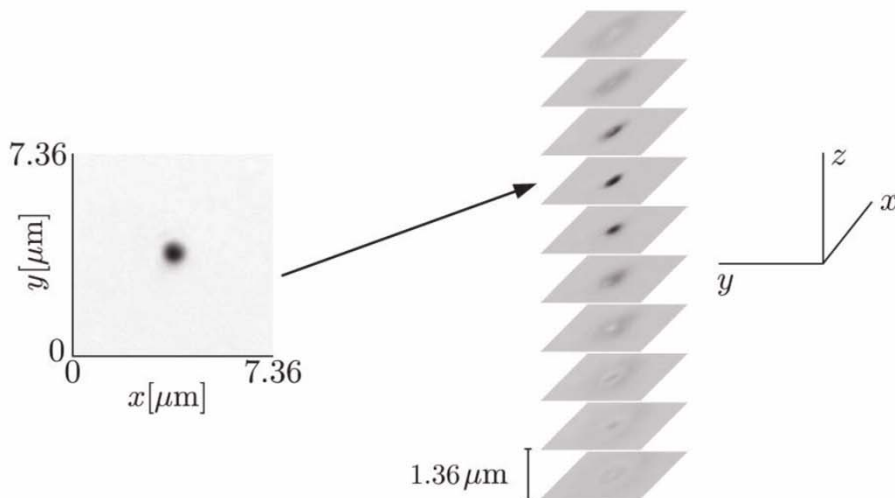



image of a $0.09 \mu\text{m}$ bead

کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

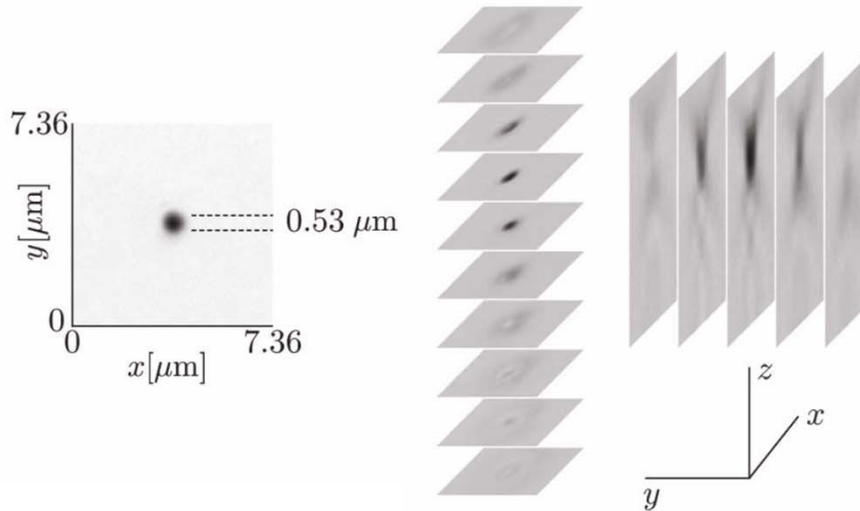
تصاویر در صفحه‌های کانونی مختلف می‌توانند ترکیب شوند تا پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی (تابع پخش-نقطه) تشکیل شود.



کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

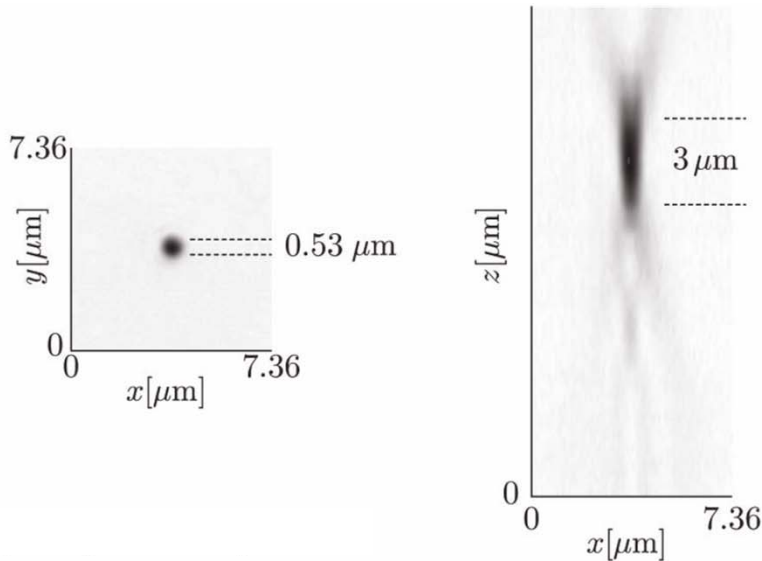
مات‌شدگی (blurring) در امتداد محور اپتیکی
به وسیله‌ی نمونه‌برداری مجدد از پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی بهتر قابل نمایش است.



کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

مات‌شدگی (blurring) در امتداد محور اپتیکی
نسبت به خط تقاطع محور اپتیکی بسیار بزرگ‌تر است.



کاربردهای کانولوشن

میکروسکوپ

تابع پخش-نقطه اپتیکی (پاسخ ضربه‌ی سه‌بعدی) یک راه مفید برای مشخص‌سازی یک میکروسکوپ است.

این تابع سنجه‌ی مستقیمی برای مات‌شدگی است،
که برای دانش اپتیک معیار مهمی است.

کاربردهای کانون‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

Hubble Space Telescope (1990-)

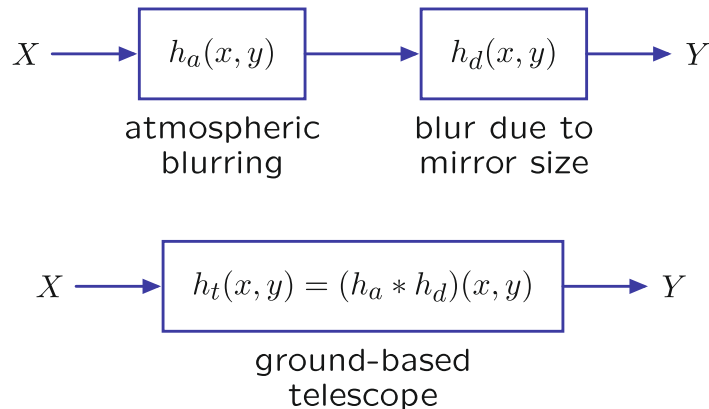


<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانولوشن

تلسکوپ فضایی هابل

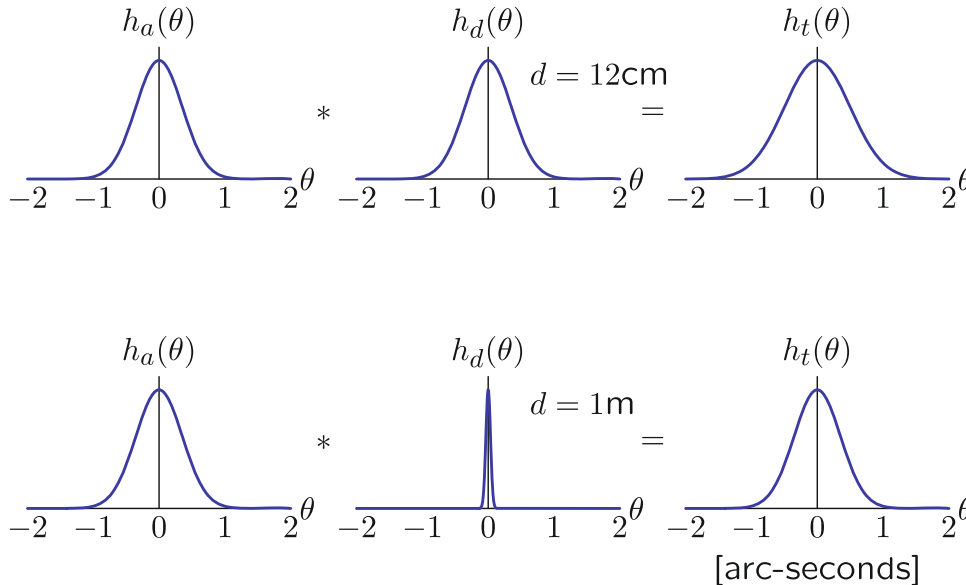
Telescope images are blurred by the telescope lenses AND by atmospheric turbulence.



کاربردهای کانولوشن

تلسکوپ فضایی هابل

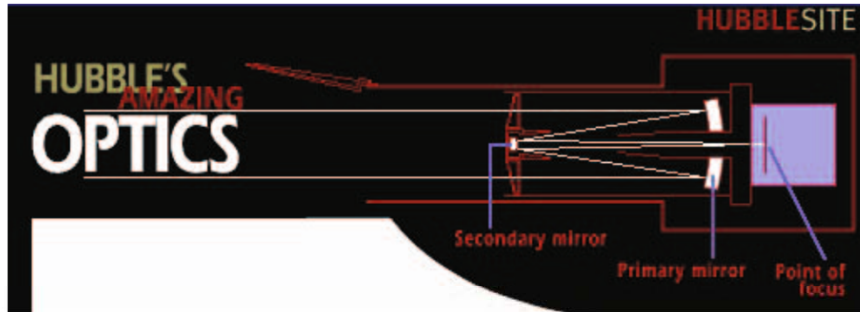
Telescope blur can be represented by the convolution of blur due to atmospheric turbulence and blur due to mirror size.



