سیگنال‌ها و سیستم‌ها

درس ۳

مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها (۲)

An Introduction to Signals and Systems (2)

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/sigsys

طرح درس

Course Outline

عملیات روی سیگنال‌ها
Operation on Signals
سیگنال‌های پایه
Basic Signals

Prepared by Kazim Fouladi | Fall 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها (۲)

۱

عملیات روی سیگنال‌ها

انرژی یک سیگنال

انرژی یک سیگنال پیوسته–زمان:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$t_1 \le t \le t_2$$

انرژی یک سیگنال گسسته–زمان:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$n_1 \le n \le n_2$$

توان یک سیگنال

توان یک سیگنال پیوسته–زمان:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

توان یک سیگنال گسسته–زمان:

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$n_1 \leq n \leq n_2$$

انرژی کل یک سیگنال

انرژی کل یک سیگنال پیوسته–زمان:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

انرژی کل یک سیگنال گسسته–زمان:

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

توان کل یک سیگنال

توان کل یک سیگنال پیوسته–زمان:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

توان کل یک سیگنال گسسته–زمان:

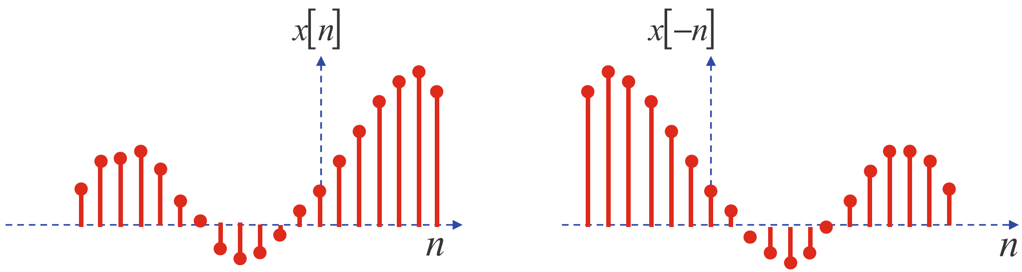
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

