

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

درس ۶

## سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۲)

Linear Time-Invariant (LTI) Systems (2)

کاظم فولادی قلعه  
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی  
دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/sigsys>

## طرح درس

COURSE OUTLINE

پاسخ نمونه‌ی واحد و خصوصیات سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته-زمان

The unit sample response and properties of DT LTI systems

سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

Systems Described with Linear Constant-Coefficient Difference Equations

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۲)

۱

پاسخ نمونه‌ی  
واحد و  
خصوصیات  
سیستم‌های  
خطی  
تغییرناپذیر  
با زمان  
گسسته-زمان

## Properties of Convolution and DT LTI Systems

- 1) A DT LTI System is *completely characterized* by its unit sample response

Ex. #1:  $h[n] = \delta[n - n_0]$

There are **many** systems with this response to  $\delta[n]$ .

There is **one** LTI System with this response to  $\delta[n]$ :

$$y[n] = x[n - n_0]$$

$\Downarrow$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Ex. #2:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{- An Accumulator}$$

Unit Sample response

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$

$\Downarrow$

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

## The Commutative Property

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$



Ex: Step response  $s[n]$  of an LTI system

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$$

↑  
step  
input

↑  
“input”

↑  
Unit Sample response  
of accumulator

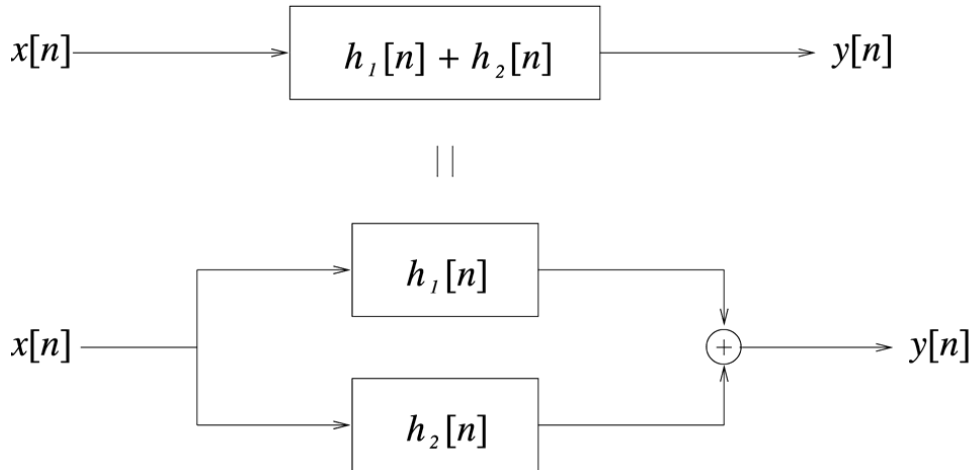
⇓

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

## The Distributive Property

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Interpretation



## خاصیت توزیع‌پذیری

مثال

$$x[n] = 0.5^n u[n] + 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$

$$x_1[n] = 0.5^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2^n u[-n]$$

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]$$

$$y_1[n] = \left( \frac{1 - 0.5^{n+1}}{1 - 0.5} \right) u[n] \quad y_2[n] = \begin{cases} 2^{n+1} & n \leq 0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases}$$



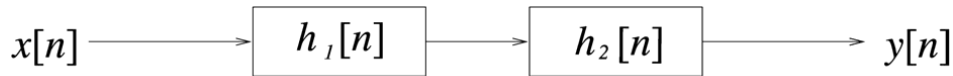
## The Associative Property

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

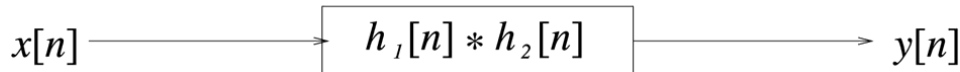
(Commutativity) ||

$$x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

Implication (Very special to LTI Systems)



||

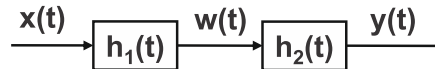


||



## خاصیت شرکت‌پذیری

مثال



$$h_1[n] = \sin(8n) \qquad h_2[n] = a^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1] \qquad y[n] = ?$$

$$y[n] = \sin(8n)$$

## Properties of LTI Systems

1) Causality  $\Leftrightarrow h[n] = 0$  for all  $n < 0$

2) Stability  $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

## خاصیت حافظه‌دار بودن

مثال

$$h[n] = K\delta[n]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = Kx[n]$$

## خاصیت وارون‌پذیر بودن

مثال

وجود داشته باشد  $h_i$  که :

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۲)

