

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

درس ۲۰

نمونه برداری (۱)

Sampling (1)

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی
دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/sigsys>

طرح درس

COURSE OUTLINE

مفهوم و بازنمایی نمونه‌برداری متناوب یک سیگنال پیوسته-زمان

The Concept and Representation of Periodic Sampling of a CT Signal

تحلیل نمونه‌برداری در حوزه‌ی فرکانس

Analysis of Sampling in the Frequency Domain

قضیه‌ی نمونه‌برداری — نرخ نایکوئیست

The Sampling Theorem — the Nyquist Rate

در حوزه‌ی زمان: درونیابی

In the Time Domain: Interpolation

زیرنمونه‌برداری و آلیاسینگ

Undersampling and Aliasing

نمونه برداری (۱)

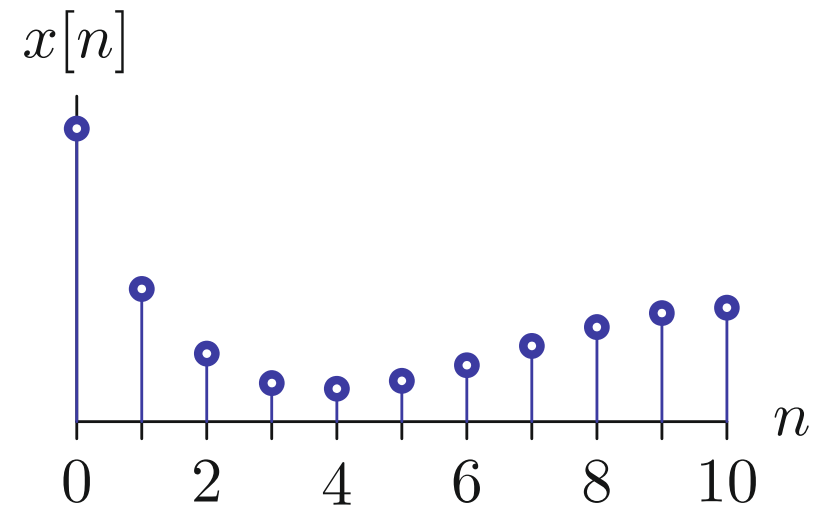
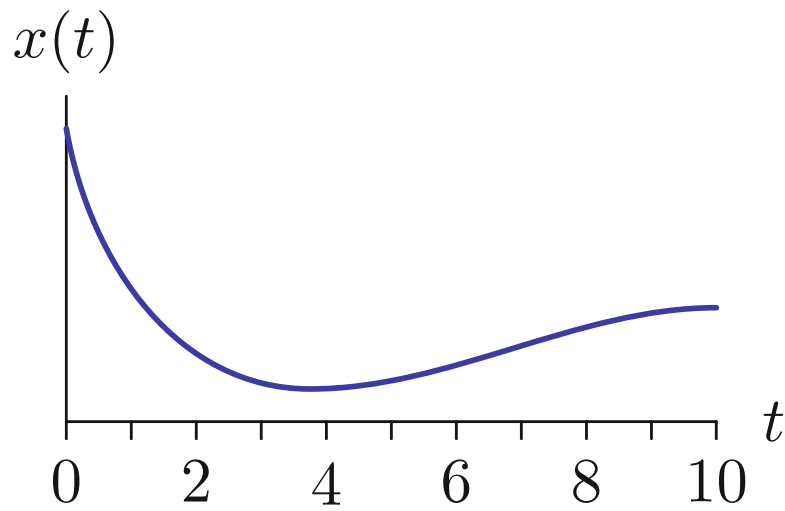
۱

مفهوم و
بازنمایی
نمونه برداری
متناوب یک
سیگنال
پیوسته-زمان

نمونه‌برداری

SAMPLING

نمونه‌برداری: تبدیل یک سیگنال پیوسته-زمان به سیگنال گسسته-زمان

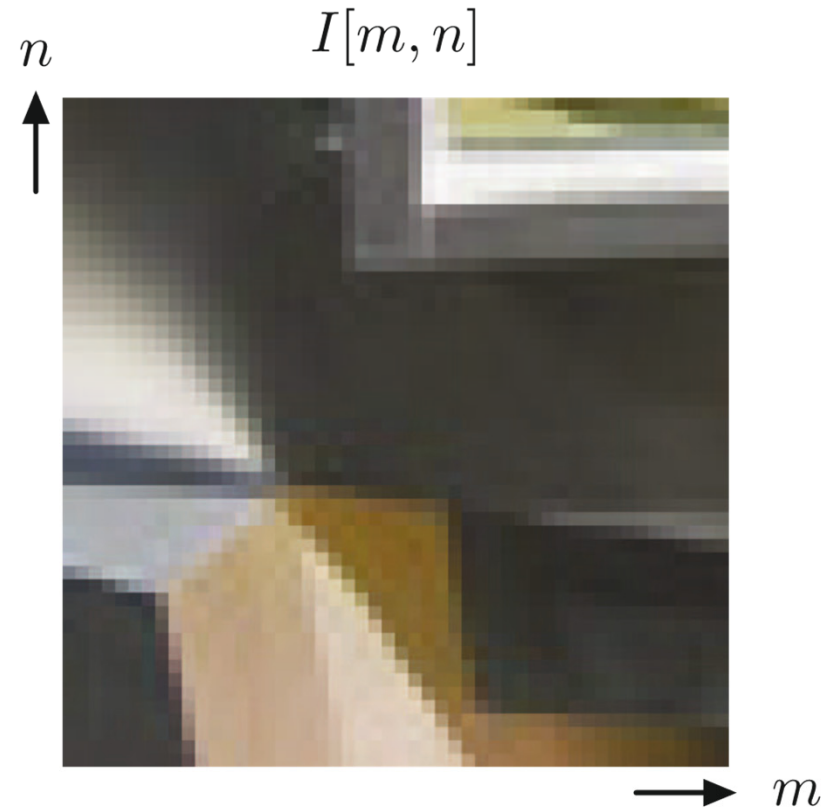
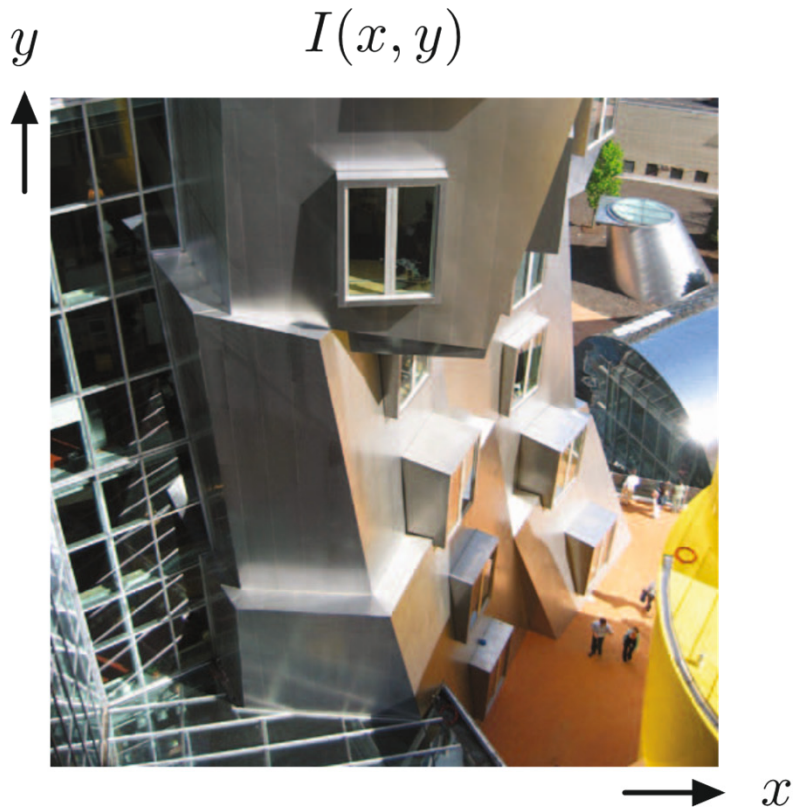


نمونه‌برداری

مثال: دوربین دیجیتال

SAMPLING

دوربین‌های دیجیتال تصاویر نمونه‌برداری شده را ثبت می‌کنند.

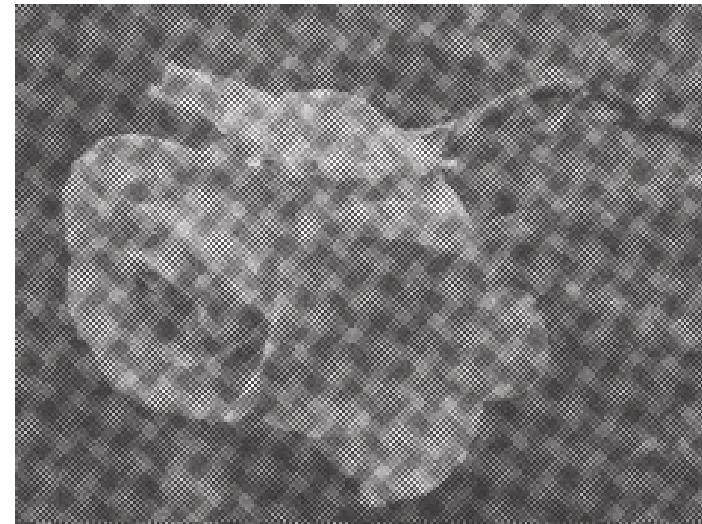


نمونه‌برداری

مثال: تصاویر خاکستری در روزنامه‌ها (۱ از ۲)

SAMPLING

Photographs in newsprint are “half-tone” images.
Each point is black or white and the average conveys brightness.



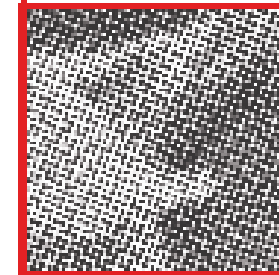
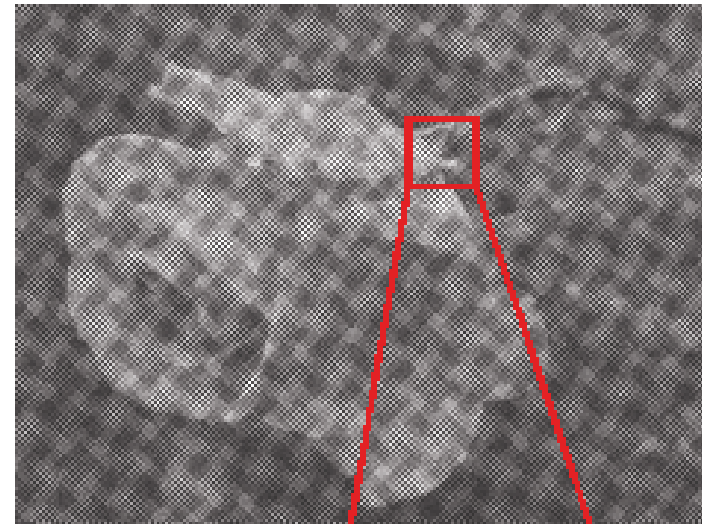
نمونه‌برداری

مثال: تصاویر خاکستری در روزنامه‌ها (۲ از ۲)

SAMPLING

Photographs in newsprint are “half-tone” images.
Each point is black or white and the average conveys brightness.