تبدیل متغیر مستقل

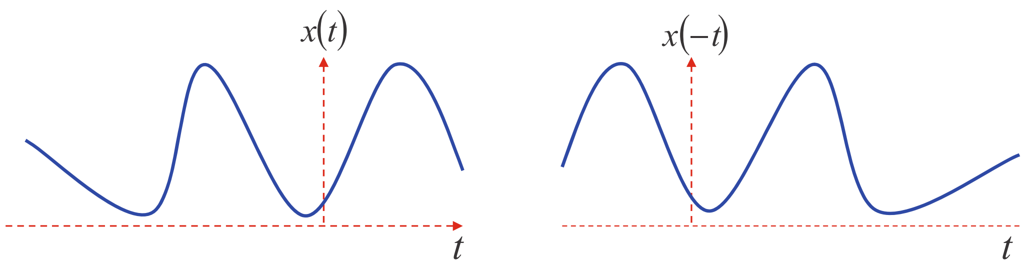
قرینه‌ی زمانی

TIME-REVERSAL

$$x[n] \rightarrow x[-n]$$



$$x(t) \rightarrow x(-t)$$

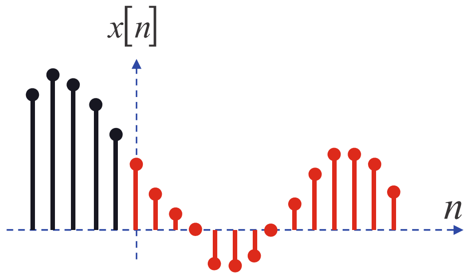


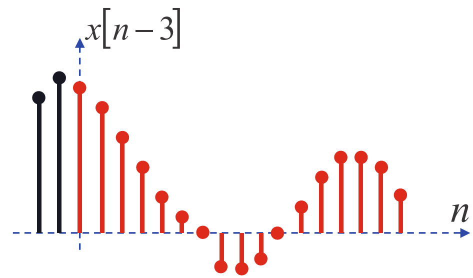
تبدیل متغیر مستقل

شیفت زمانی

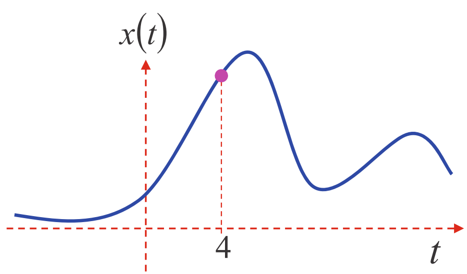
TIME-SHIFT

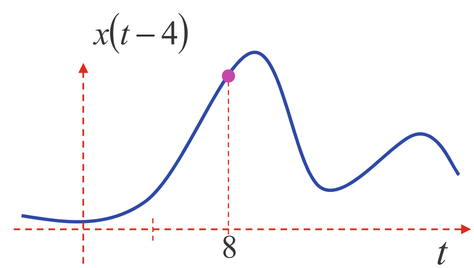
$$x[n] \to x[n-\alpha]$$





$$x(t) \to x(t-\alpha)$$

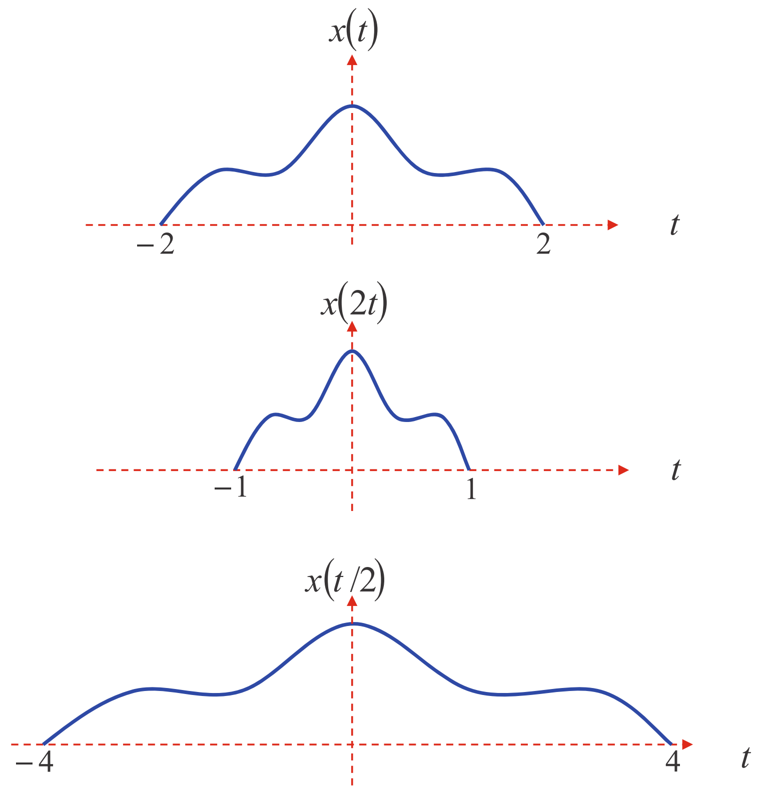




تبدیل متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

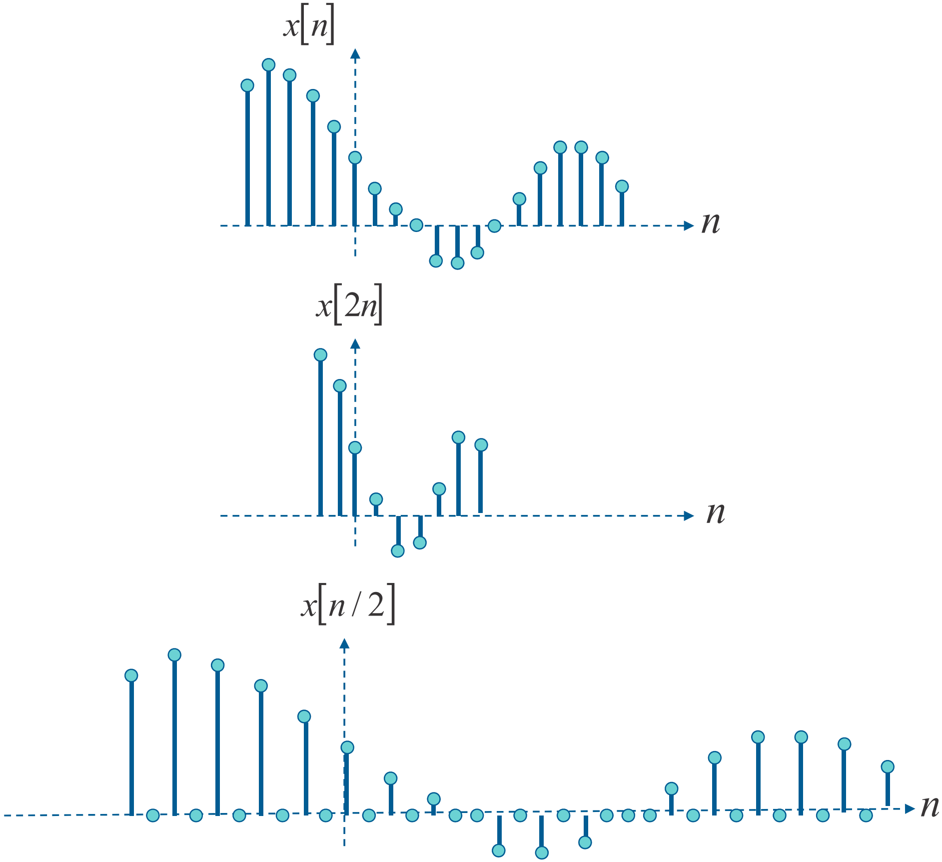
TIME-SCALING



تبدیل متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

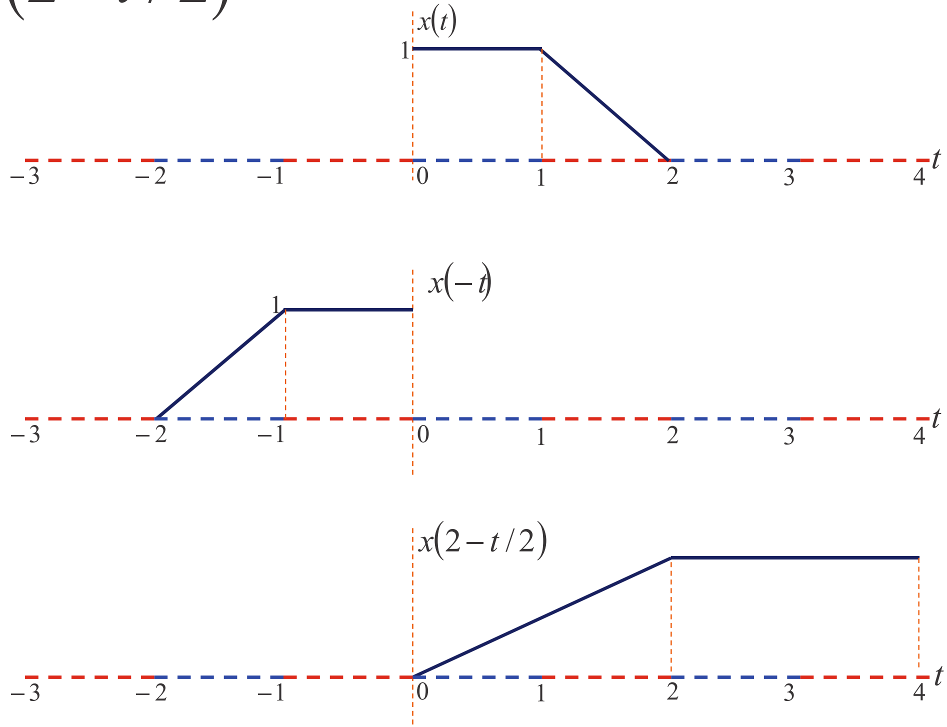
TIME-SCALING



تبدیل متغیر مستقل

مثال

$$x(2-t/2)$$



تبدیل متغیر مستقل

ترکیب تبدیل‌ها

$$y(t) = x(\alpha t + \beta)$$

بررسی برخی نقاط خاص می‌تواند در یافتن تبدیل‌ها کمک کننده باشد:

$$\boxed{y(0) = x(\beta)} \qquad \boxed{y(-\beta/\alpha) = x(0)}$$

در تغییر مقیاس زمانی، به‌جای t عبارت αt را قرار می‌دهیم
