

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

درس ۵

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۱)

Linear Time-Invariant (LTI) Systems (1)

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/sigsys>

طرح درس

COURSE OUTLINE

بازنمایی سیگنال‌های گسسته-زمان برحسب نمونه‌های واحد شیف‌ت یافته

Representation of DT signals in terms of shifted unit samples

بازنمایی جمع کانولوشن سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته-زمان

Convolution sum representation of DT LTI systems

چند مثال

Examples

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۱)

۱

بازنمایی
سیگنال‌های
گسسته-زمان
برحسب
نمونه‌های
واحد
شیفت‌یافته

Exploiting Superposition and Time-Invariance

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{\text{Linear System}} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

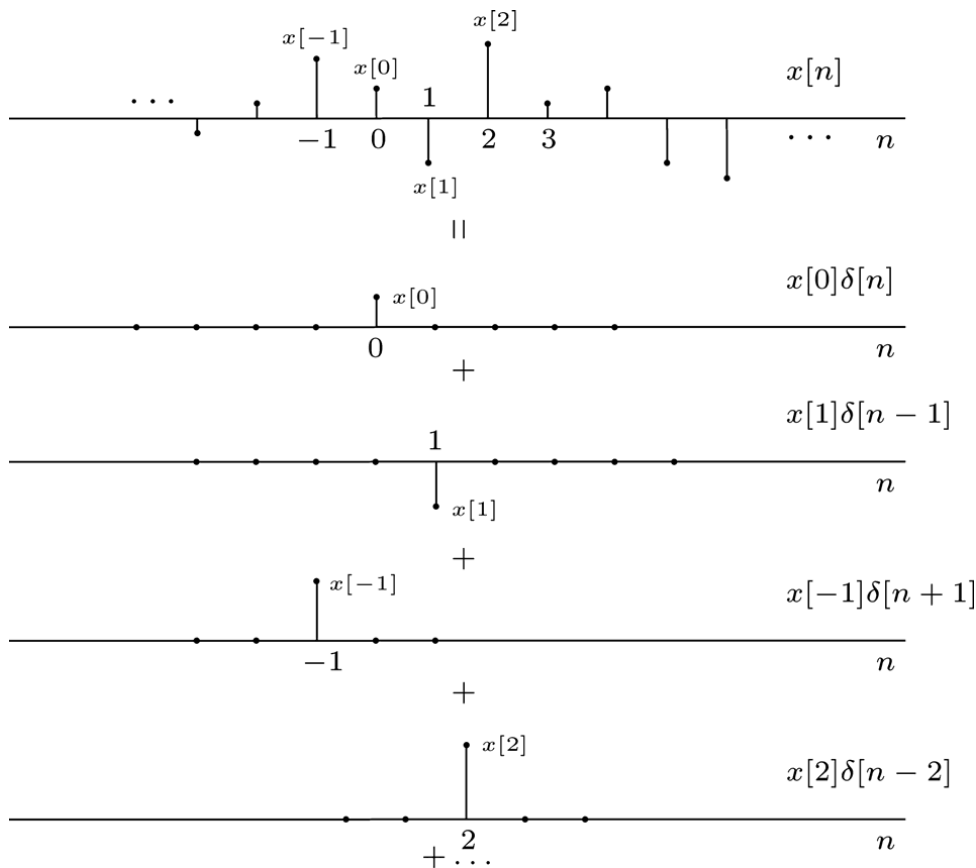
Question: Are there sets of “basic” signals so that:

- a) We can represent rich classes of signals as linear combinations of these building block signals.
- b) The response of LTI Systems to these basic signals are both *simple* and *insightful*.

Fact: For LTI Systems (CT or DT) there are two natural choices for these building blocks

Focus for now:	DT	Shifted unit samples
	CT	Shifted unit impulses

Representation of DT Signals Using Unit Samples



That is ...