Zoom in to see the binary pattern.

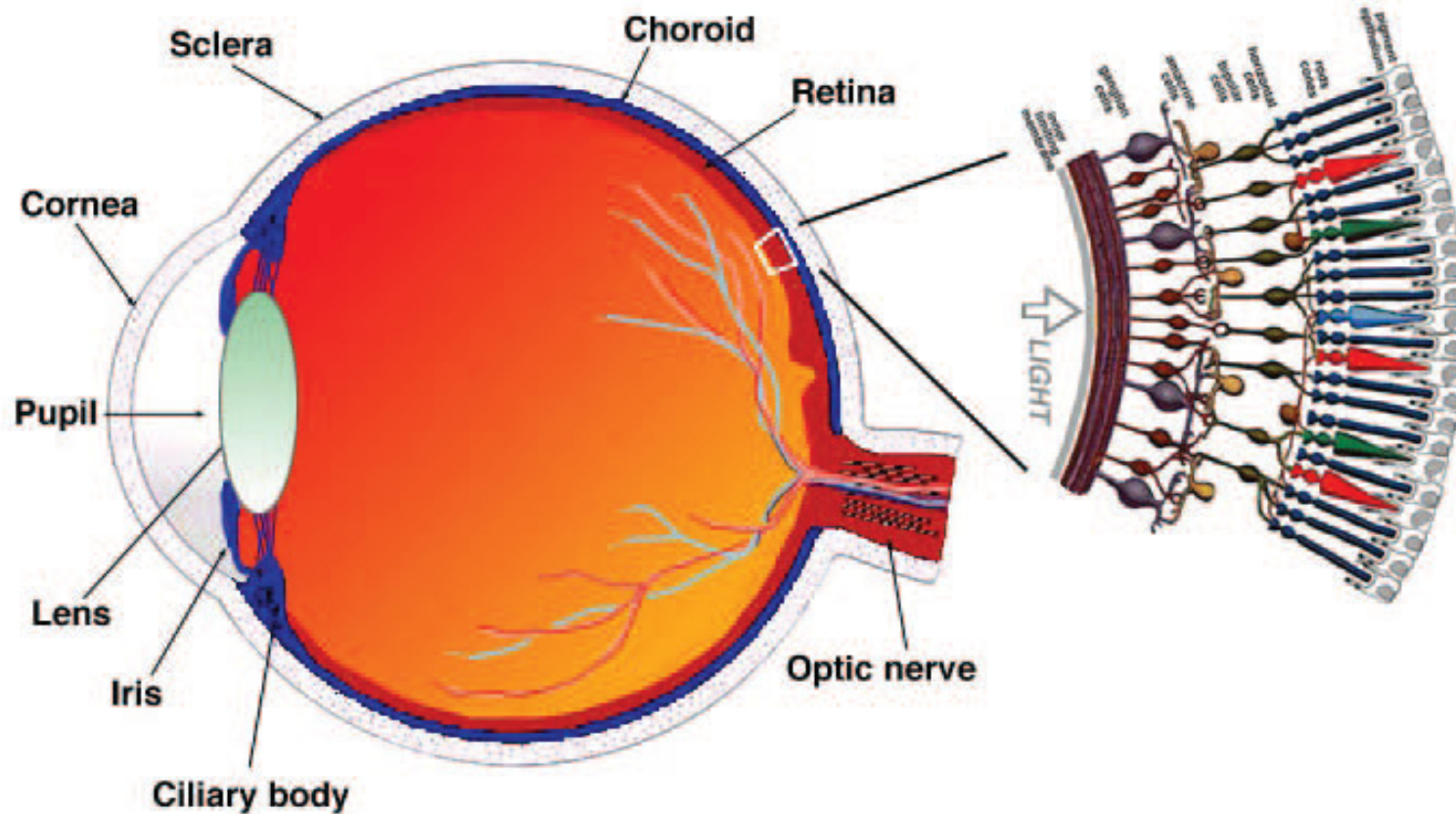


نمونه‌برداری

مثال: نمونه‌برداری در چشم انسان

SAMPLING

Every image that we see is sampled by the retina, which contains ≈ 100 million rods and 6 million cones (average spacing $\approx 3\mu\text{m}$) which act as discrete sensors.



SAMPLING

We live in a continuous-time world: most of the signals we encounter are CT signals, e.g. $x(t)$. How do we convert them into DT signals $x[n]$?

- Sampling, taking snap shots of $x(t)$ every T seconds.

T – sampling period

$x[n] \equiv x(nT)$, $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ — regularly spaced samples

Applications and Examples

- Digital Processing of Signals
- Strobe
- Images in Newspapers
- Sampling Oscilloscope
- ...

How do we perform sampling?

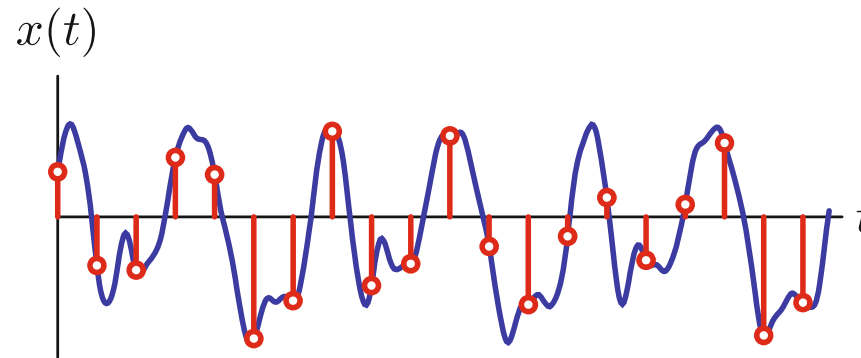
نمونه‌برداری

حفظ اطلاعات در نمونه‌برداری

SAMPLING

نمونه‌برداری چه اثری بر اطلاعات موجود در سیگنال می‌گذارد؟

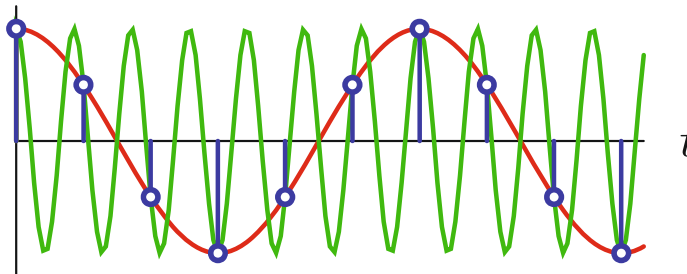
ما دوست داریم نمونه‌برداری را به‌گونه‌ای انجام دهیم که اطلاعات را حفظ کند (که به نظر ممکن نمی‌رسد).



اطلاعات بین نمونه‌ها از دست می‌رود.

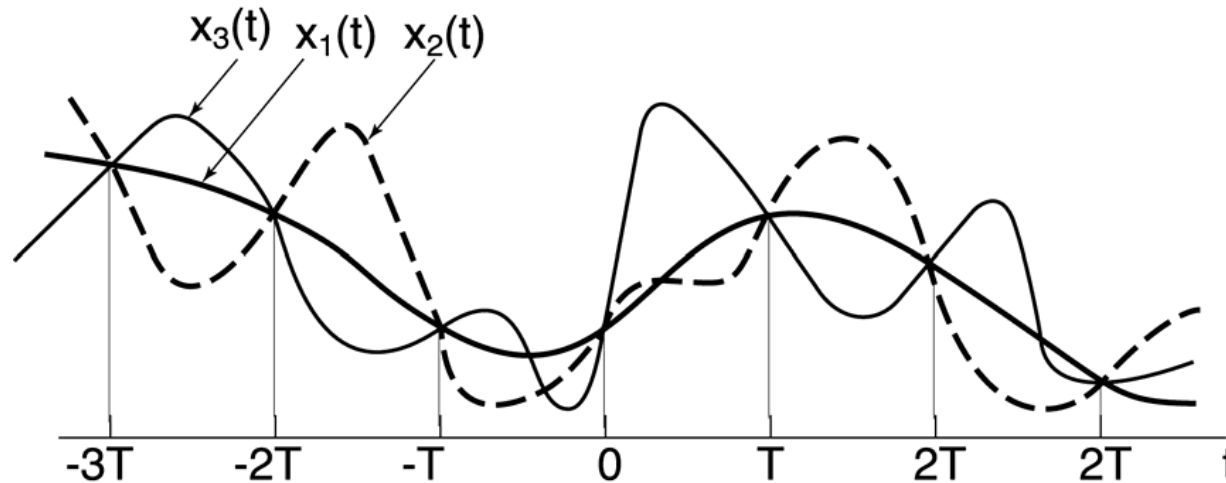
بنابراین، همان نمونه‌ها می‌توانند سیگنال‌های متعددی را بازنمایی کنند.

$$\cos \frac{7\pi}{3}n? \quad \cos \frac{\pi}{3}n?$$



Why/When Would a Set of Samples Be Adequate?

- Observation: *Lots* of signals have the same samples



- By sampling we throw out lots of information
– all values of $x(t)$ between sampling points are lost.
- **Key Question for Sampling:**
Under what conditions can we **reconstruct** the original CT signal $x(t)$ from its samples?

نمونه‌برداری و بازسازی

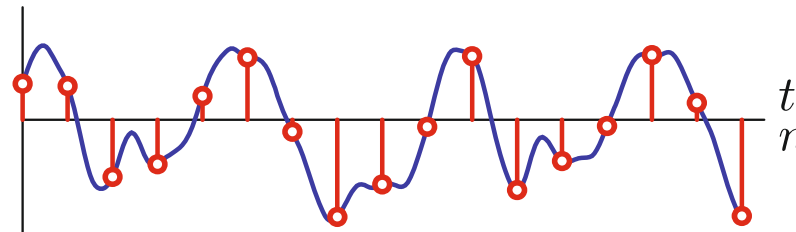
SAMPLING AND RECONSTRUCTION

برای تعیین اثر نمونه‌برداری، سیگنال اصلی $x(t)$ را با سیگنال $x_p(t)$ مقایسه می‌کنیم که از روی نمونه‌های $x[n]$ بازسازی شده است.

Uniform sampling (sampling interval T).