کاربردهای کانونی‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

The main optical components of the Hubble Space Telescope are two mirrors.



<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانون‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

The diameter of the primary mirror is 2.4 meters.

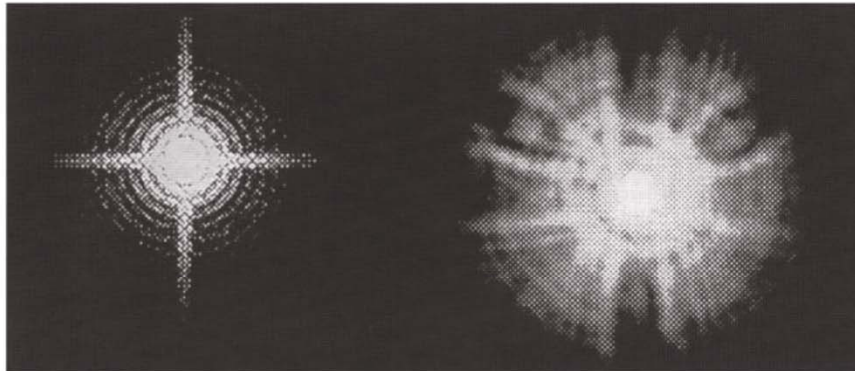


<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانولوشن

تلسکوپ فضایی هابل

Hubble's first pictures of distant stars (May 20, 1990) were more blurred than expected.



expected
point-spread
function

early Hubble
image of
distant star

<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانونولوشن

تلسکوپ فضایی هابل

The parabolic mirror was ground 4 μm too flat!

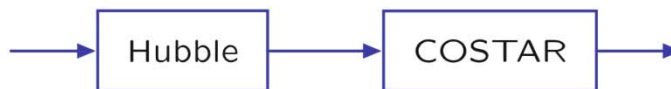
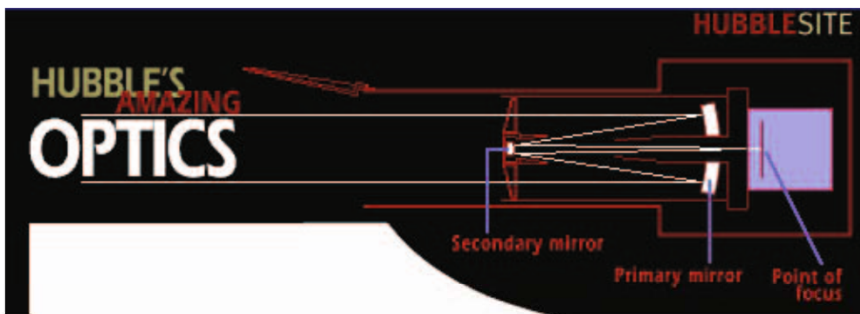


<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانون‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

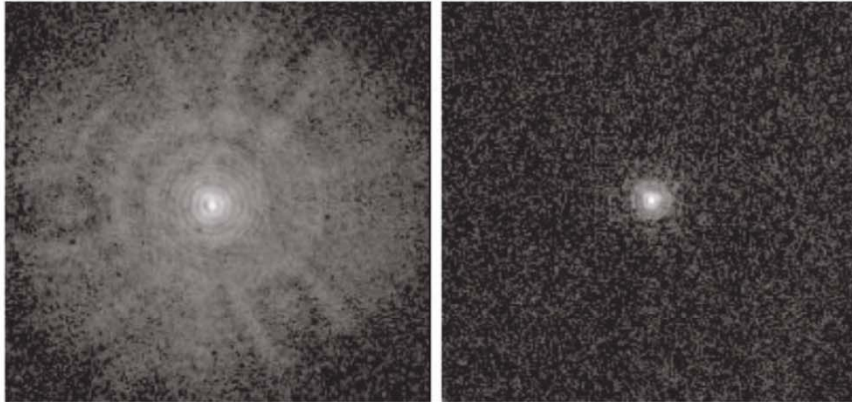
Corrective Optics Space Telescope Axial Replacement (COSTAR):
eyeglasses for Hubble!