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$\Downarrow$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]} \underbrace{\delta[n-k]}$$

Coefficients

Basic Signals

The Sifting Property of the Unit Sample

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۱)

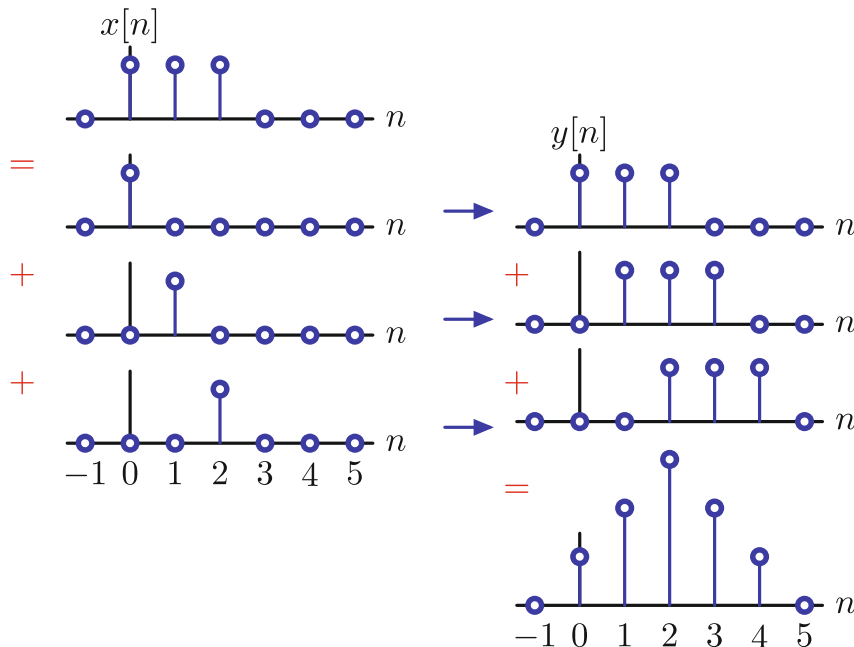
۲

بازنمایی جمع
کانوولوشن
سیستم‌های
خطی
تغییرناپذیر
با زمان
گسسته-زمان

برهم‌نهی

SUPERPOSITION

ورودی را به اجزای جمعی تفکیک می‌کنیم و پاسخ به این اجزا را با هم جمع می‌کنیم:



برهم‌نهی زمانی قابل استفاده است که سیستم خطی باشد.

پاسخ به اجزا زمانی به سادگی قابل محاسبه است که سیستم تغییرناپذیر با زمان باشد.

خطی بودن

LINEARITY

A system is linear if its response to a weighted sum of inputs is equal to the weighted sum of its responses to each of the inputs.

Given



and



the system is linear if



is true for all α and β .

تغییرناپذیری با زمان

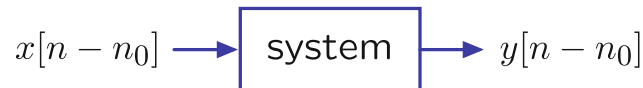
TIME-INVARIANCE

A system is time-invariant if delaying the input to the system simply delays the output by the same amount of time.

Given



the system is time invariant if



is true for all n_0 .

ساختار برهم‌نهی

TIME-INVARIANCE

If a system is linear and time-invariant (LTI) then its output is the sum of weighted and shifted unit-sample responses.



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \rightarrow \text{system} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

جمع کانولوشن

CONVOLUTION SUM

Response of an LTI system to an arbitrary input.



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \equiv (x * h)[n]$$

This operation is called **convolution**.

$$(x * h)[n] = x[n] * h[n]$$



- Suppose the system is **linear**, and define $h_k[n]$ as the response to $\delta[n - k]$:

$$\delta[n - k] \rightarrow h_k[n]$$

From superposition: $\Downarrow$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$



- Now suppose the system is **LTI**, and define the *unit sample response* $h[n]$:

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

From TI:



$$\delta[n - k] \rightarrow h[n - k]$$

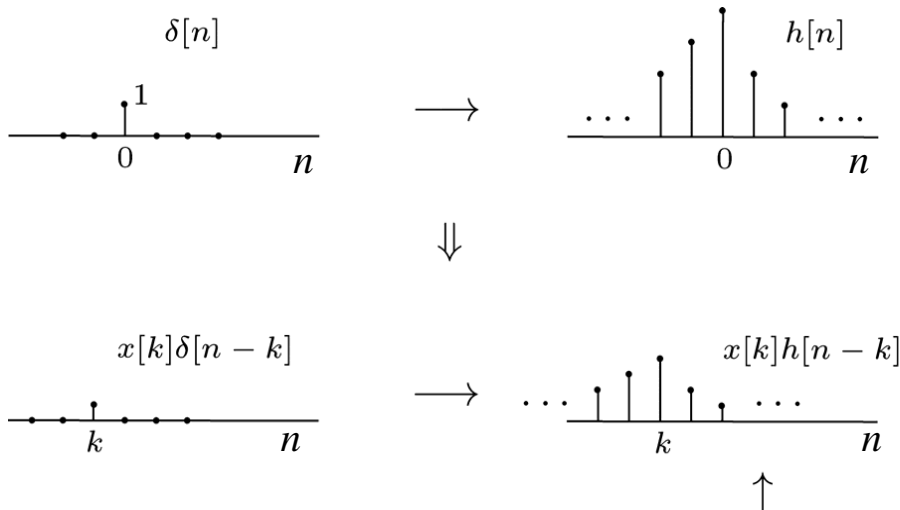
From LTI:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \rightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]}_{\text{Convolution Sum}}$$

Convolution Sum Representation of Response of LTI Systems

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Interpretation



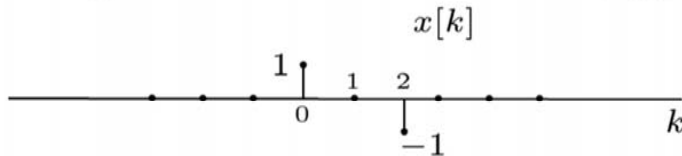
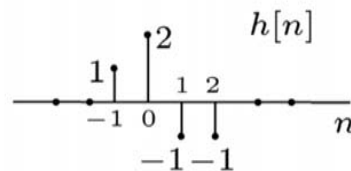
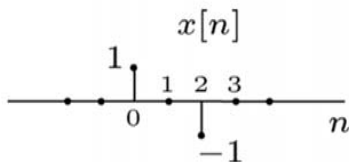
Sum up responses over all k

Visualizing the calculation of $y[n] = x[n] * h[n]$

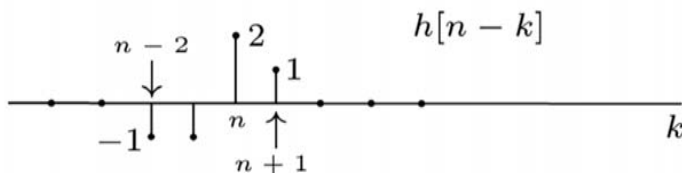
Choose value of n and consider it fixed

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

View as functions of k with n fixed



$y[0] = \sum \text{prod of overlap for } n=0$



$y[1] = \sum \text{prod of overlap for } n=1$

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۱)