نمونه‌برداری یکنواخت:

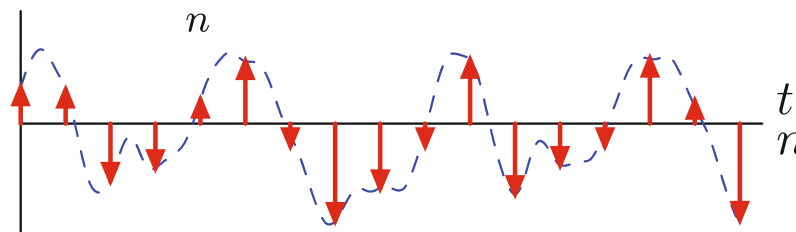
$$x[n] = x(nT)$$



Impulse reconstruction.

بازسازی با ضربه:

$$x_p(t) = \sum_n x[n] \delta(t - nT)$$



بازسازی

RECONSTRUCTION

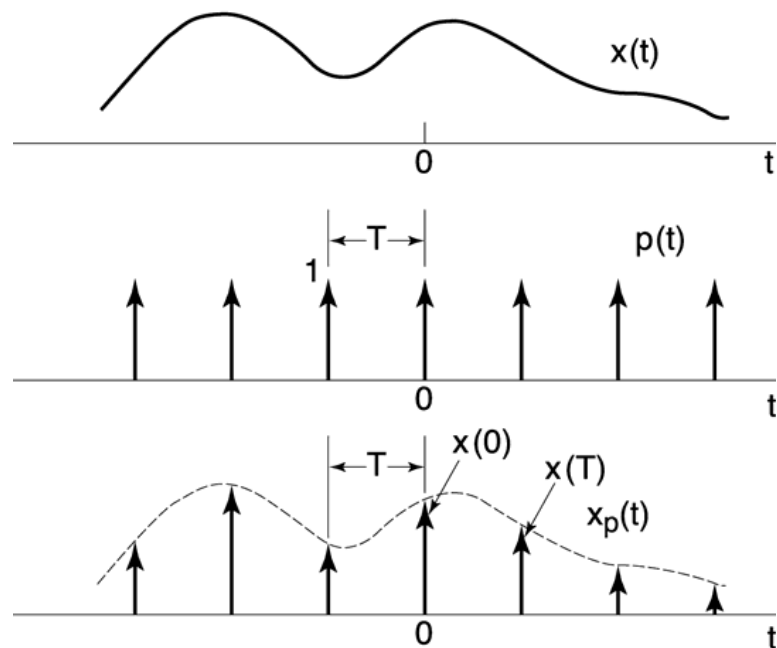
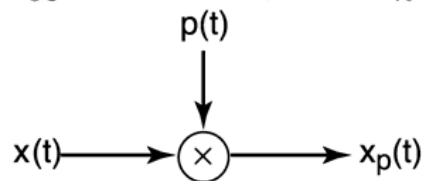
بازسازی ضربه‌ای یک سیگنال $x_p(t)$ را تولید می‌کند که مساوی با سیگنال اصلی $x(t)$ ضرب در قطار ضربه است.

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) \\
 &= x(t) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}_{\equiv p(t)}
 \end{aligned}$$

Impulse Sampling — Multiplying $x(t)$ by the sampling function

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



نمونه برداری (۱)

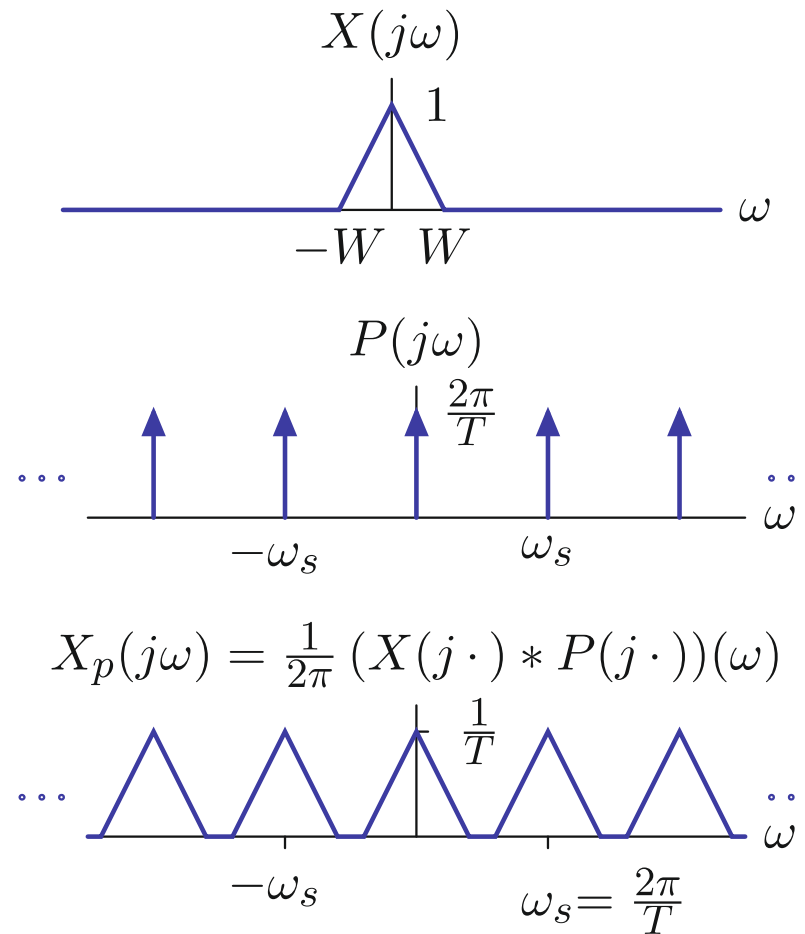
۲

تحلیل
نمونه برداری
در حوزه‌ی
فرکانس

نمونه‌برداری

SAMPLING

ضرب در ضربه، در حوزه‌ی زمان **معادل است** با کانولوشن با قطار ضربه در حوزه‌ی فرکانس
 \Leftarrow کپی‌های متعددی از محتوای فرکانسی اصلی تولید می‌کند.



Analysis of Sampling in the Frequency Domain

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$\text{Multiplication Property} \Rightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \text{Sampling Frequency}$$

Important to
note: $\omega_s \propto 1/T$

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

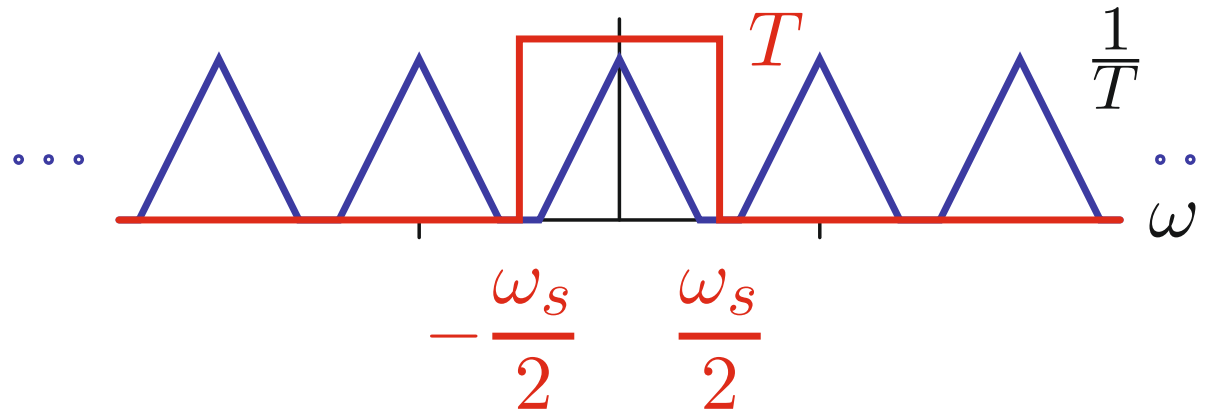
نمونه‌برداری

بازسازی

SAMPLING

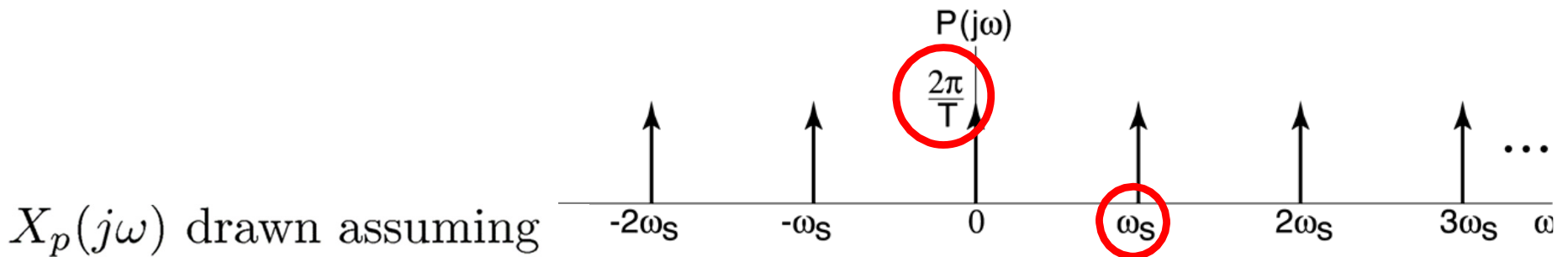
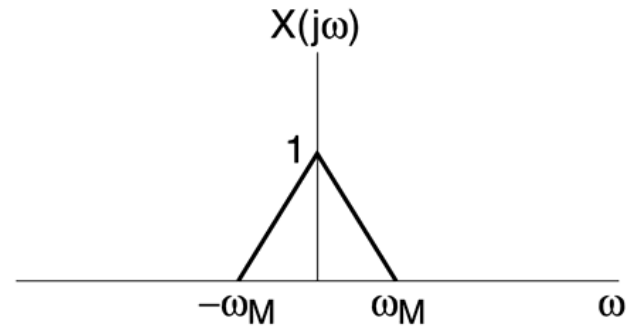
کپی‌های فرکانس بالا می‌توانند با یک فیلتر پایین‌گذر حذف شوند.
(همچنین با ضرب در T برای لغو اثر تغییر مقیاس دامنه)

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (X(j\cdot) * P(j\cdot))(\omega)$$



بازسازی ضربه‌ای که به دنبال آن یک فیلتر پایین‌گذر بیاید، بازسازی باند محدود نام دارد.