درحالی‌که در شیفت زمانی، به‌جای t عبارت $t - \beta$ را قرار می‌دهیم
$\Leftarrow$ تغییر مقیاس اولویت دارد:

$$y(t_0) = x(\alpha t_0 + \beta) = x(t_x)$$

$$\boxed{\alpha t_0 + \beta = t_x}$$

$$\boxed{t_0 = (1/\alpha)(t_x - \beta)}$$

سیگنال‌های متناوب

PERIODIC SIGNALS

$$\forall t \quad x(t) = x(t + T_0), \quad \exists T_0 > 0$$

$$\forall n \quad x[n] = x[n + N_0], \quad \exists N_0 > 0$$

دوره‌ی تناوب اصلی: کوچک‌ترین T_0 (یا N_0) ممکن

سیگنال زوج و سیگنال فرد

Odd Signal and Even Signal

سیگنال زوج: سیگنالی که با قرینه‌ی زمانی خود مساوی باشد.

$$x(-t) = x(t)$$
$$x[-n] = x[n]$$

سیگنال فرد: سیگنالی که با منفی قرینه‌ی زمانی خود مساوی باشد.

$$x(-t) = -x(t)$$
$$x[-n] = -x[n]$$

سیگنال زوج و سیگنال فرد

تجزیه‌ی زوج + فرد

ODD SIGNAL AND EVEN SIGNAL

هر سیگنال را می‌توان به‌صورت مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نوشت:

$$x(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} + \mathcal{O}d\{x(t)\}$$

$$x[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} + \mathcal{O}d\{x[n]\}$$