۳

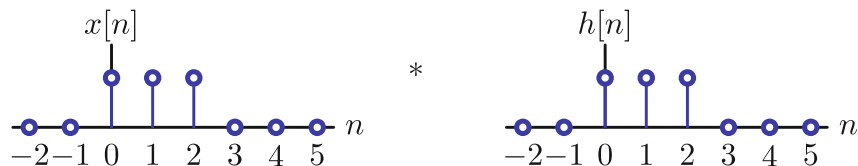
چند مثال

مجموع کانولوشن

مثال (۱ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

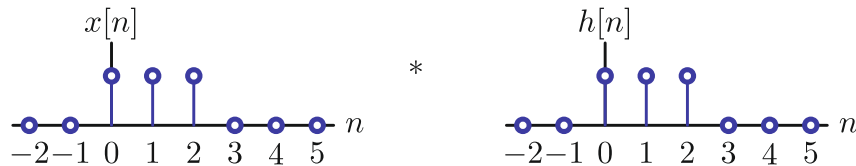


مجموع کانولوشن

مثال (۲ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

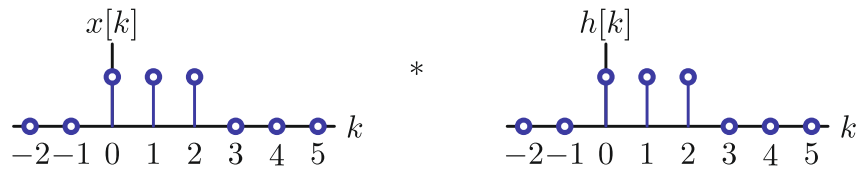


مجموع کانولوشن

مثال (۳ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

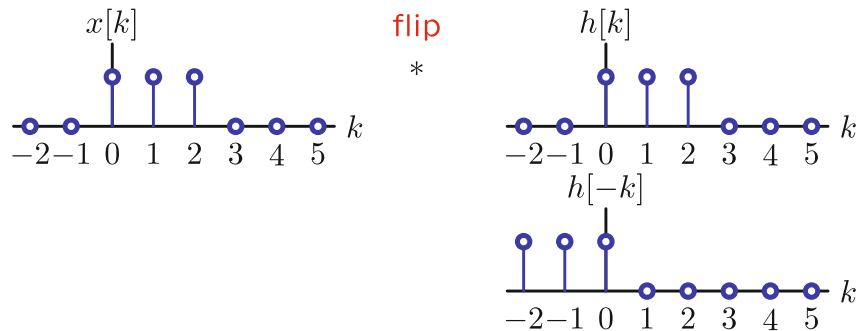


مجموع کانولوشن

مثال (۴ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

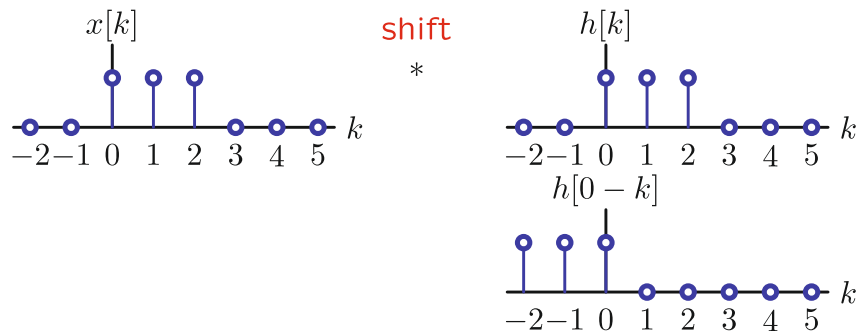


مجموع کانولوشن

مثال (۵ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

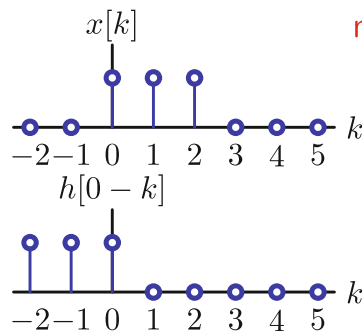


مجموع کانولوشن

مثال (۶ از ۱۴)

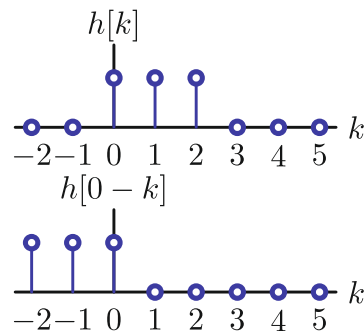
CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