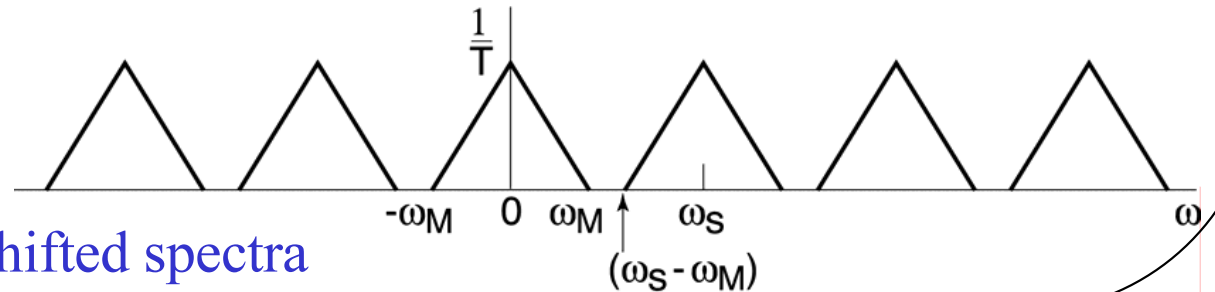
Illustration of sampling in the frequency-domain for a band-limited ($X(j\omega) = 0$ for $|\omega| > \omega_M$) signal



$$\omega_s - \omega_M > \omega_M$$

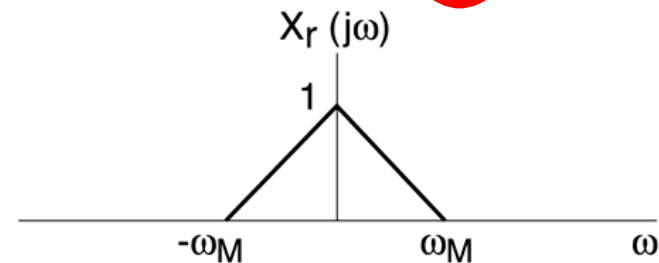
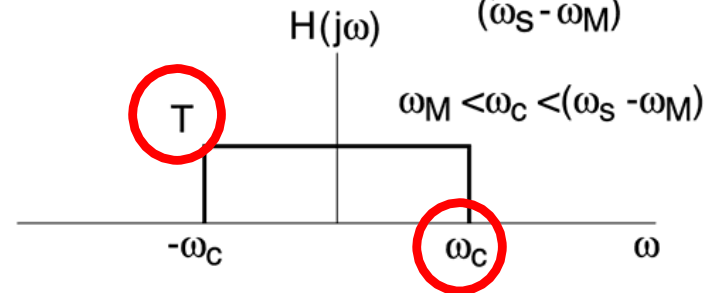
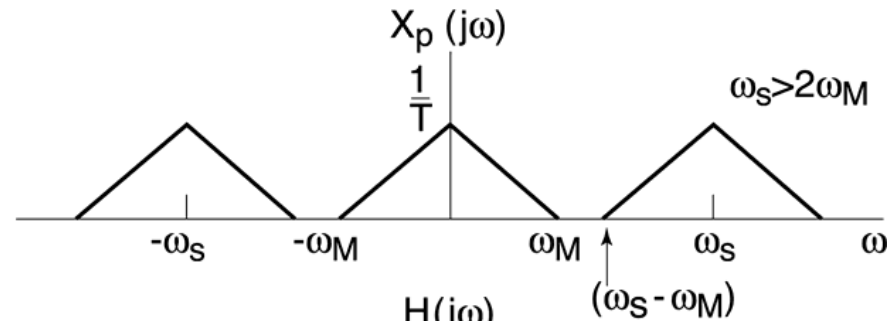
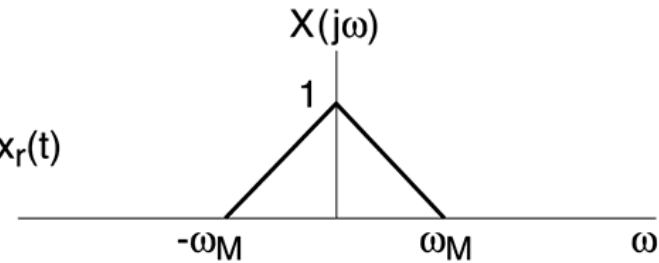
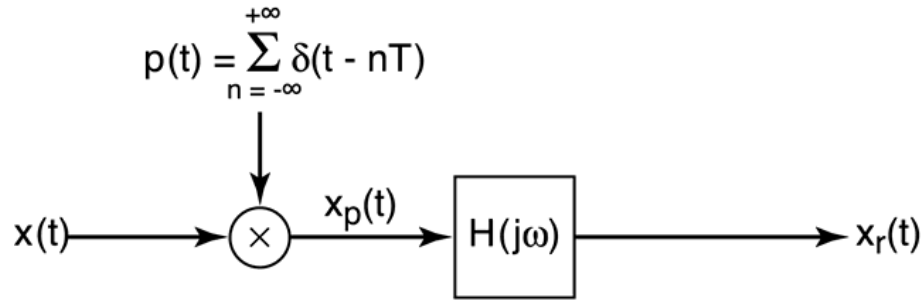
i.e. $\omega_s > 2\omega_M$

$$X_p(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega) / 2\pi$$



No overlap between shifted spectra

Reconstruction of $x(t)$ from sampled signals



If there is no overlap between shifted spectra, a LPF can reproduce $x(t)$ from $x_p(t)$

نمونه برداری (۱)

۳

قضیه‌ی
نمونه برداری

—

نرخ
نایکوئیست

قضیه‌ی نمونه‌برداری

THE SAMPLING THEOREM

اگر یک سیگنال دارای باند محدود باشد،
می‌توان نمونه‌برداری را بدون از دست رفتن اطلاعات انجام داد.

اگر $x(t)$ یک سیگنال باند محدود باشد به گونه‌ای که

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{for} \quad |\omega| > \omega_m$$

آن‌گاه $x(t)$ می‌تواند به طور یکتا توسط نمونه‌هایش $x(nT)$ تعیین شود اگر

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_m.$$

کوچکترین فرکانس نمونه‌برداری، $2\omega_m$ ، «**نرخ نایکوئیست**» نام دارد.

The Sampling Theorem

Suppose $x(t)$ is bandlimited, so that

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| > \omega_M$$

Then $x(t)$ is uniquely determined by its samples $\{x(nT)\}$ if

$$\omega_s > 2\omega_M = \text{The Nyquist rate}$$

$$\text{where } \omega_s = 2\pi/T$$

نمونه‌برداری

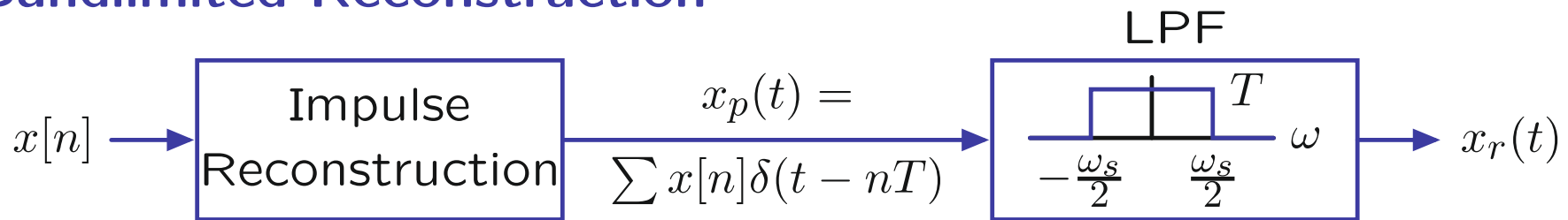
خلاصه

SAMPLING

Sampling

$$x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$$

Bandlimited Reconstruction

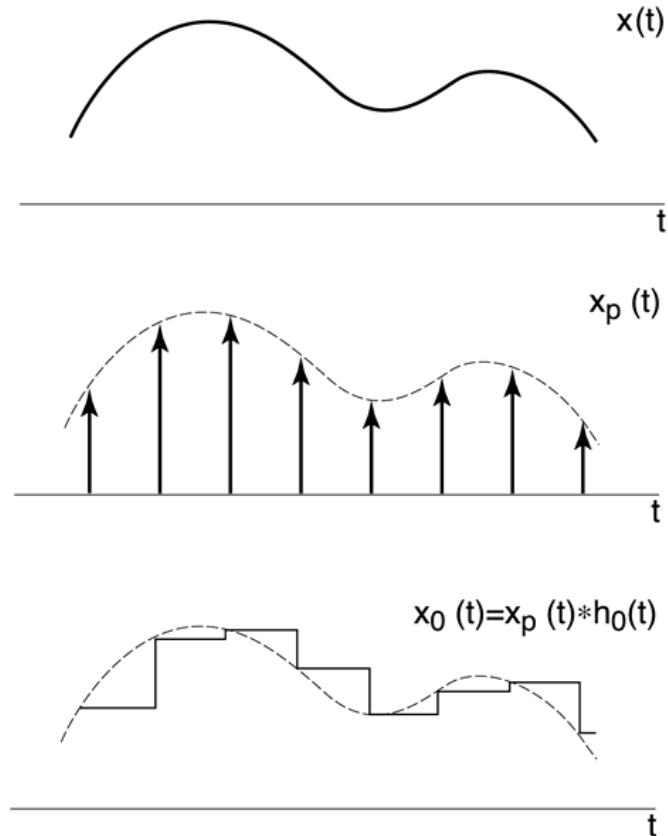
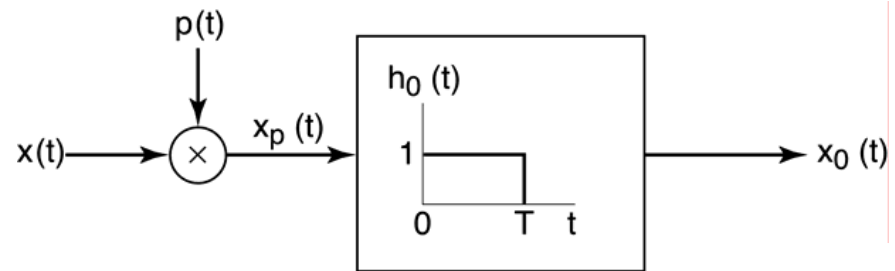


Sampling Theorem: If $X(j\omega) = 0 \quad \forall \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ then $x_r(t) = x(t)$.

Observations on Sampling

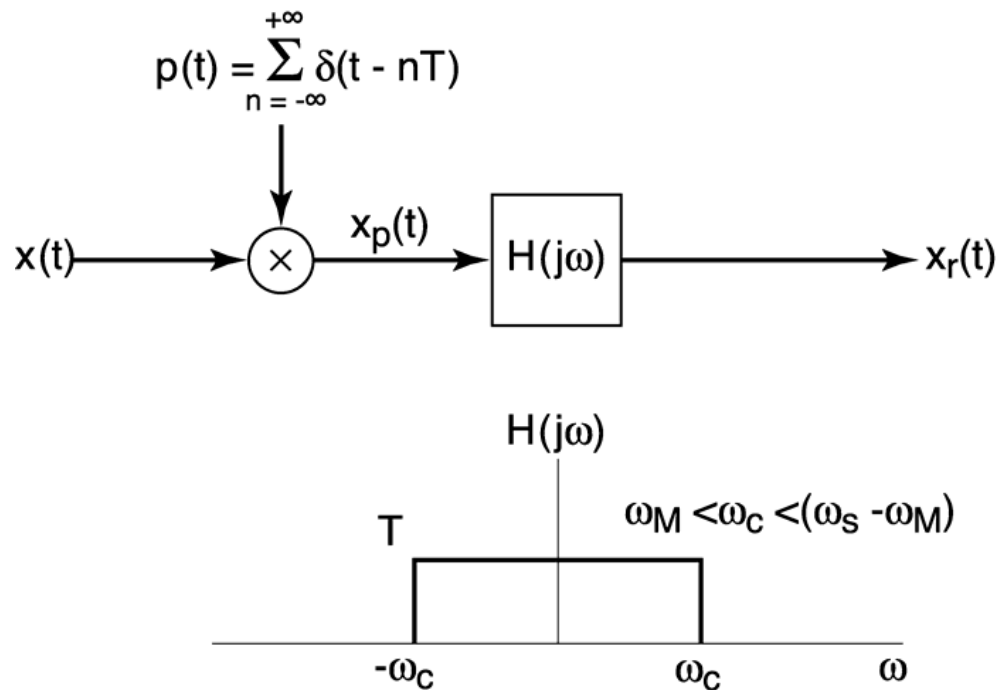
(1) In practice, we obviously don't sample with impulses or implement ideal lowpass filters.