کاربردهای کانون‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

Hubble images before and after COSTAR.



before

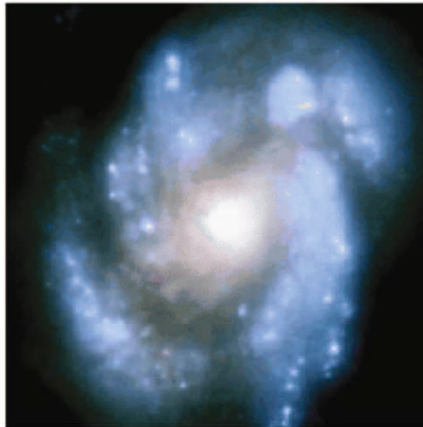
after

<http://hubblesite.org>

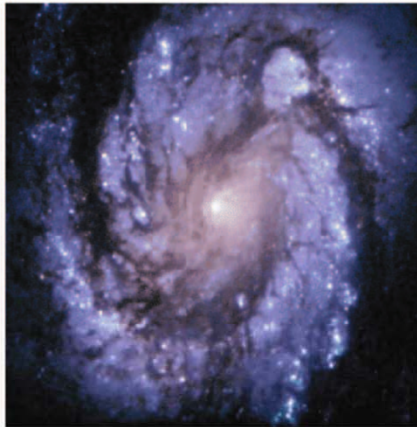
کاربردهای کانونی‌لوشن

تلسکوپ فضایی هابل

Hubble images before and after COSTAR.



before



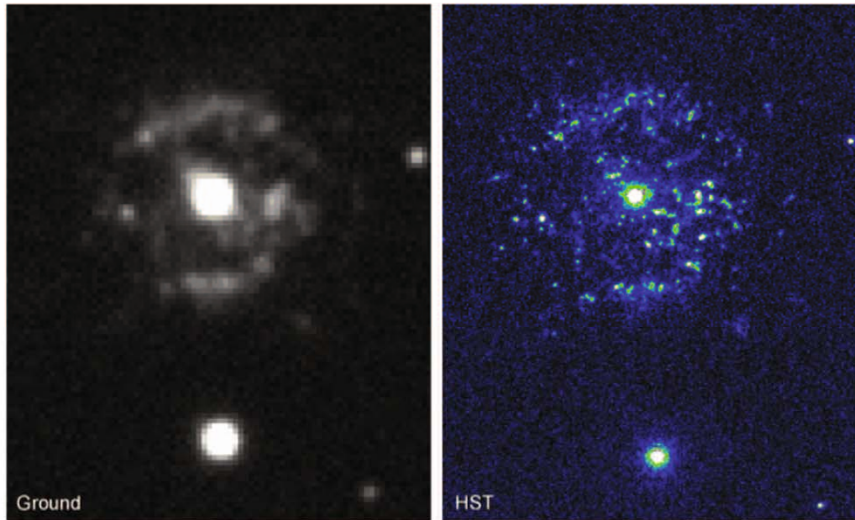
after

<http://hubblesite.org>

کاربردهای کانونولوشن

تلسکوپ فضایی هابل

Images from ground-based telescope and Hubble.

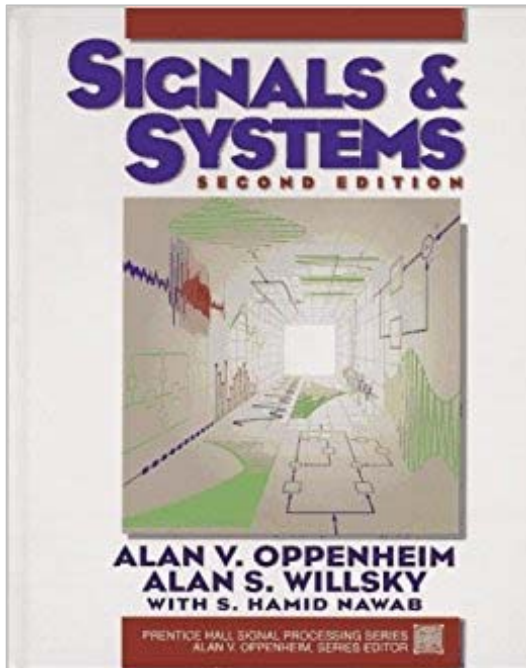


<http://hubblesite.org>

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۴)

۵

منابع



A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,
Signals and Systems,
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

Chapter 2