multiply

*

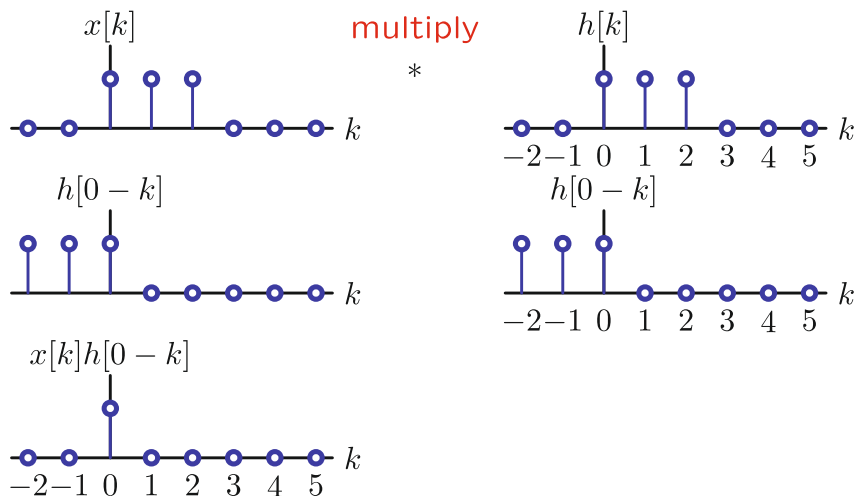


مجموع کانولوشن

مثال (۷ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

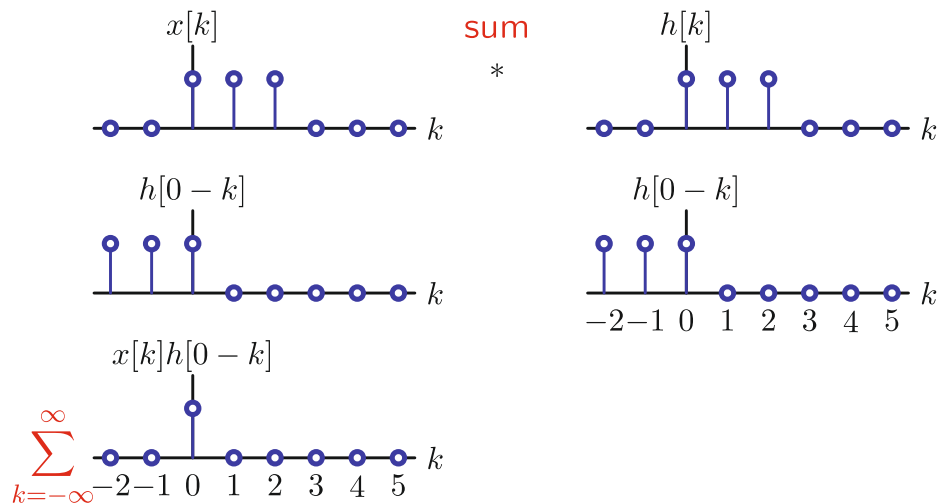


مجموع کانولوشن

مثال (۸ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

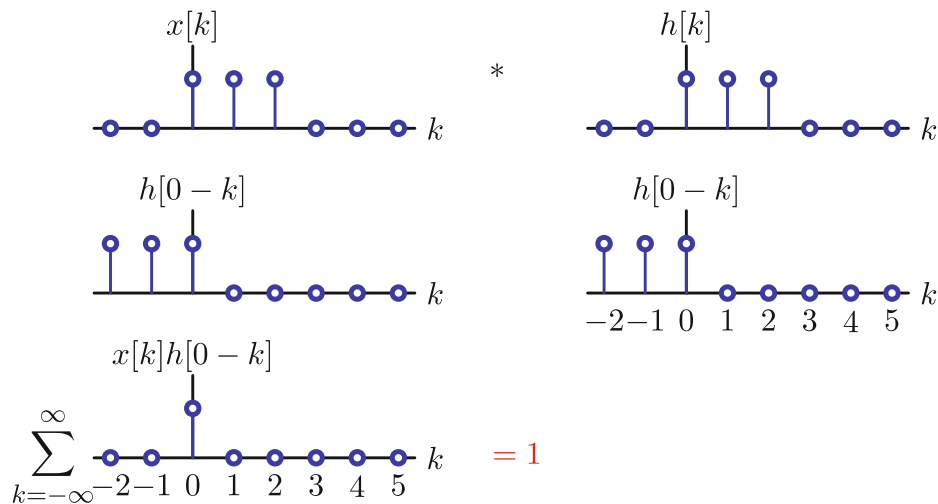


مجموع کانولوشن

مثال (۹ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

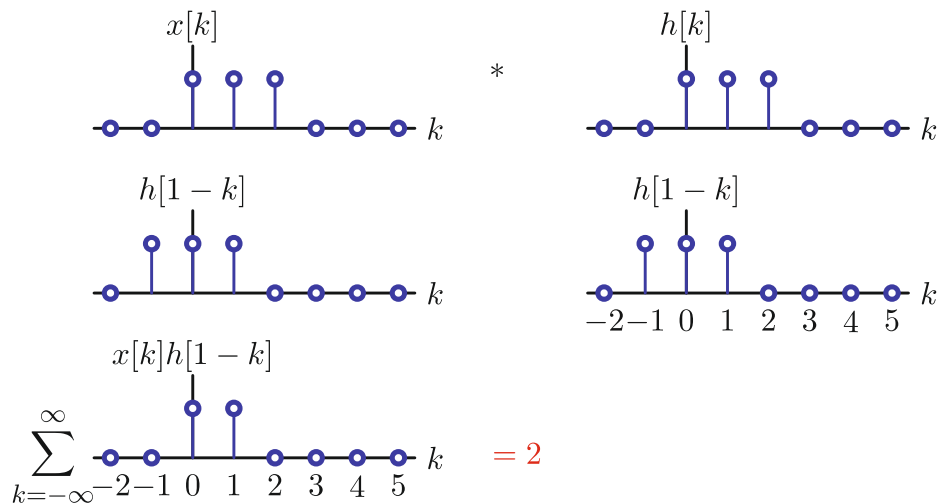


مجموع کانولوشن

مثال (۱۰ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$$



*

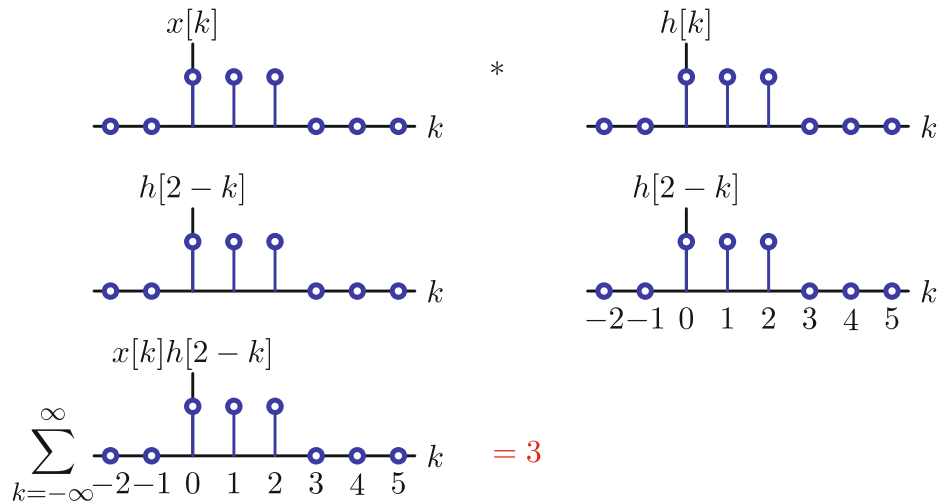
= 2

مجموع کانولوشن

مثال (۱۱ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]$$

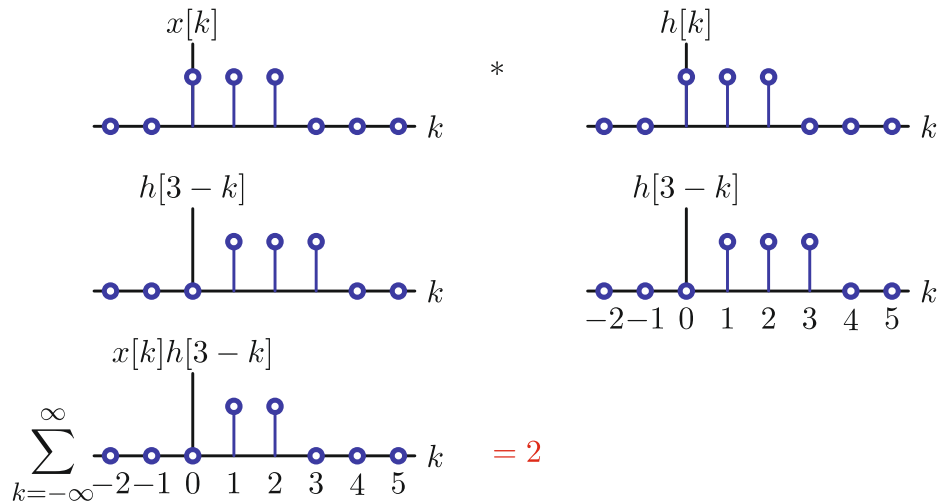


مجموع کانولوشن

مثال (۱۲ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k]$$