— One practical example:
The Zero-Order Hold



Observations (Continued)

- (2) Sampling is fundamentally a *time-varying* operation, since we multiply $x(t)$ with a time-varying function $p(t)$. However,



is the identity system (which is TI) for bandlimited $x(t)$ satisfying the sampling theorem ($\omega_s > 2\omega_M$).

- (3) What if $\omega_s \leq 2\omega_M$? Something different: more later.

نمونه برداری (۱)

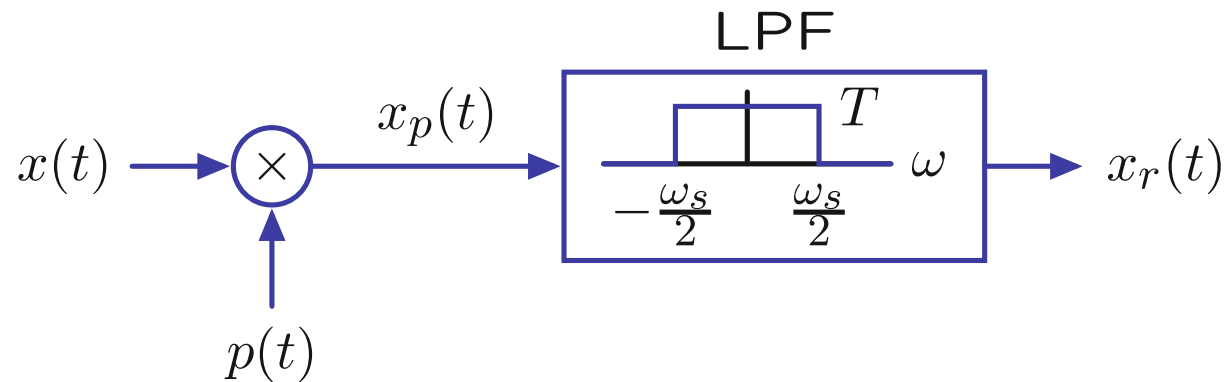
۴

در حوزه‌ی
زمان:
درون‌یابی

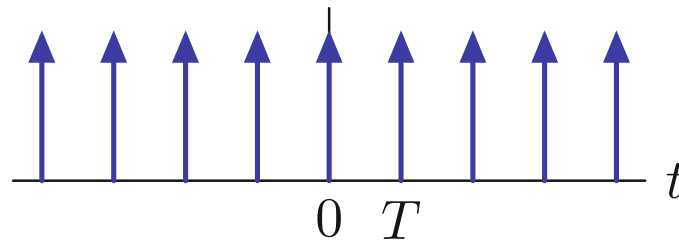
مدل پیوسته-زمان نمونه‌برداری و بازسازی

CT MODEL OF SAMPLING AND RECONSTRUCTION

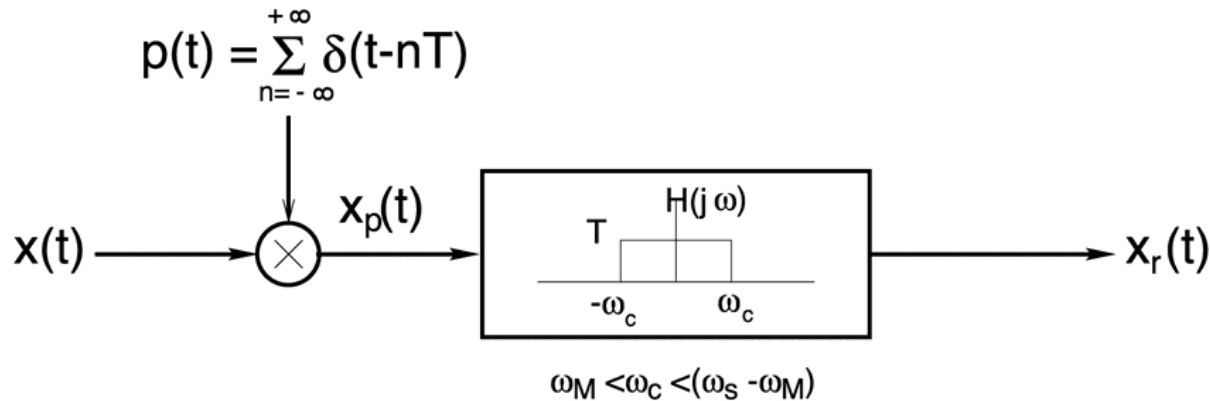
نمونه‌برداری که به دنبال آن بازسازی باند محدود انجام شود، معادل است با ضرب در قطار ضربه و به دنبال آن فیلتر کردن پایین‌گذر



$p(t) = \text{"sampling function"}$



Time-Domain Interpretation of Reconstruction of Sampled Signals — Band-Limited Interpolation

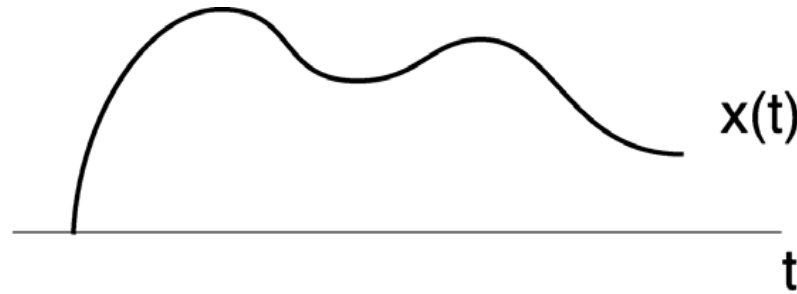


$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= x_p(t) * h(t) \quad , \quad \text{where } h(t) = \frac{T \sin \omega_c t}{\pi t} \\
 &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) * h(t) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{T \sin[\omega_c(t - nT)]}{\pi(t - nT)}
 \end{aligned}$$

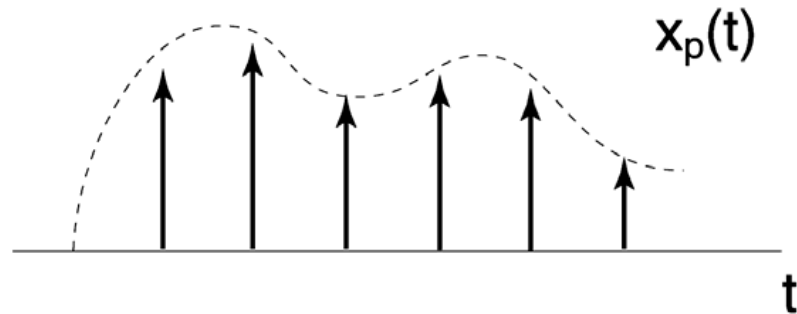
The lowpass filter interpolates the samples *assuming* $x(t)$ contains no energy at frequencies $\geq \omega_c$

Graphic Illustration of Time-Domain Interpolation

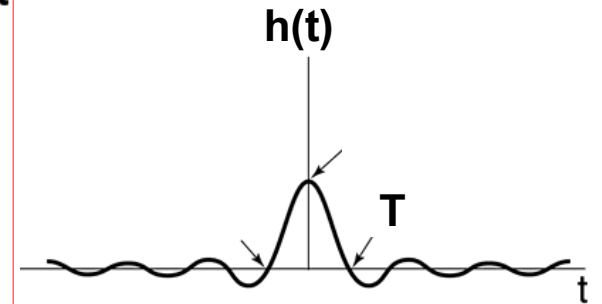
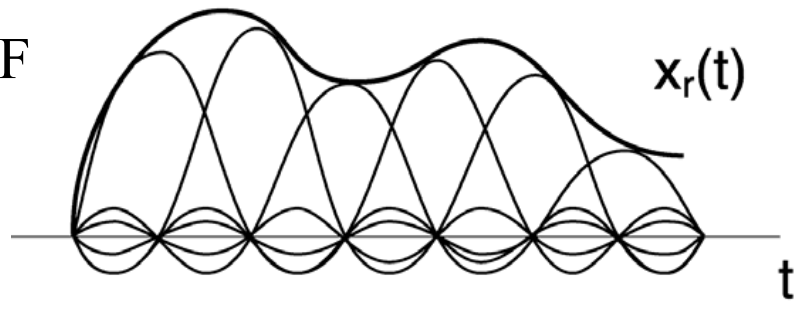
Original
CT signal



After sampling

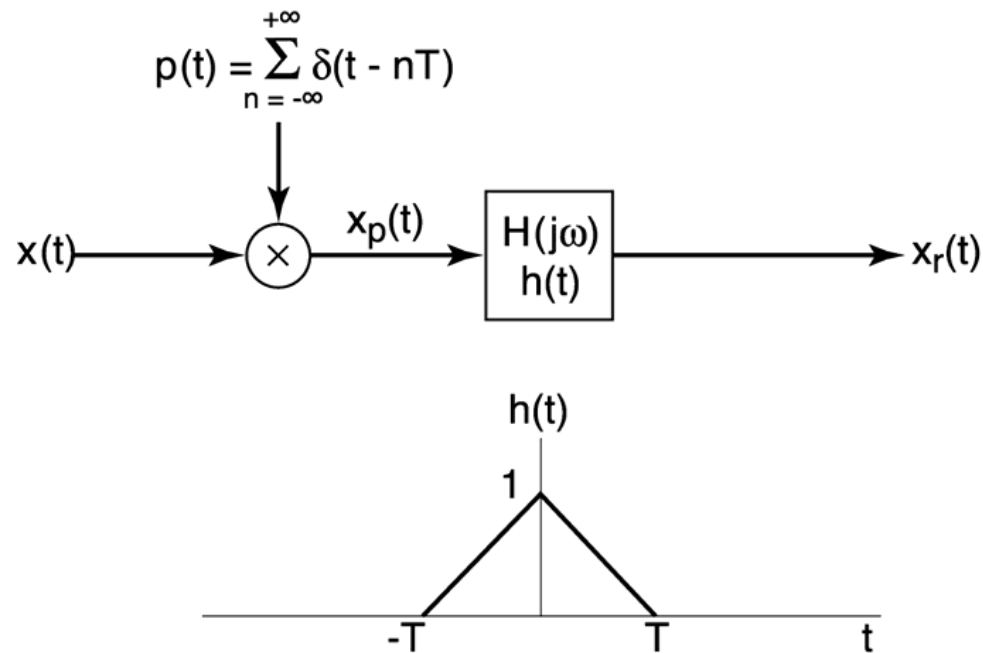
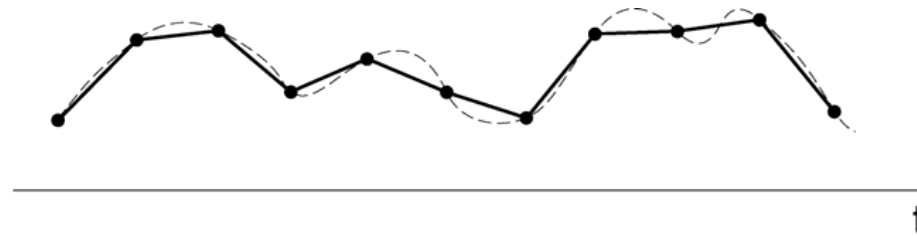