قسمت زوج سیگنال:

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$\mathcal{E}v\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

قسمت فرد سیگنال:

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$\mathcal{O}d\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها (۲)

۲

سیگنال‌های پایه

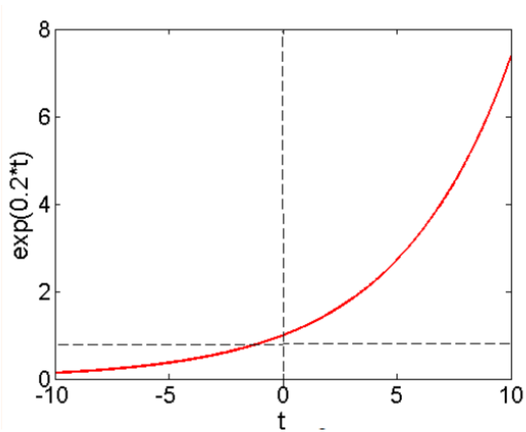
سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال نمایی مختلط پیوسته–زمان

EXPONENTIAL AND SINUSOIDAL SIGNALS

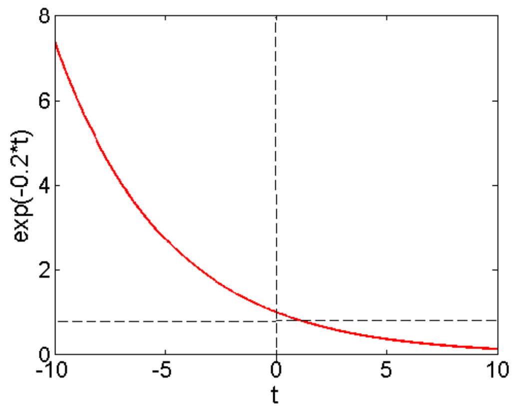
در طبیعت، بسیاری از سیگنال‌ها فرم نمایی دارند:

$$x(t) = Ce^{at}$$



$a > 0$

$C > 0$



$a < 0$

$C > 0$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال متناوب نمایی مختلط و سینوسی پیوسته–زمان

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

رابطه‌ی اویلر:

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

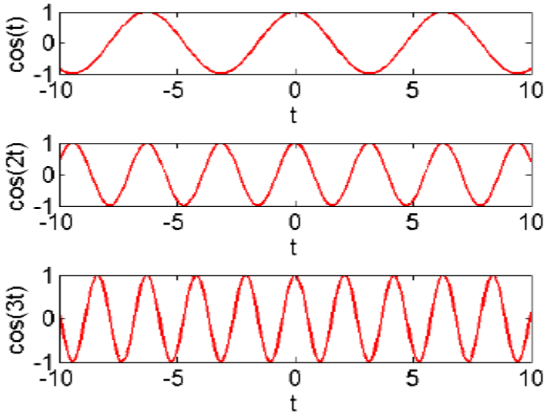
$$e^{j\omega_0(t+T)} = \cos\omega_0(t+T) + j\sin\omega_0(t+T) = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t = e^{j\omega_0 t}$$

$$\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathcal{R}e(e^{j(\omega_0 t + \phi)})$$
$$\sin(\omega_0 t + \phi) = \mathcal{I}m(e^{j(\omega_0 t + \phi)})$$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

هارمونیک‌ها

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



در تحلیل سیگنال‌ها، این دسته از توابع نقش مهمی بازی می‌کنند.

همگی این توابع دارای دوره‌ی تناوب مشترک $2\pi/\omega_0$ هستند.

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال نمایی مختلط و سینوسی گسسته–زمان

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

رابطه‌ی اویلر:

$$\boxed{e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n}$$

$$\cos(\omega_0 n + \phi) = \mathcal{R}e(e^{j(\omega_0 n + \phi)})$$
$$\sin(\omega_0 n + \phi) = \mathcal{I}m(e^{j(\omega_0 n + \phi)})$$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال نمایی مختلط و سینوسی گسسته–زمان: روابط مهم

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

$$\omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

$$e^{j2\pi n} = (e^{j2\pi})^n = 1^n = 1$$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال نمایی مختلط و سینوسی گسسته–زمان: هارمونیک‌ها

$$\varphi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{jk(2\pi/N)n} e^{j2\pi n} = \varphi_k[n]$$

تنها N هارمونیک گسسته‌ی متمایز وجود دارد:

$$\varphi_0[n] = 1$$
$$\varphi_1[n] = e^{j2\pi n/N}$$
$$\varphi_2[n] = e^{j4\pi n/N}$$
$$\cdots$$
$$\varphi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