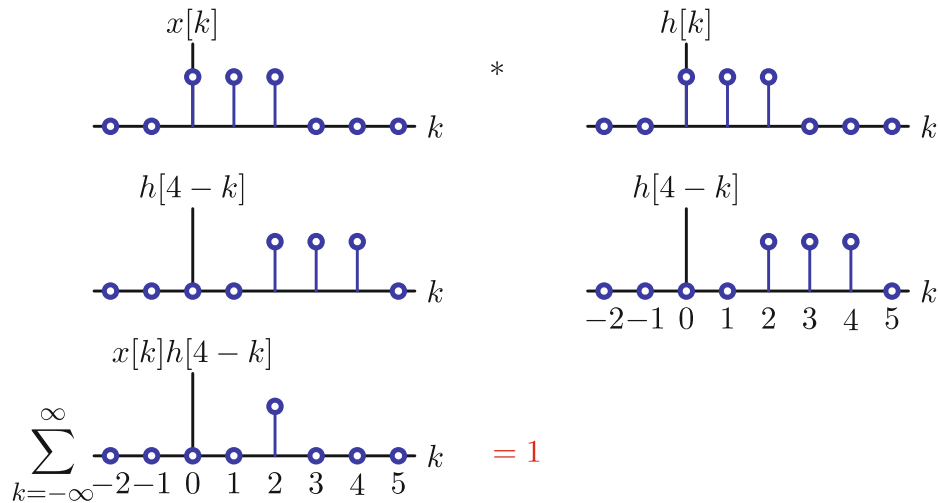


مجموع کانولوشن

مثال (۱۳ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k]$$

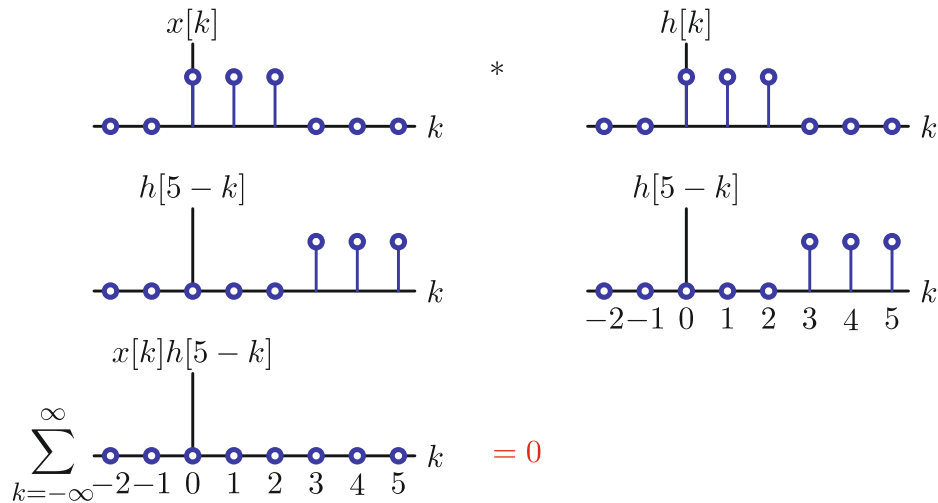


مجموع کانولوشن

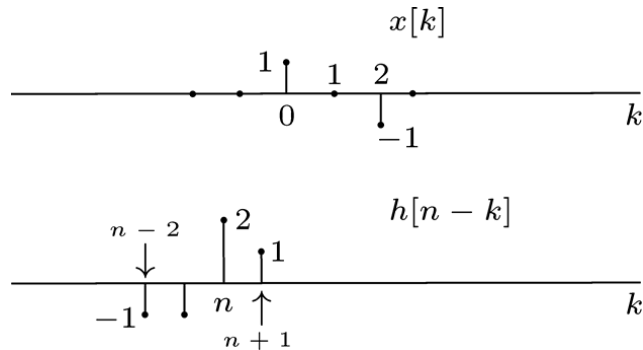
مثال (۱۴ از ۱۴)

CONVOLUTION SUM

$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k]$$



Calculating Successive Values: Shift, Multiply, Sum



$$y[n] = 0 \quad \text{for } n < -1$$

$$y[-1] = 1 \times 1 = 1$$

$$y[0] = 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2$$

$$y[1] = (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2$$

$$y[2] = (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3$$

$$y[3] = (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1$$

$$y[4] = (-1) \times (-1) = 1$$