After passing the LPF



Interpolation Methods

- Bandlimited Interpolation
- Zero-Order Hold
- First-Order Hold — Linear interpolation



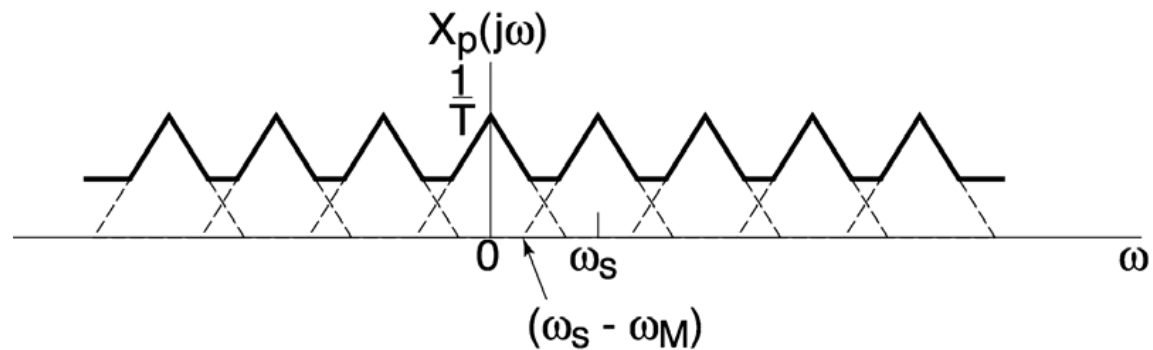
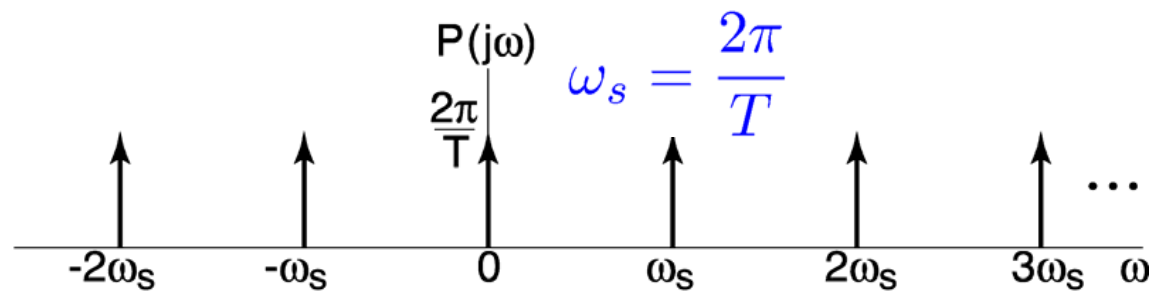
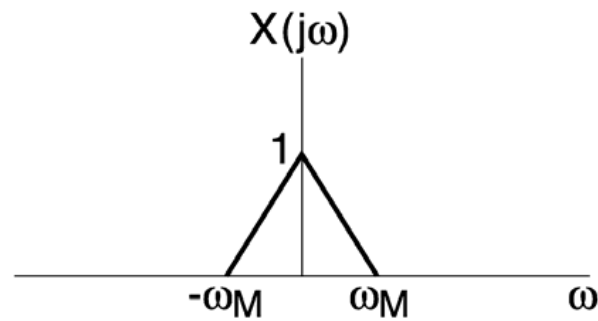
نمونه برداری (۱)

۵

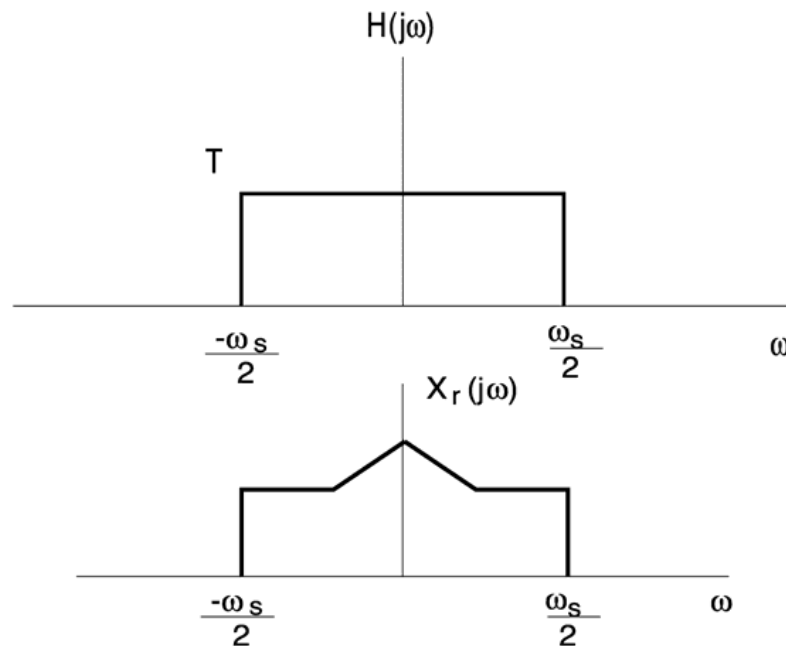
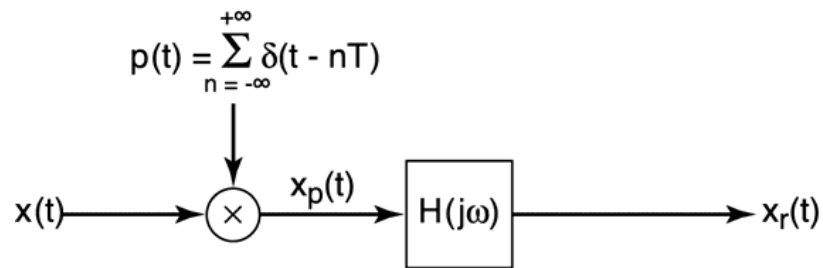
زیر نمونه
- برداری
و آلیاسینگ

Undersampling and Aliasing

When $\omega_s \leq 2\omega_M \Rightarrow$ Undersampling



Undersampling and Aliasing (continued)

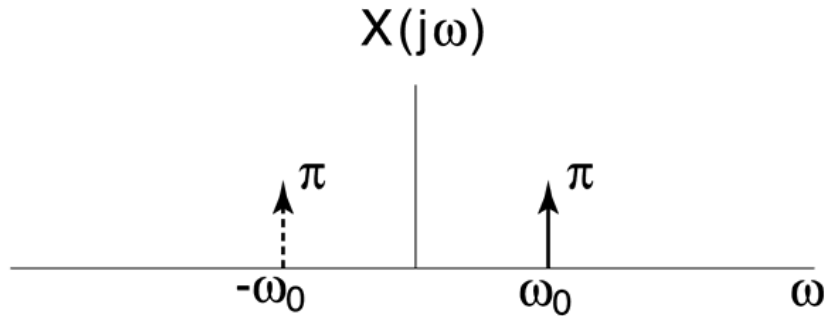


$X_r(j\omega) \neq X(j\omega)$
Distortion because
of *aliasing*

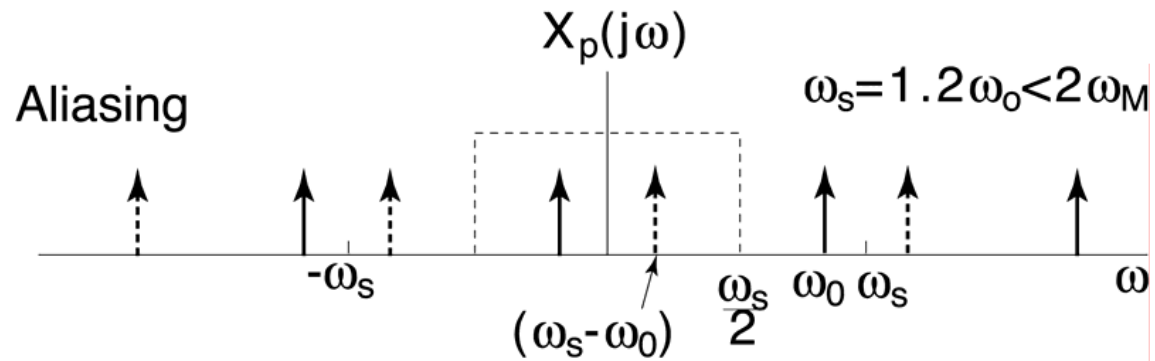
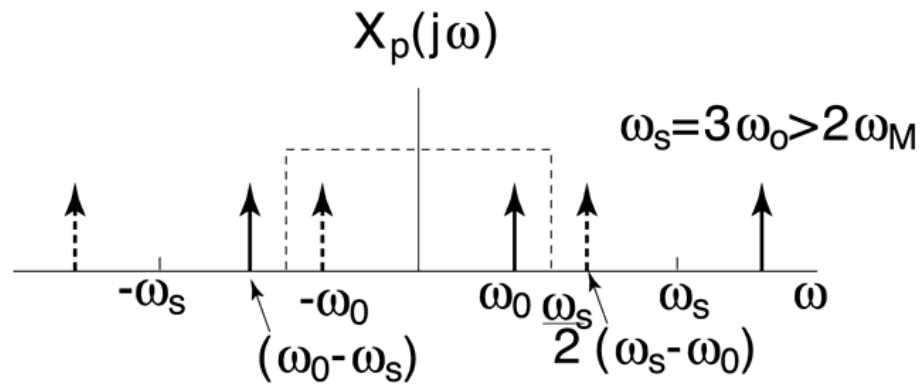
- Higher frequencies of $x(t)$ are “folded back” and take on the “aliases” of lower frequencies
- Note that at the sample times, $x_r(nT) = x(nT)$

A Simple Example

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$$



Picture would be Modified...