# ۵

سیستم‌های  
توصیف‌شده  
با معادلات  
تفاضلی  
خطی با  
ضرایب ثابت

## سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

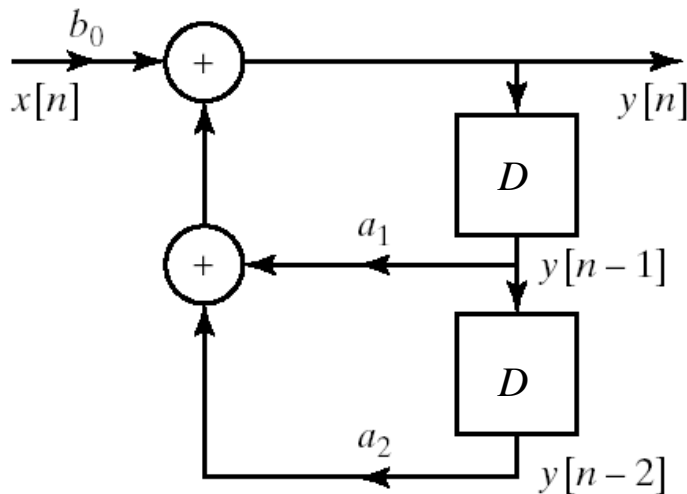
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

# سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با نمودار بلوکی

## BLOCK DIAGRAM REPRESENTATION

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$



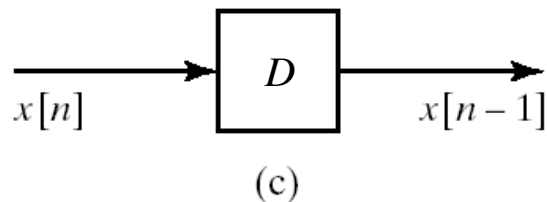
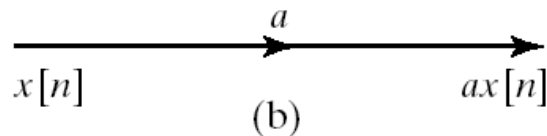
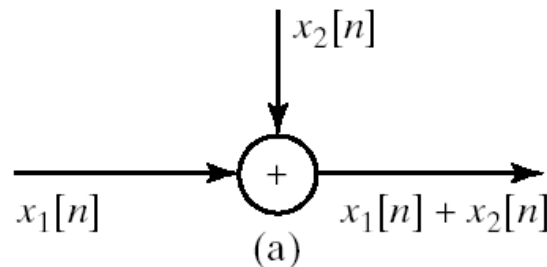


## سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با نمودار بلوکی

### BLOCK DIAGRAM REPRESENTATION

- LTI systems with rational system function can be represented as constant-coefficient difference equation
- The implementation of difference equations requires **delayed values** of the
  - input
  - output
  - intermediate results
- The requirement of delayed elements implies need for **storage**
- We also need means of
  - addition
  - multiplication



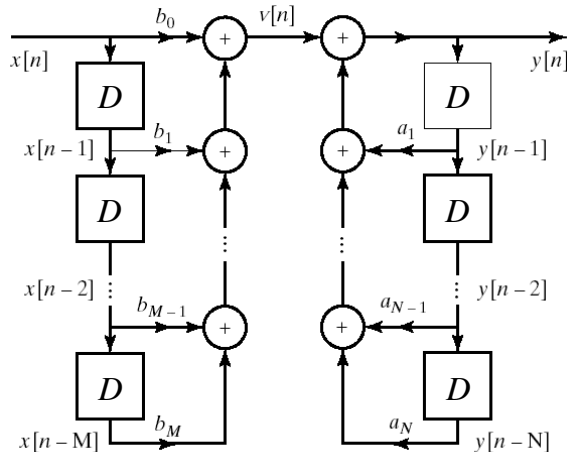
## سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با نمودار بلوکی: فرم مستقیم یک

### DIRECT FORM I

$$\sum_{k=0}^N \hat{a}_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M \hat{b}_k x[n-k]$$