$$y[n] = 0 \quad \text{for } n > 4$$

مجموع کانولوشن

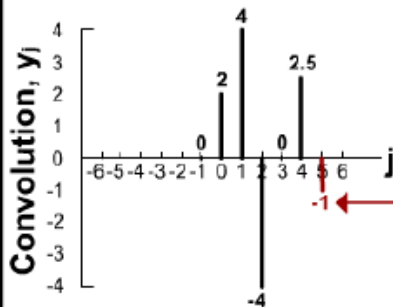
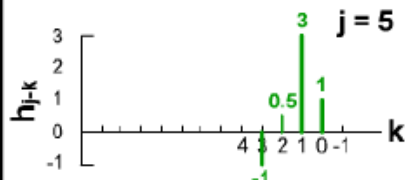
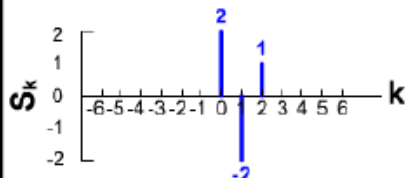
مثال

CONVOLUTION SUM

Express mathematically:

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n u[n] \right) * \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n u[n] \right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^k u[k] \right) \times \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n-k} u[n-k] \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^n = \left(\frac{2}{3} \right)^n \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= (n+1) \left(\frac{2}{3} \right)^n u[n] \\