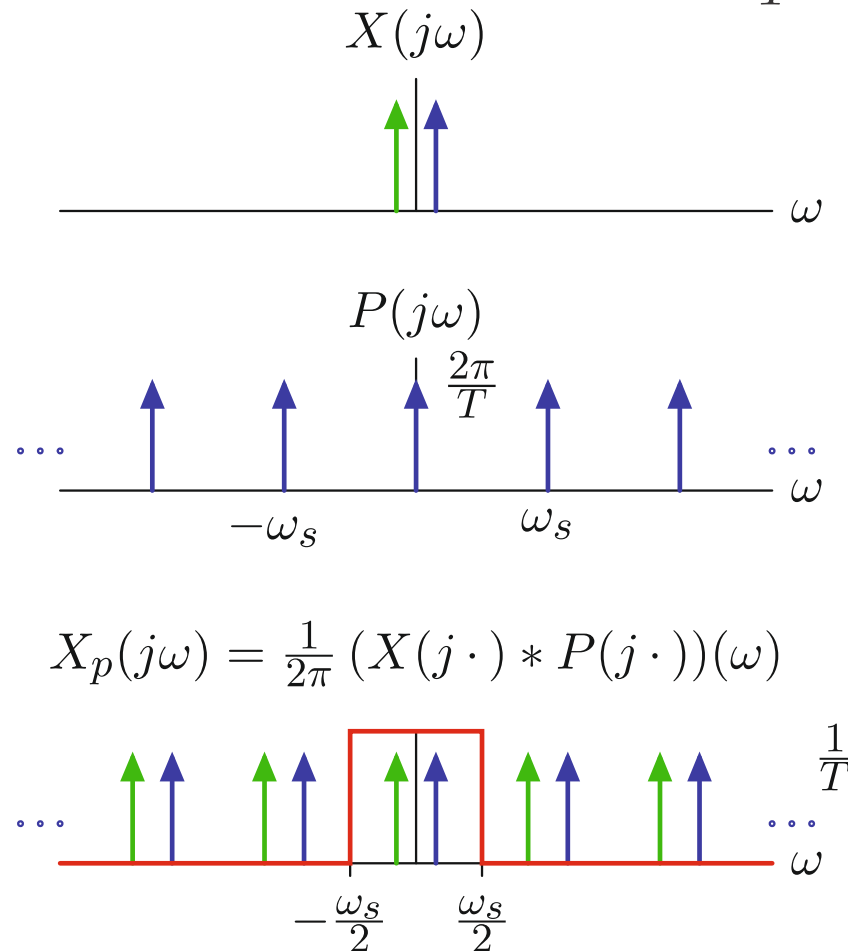


Demo: Sampling and reconstruction of $\cos\omega_0 t$

آلیاسینگ

ALIASING

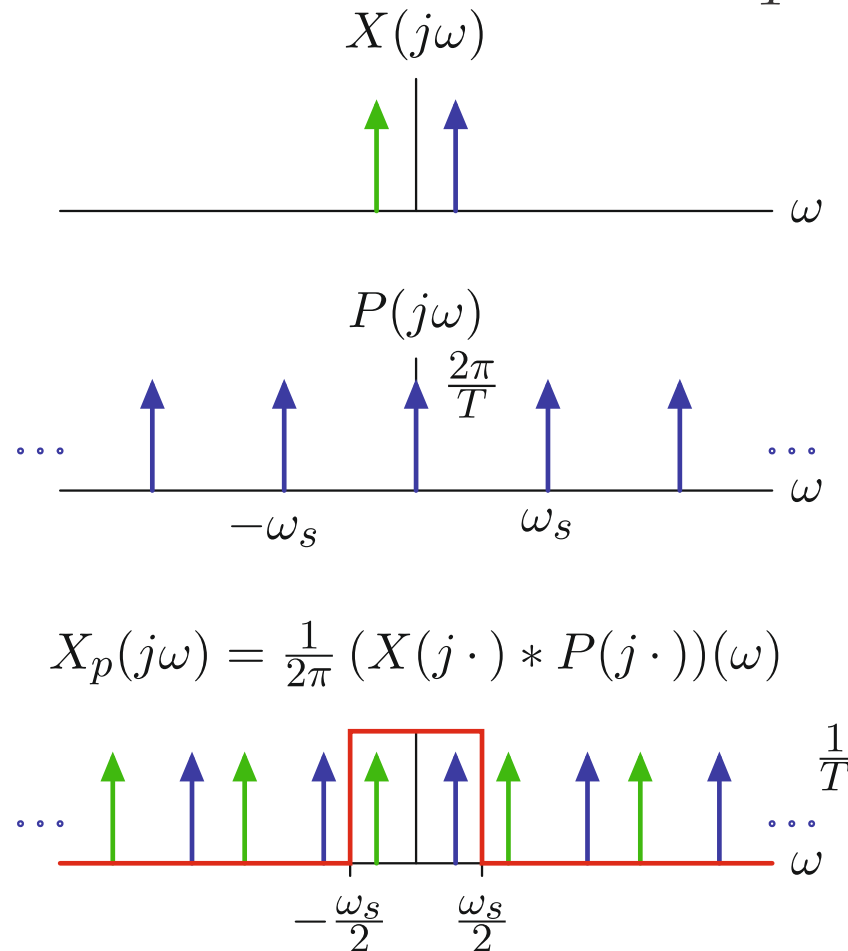
What happens if X contains frequencies $|\omega| > \frac{\pi}{T}$?



آلیاسینگ

ALIASING

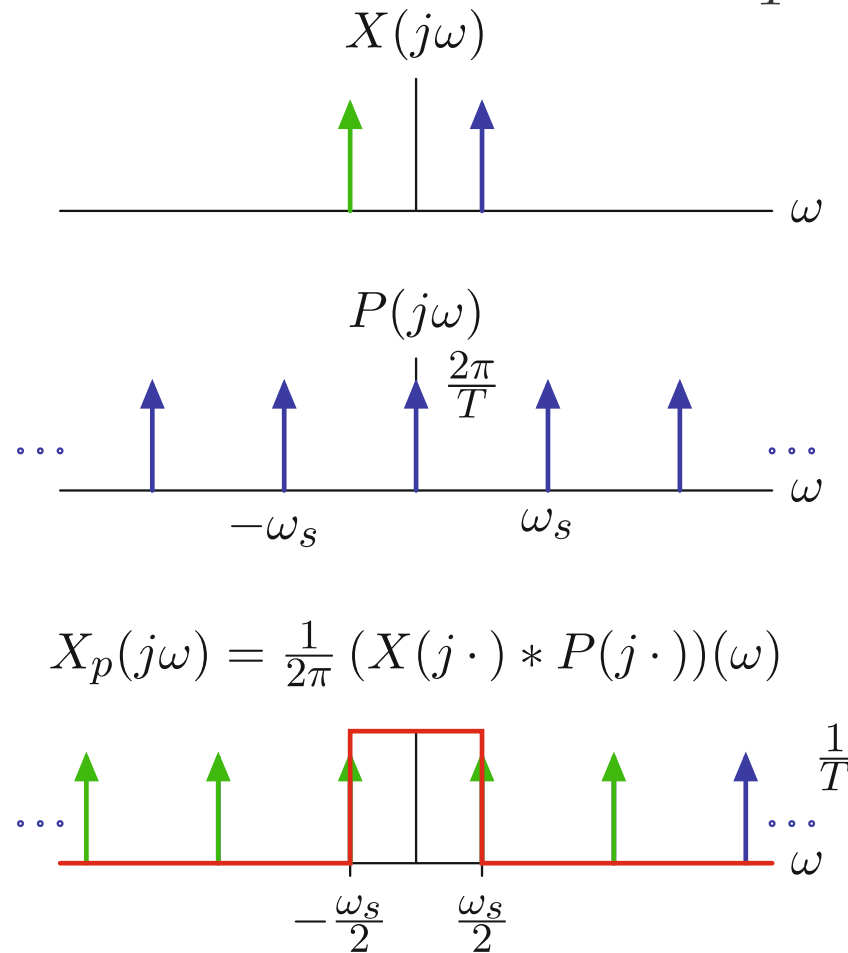
What happens if X contains frequencies $|\omega| > \frac{\pi}{T}$?



آلیاسینگ

ALIASING

What happens if X contains frequencies $|\omega| > \frac{\pi}{T}$?

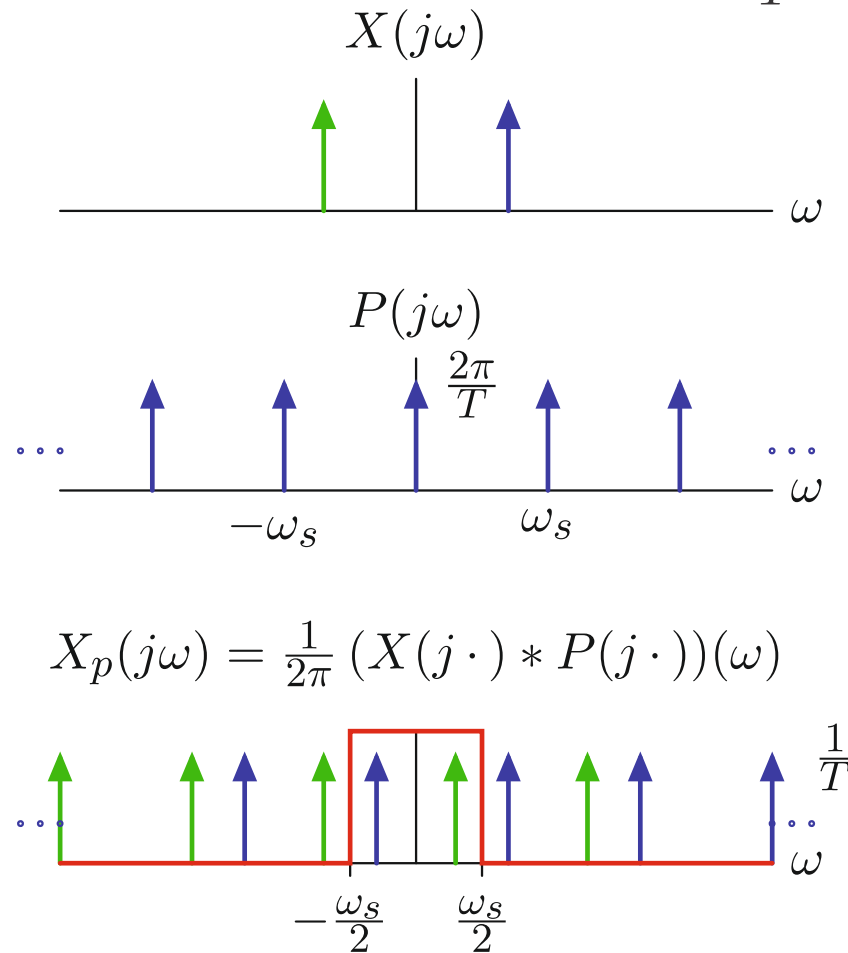


$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (X(j\cdot) * P(j\cdot))(\omega)$$

آلیاسینگ

ALIASING

What happens if X contains frequencies $|\omega| > \frac{\pi}{T}$?