سیگنال نمایی مختلط و سینوسی گسسته-زمان و پیوسته-زمان (مقایسه)

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$	$x(t) = e^{j\omega_0 t}$
به‌ازای فرکانس‌هایی با اختلاف 2π سیگنال‌های یکسانی هستند.	به‌ازای مقادیر متمایز ω_0 سیگنال‌های متمایزی هستند.
تنها زمانی متناوب است که به‌ازای مقادیر صحیح m و N مثبت، داشته باشیم $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}$	به‌ازای تمام مقادیر ω_0 متناوب است.
فرکانس پایه: $\frac{\omega_0}{m}$	فرکانس پایه: ω_0
دوره‌ی تناوب پایه: $\omega_0 = 0$: تعریف نشده $\omega_0 \neq 0$: $m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$	دوره‌ی تناوب پایه: $\omega_0 = 0$: تعریف نشده $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$

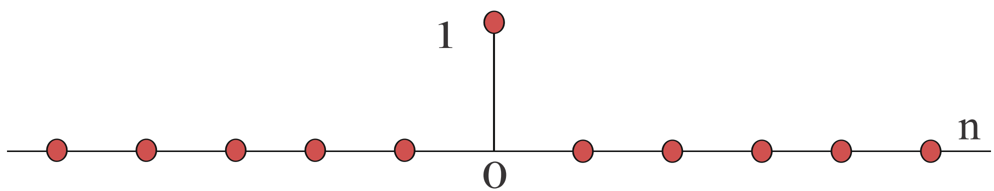
❋ با فرض اینکه m و N عامل مشترک ندارند.

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

ضربه‌ی واحد (نمونه‌ی واحد) گسسته–زمان

DISCRETE-TIME UNIT IMPULSE (UNIT SAMPLE)

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

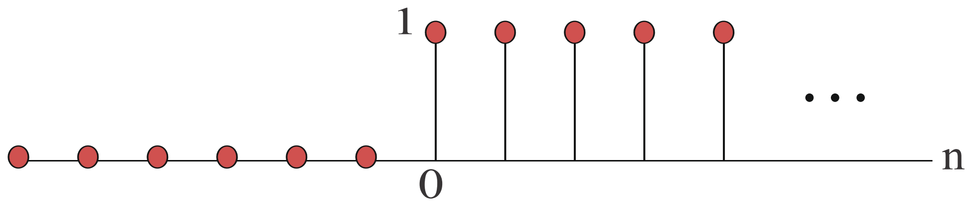


سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

پله‌ی واحد گسسته–زمان

DISCRETE-TIME UNIT STEP

$$u[n]=\begin{cases}0 & ,n<0\\ 1 & ,n\geq 0\end{cases}$$

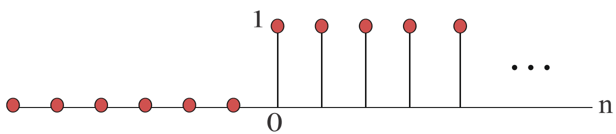


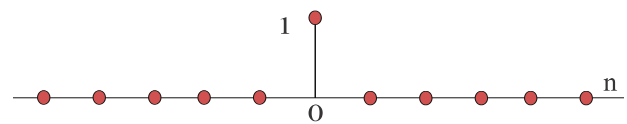
سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

رابطه‌ی ضربه و پله‌ی گسسته–زمان

$$u[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$





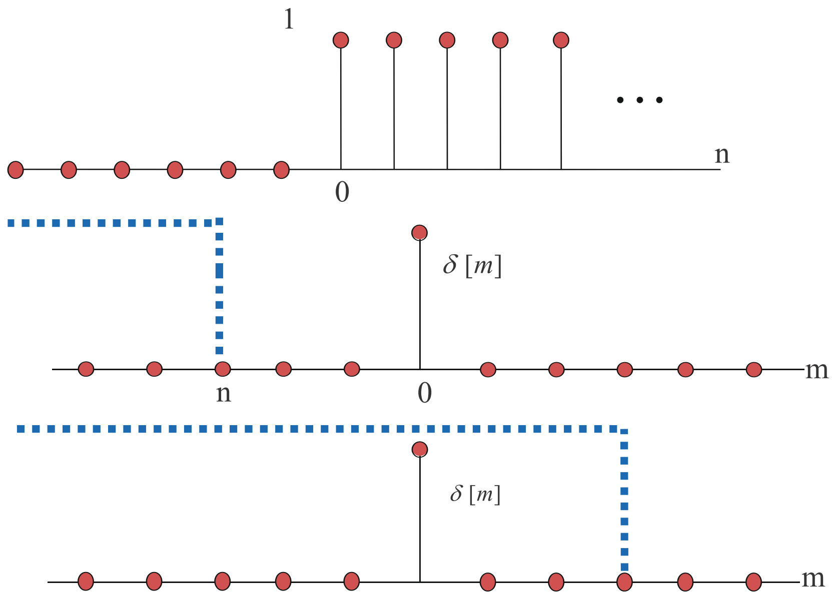
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