 &= 1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{32}{27}, \quad \frac{80}{81}, \quad \dots
 \end{aligned}$$

Convolution Animation (discrete)



$$y_5 = \sum_k s_k h_{5-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ * \\ -1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$

$$(2 \times -1) + (-2 \times 0.5) + (1 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(-2 \times -1) + (1 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 2.5$$

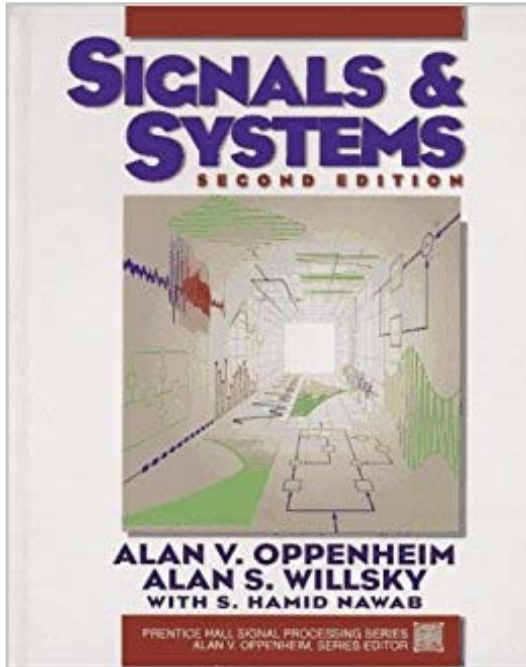
$$(1 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = -1$$



سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۱)

۴

منابع



A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,
Signals and Systems,
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

Chapter 2