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$



$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

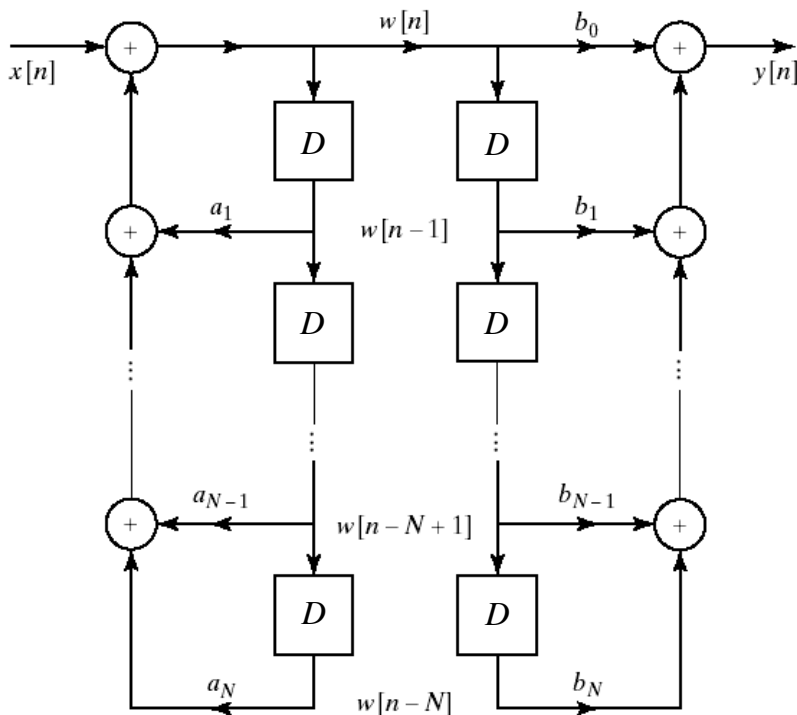
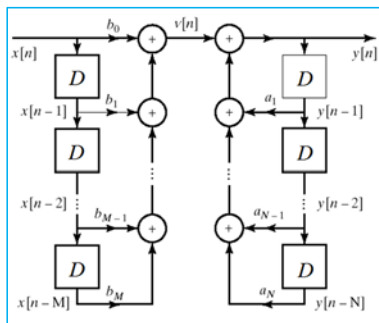
$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]$$

## سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با نمودار بلوکی: فرم مستقیم دو

### DIRECT FORM II

می‌توان جای دو سیستم متوالی را عوض کرد:



$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

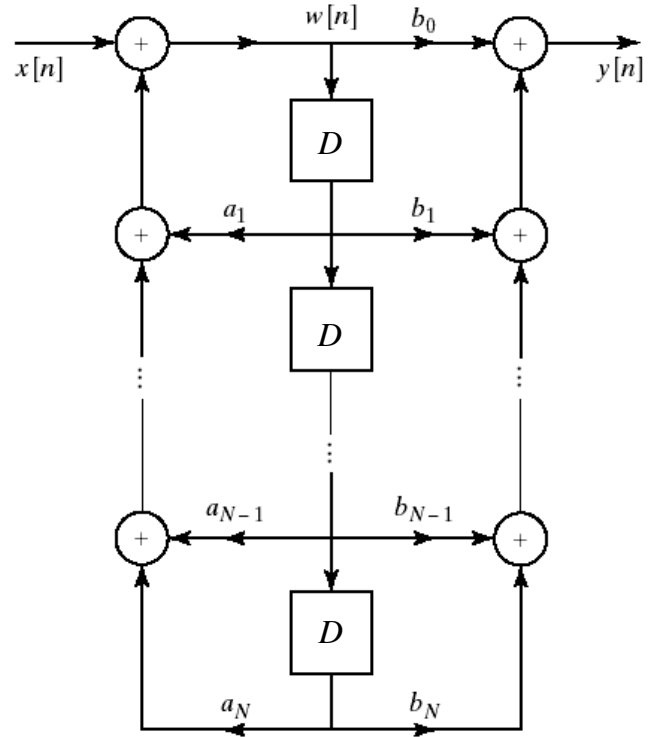
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

## سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

بازنمایی با نمودار بلوکی: فرم مستقیم دو

### DIRECT FORM II

- No need to store the same data **twice** in previous system
- So we can collapse the delay elements into one chain
- This is called Direct Form II or the **Canonical Form**
- Theoretically no difference between Direct Form I and II
- Implementation wise
  - Less memory in Direct II
  - Difference when using finite-precision arithmetic

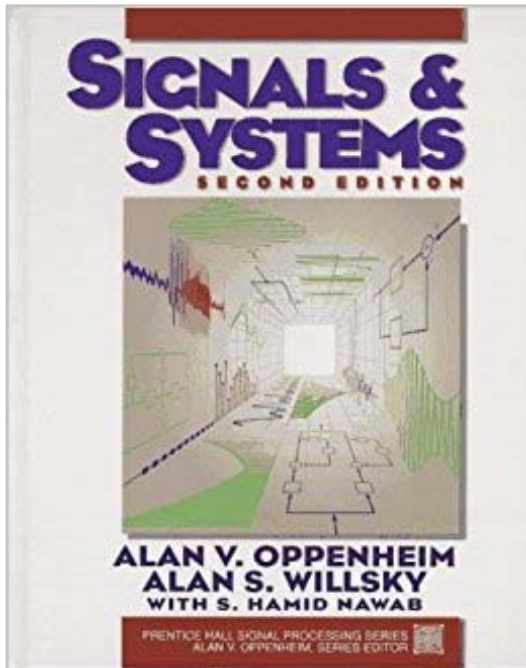


سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (۲)

۳

منابع

## منبع اصلی



A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,  
**Signals and Systems**,  
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

**Chapter 2**