رابطه‌ی ضربه و پله‌ی گسسته-زمان

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$



سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

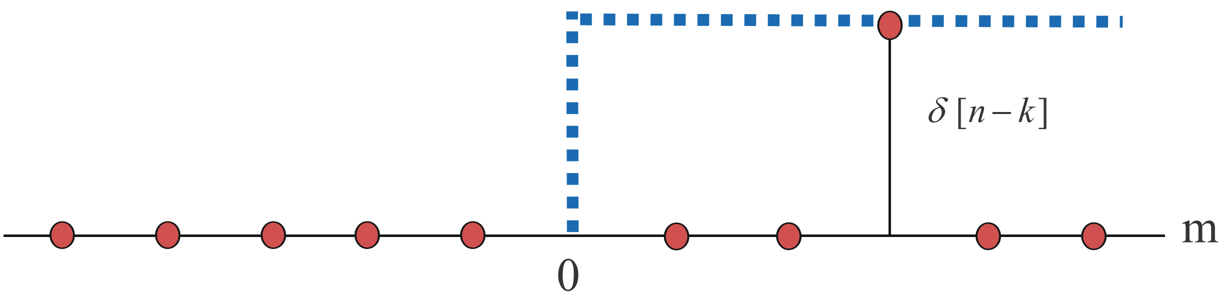
رابطه‌ی ضربه و پله‌ی گسسته–زمان

$$k = n - m$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} \delta[n-k]$$

$$m = n - k$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

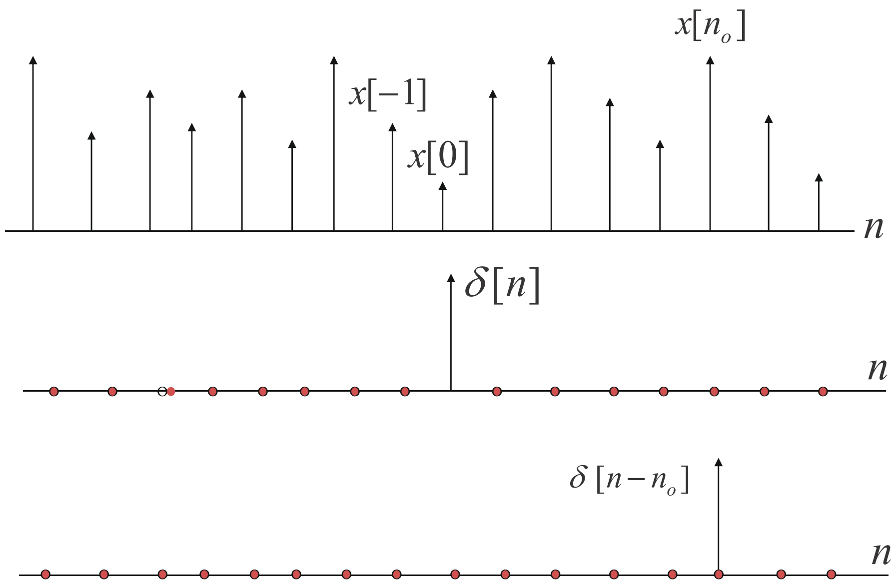


سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

خاصیت غربالی (نمونه‌برداری)

Sifting Property (Sampling)

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$
$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

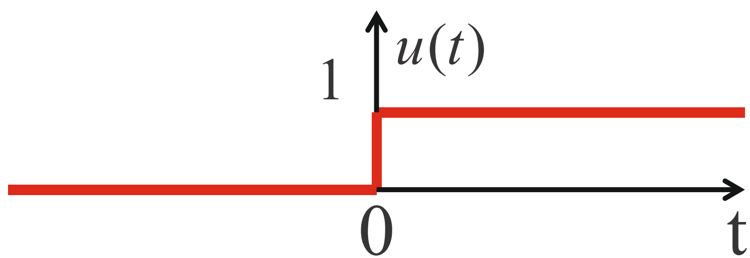


سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

سیگنال پله‌ی واحد پیوسته–زمان

CONTINUOUS-TIME UNIT STEP

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases}$$



در صفر ناپیوستگی وجود دارد.

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

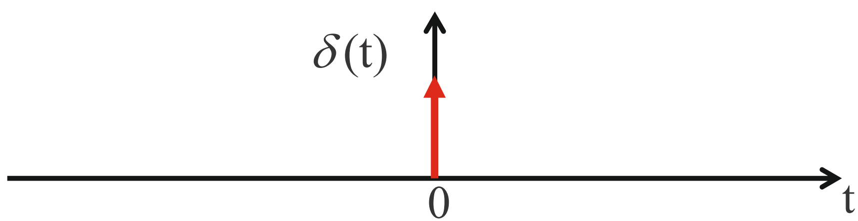
سیگنال ضربه‌ی واحد پیوسته–زمان

CONTINUOUS-TIME UNIT IMPULSE

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \text{undef.} & , t = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

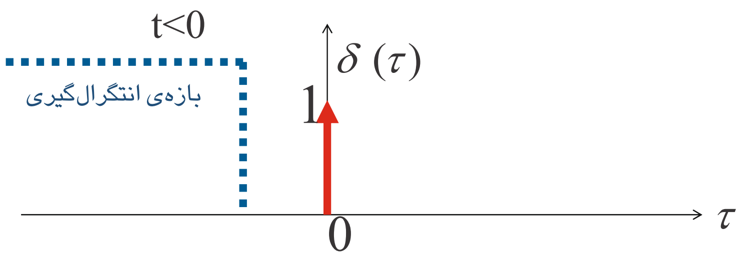


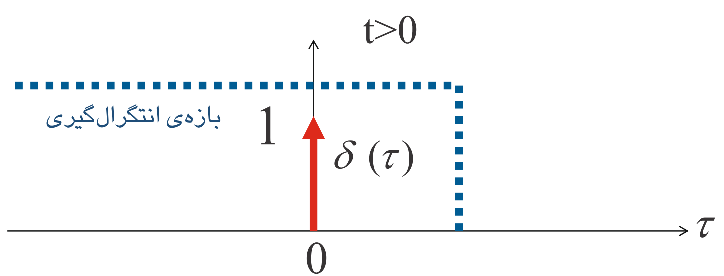
ضربه، مشتق پله است $\Leftrightarrow$ پله، انتگرال ضربه است

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

رابطه‌ی ضربه و پله‌ی پیوسته-زمان

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

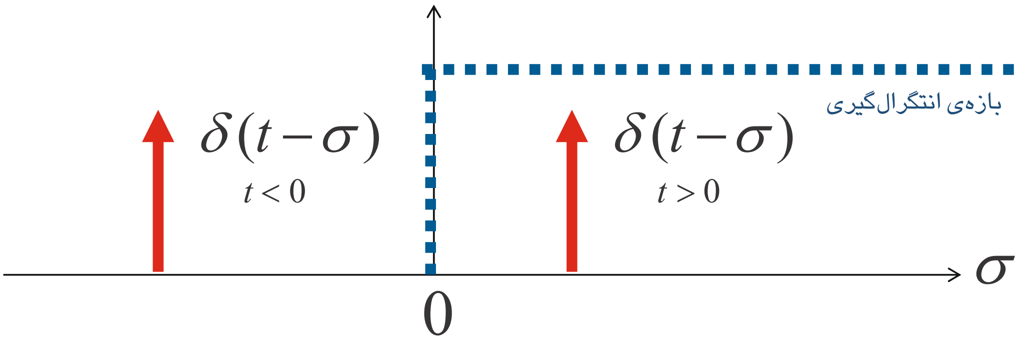




سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

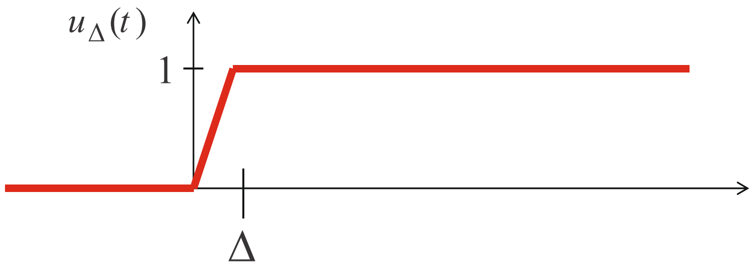
رابطه‌ی ضربه و پله‌ی پیوسته-زمان

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \int_{+\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-d\sigma) = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\sigma) d\sigma$$



سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

رابطه‌ی ضربه و پله‌ی پیوسته–زمان



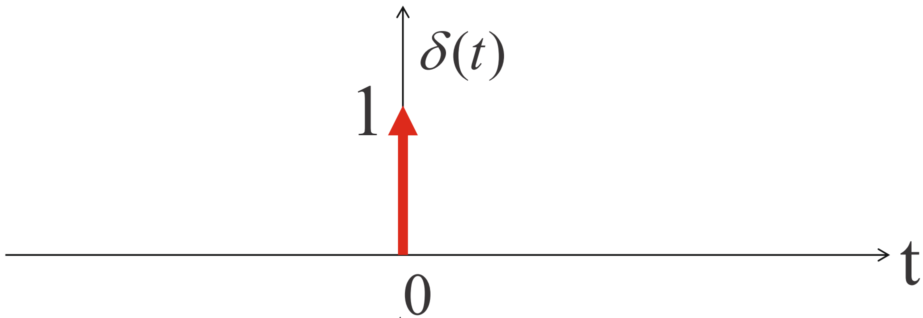
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

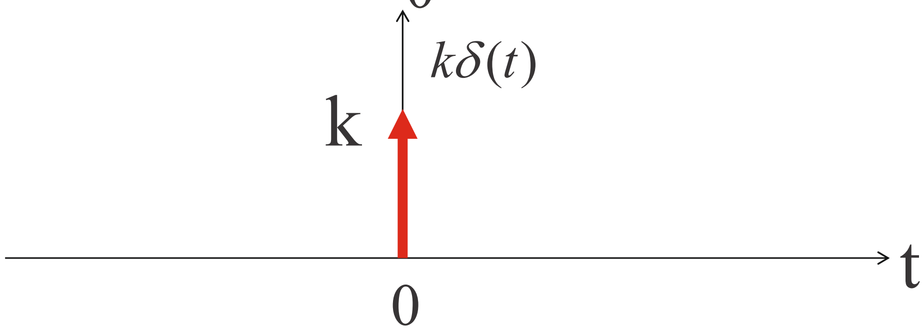
$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}, \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

تغییر مقیاس ضربه

Scaled Impulse





$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)d\tau = k \cdot u(t)$$

سیگنال‌های ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

خاصیت غربالی

Sifting Property

این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$

اگر Δ به حد کافی کوچک در نظر گرفته شود:

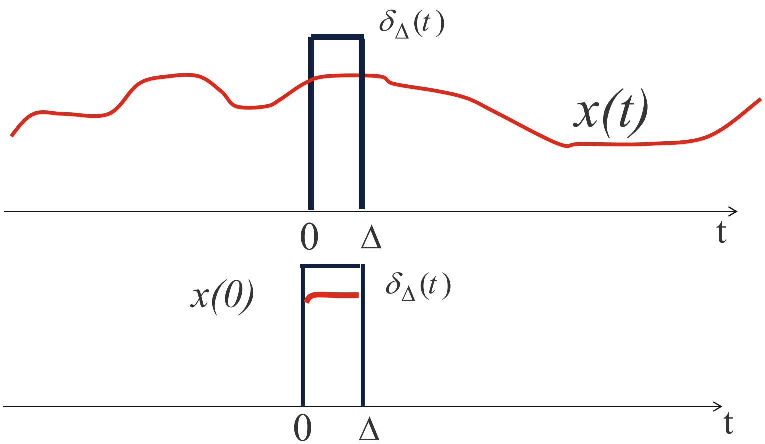
$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

از آنجا که داریم:

$$\delta(t) = \delta_\Delta(t) \quad \text{as} \quad \Delta \to 0$$

پس:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$



به‌طور مشابه:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

سیگنال شیب واحد

Unit Ramp Signal

$$r(t)=\begin{cases}0 & ,t<0\\ t & ,t\geq 0\end{cases}$$

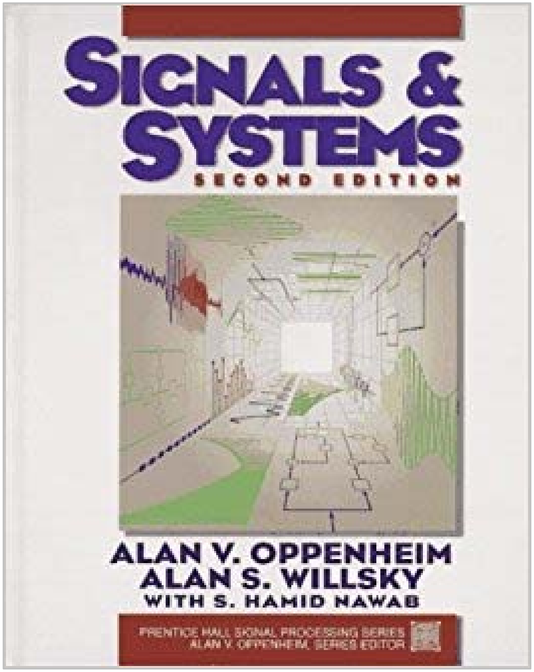
$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=tu(t)$$

مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها (۲)

۳

منابع

منبع اصلی



A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,
Signals and Systems,
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

Chapter 1