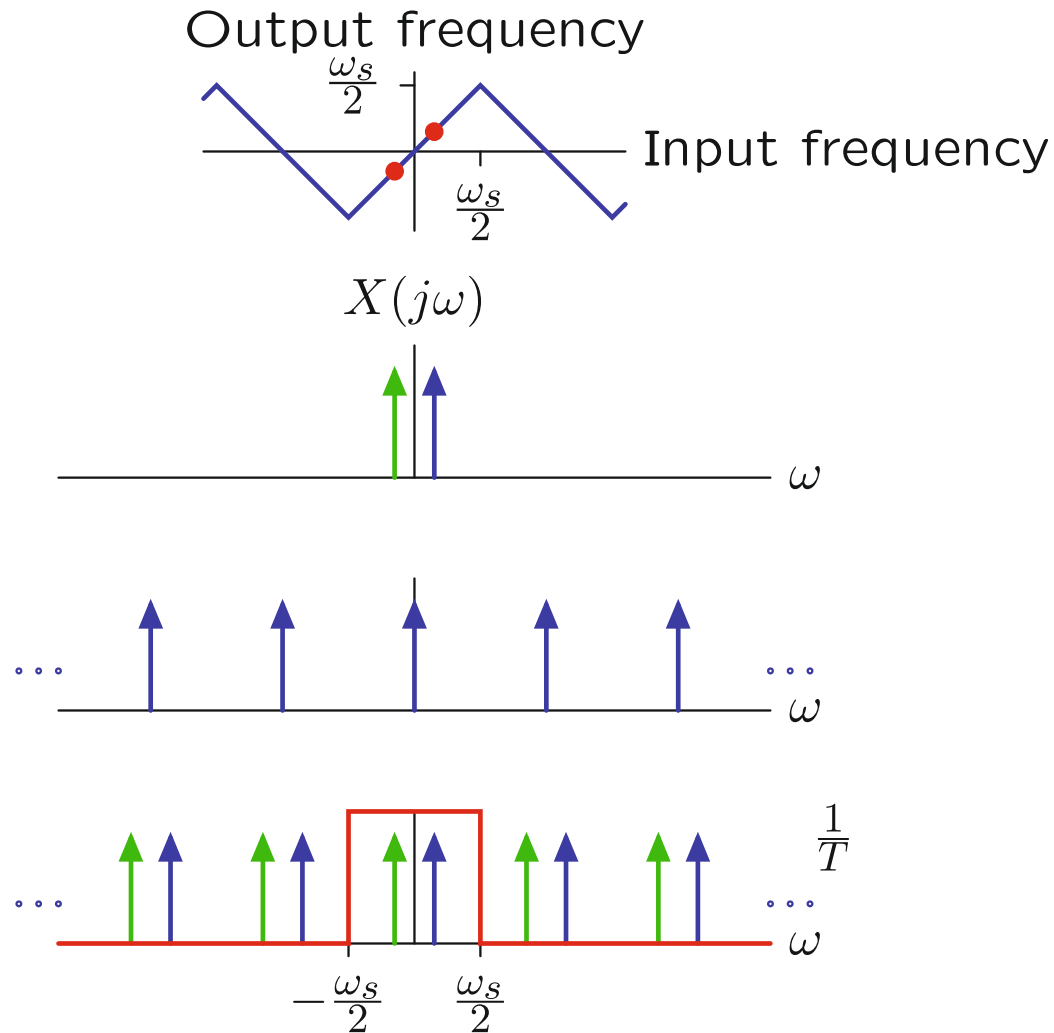


$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (X(j \cdot) * P(j \cdot))(\omega)$$

آلیاسینگ

ALIASING

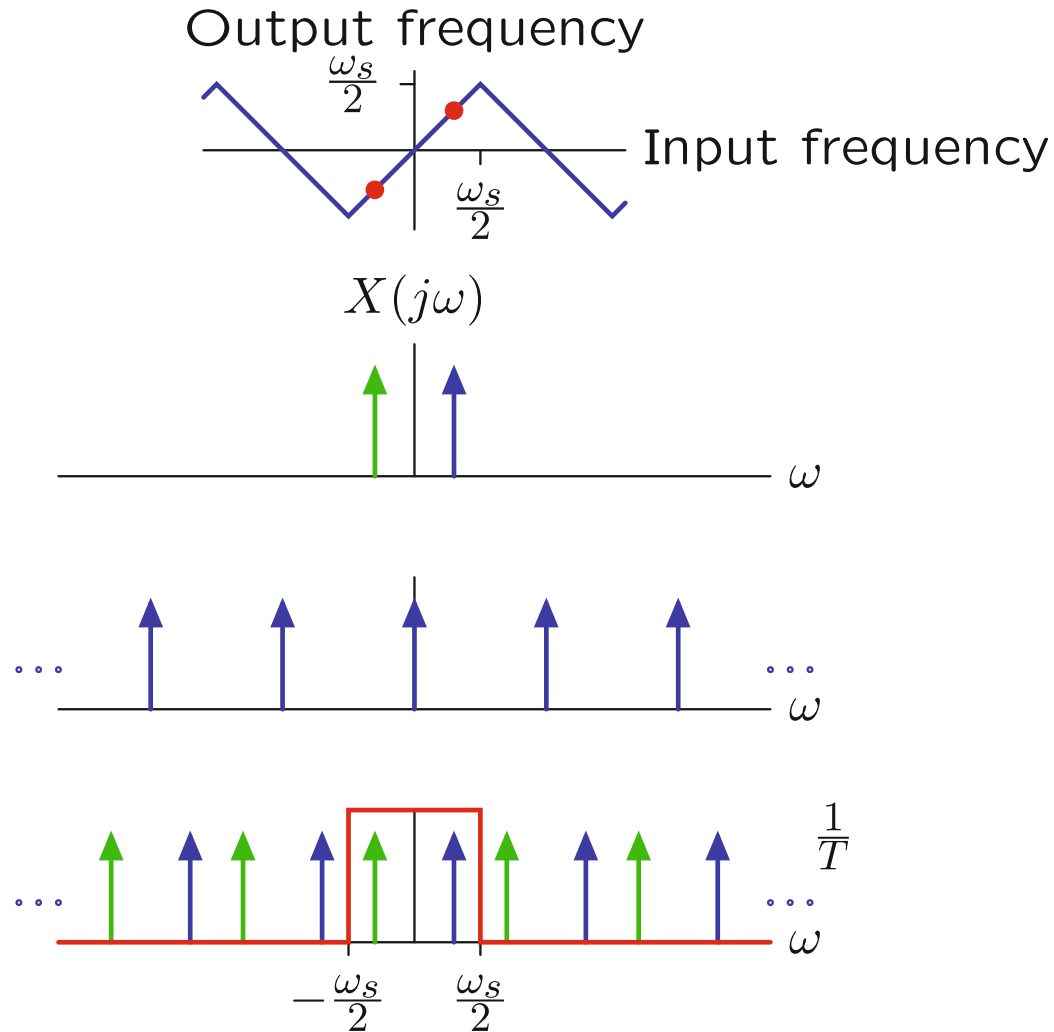
The effect of aliasing is to wrap frequencies.



آلیاسینگ

ALIASING

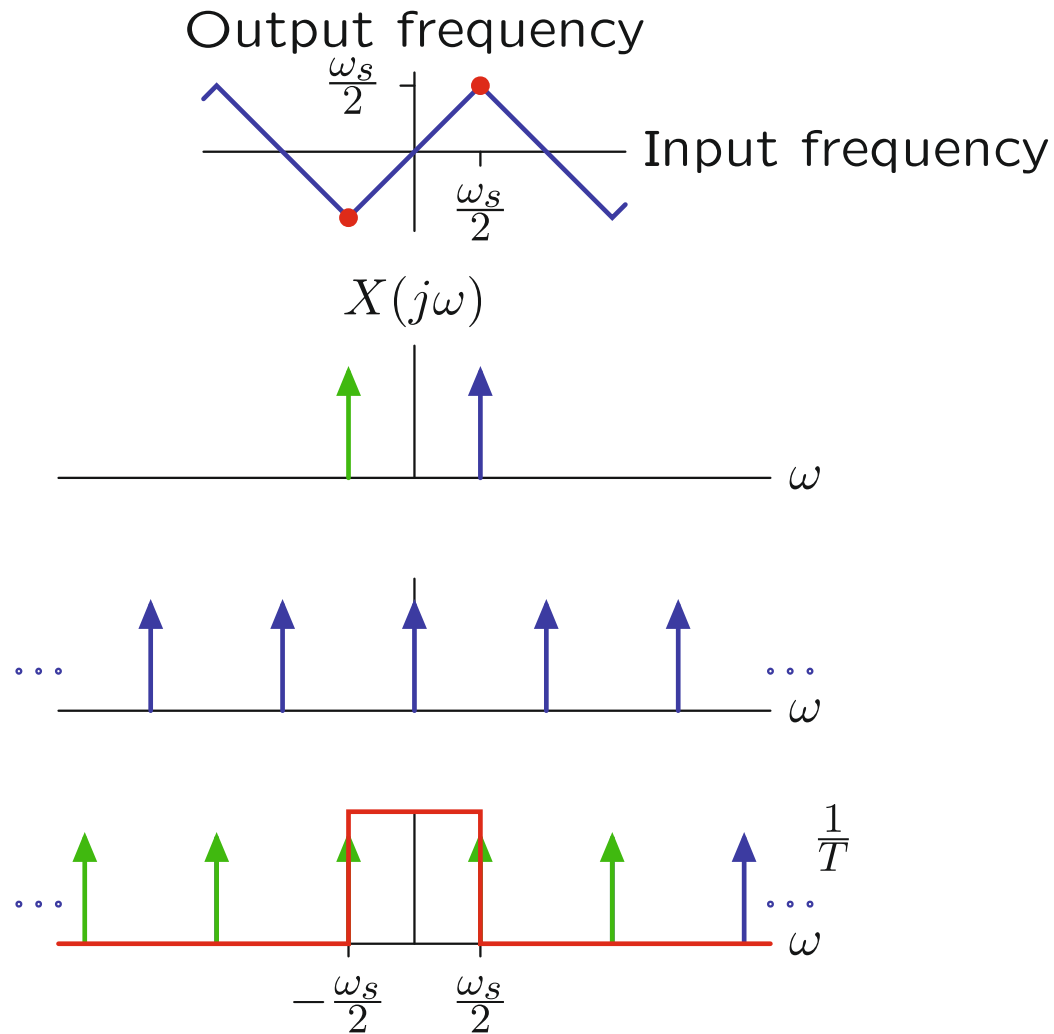
The effect of aliasing is to wrap frequencies.



آلیاسینگ

ALIASING

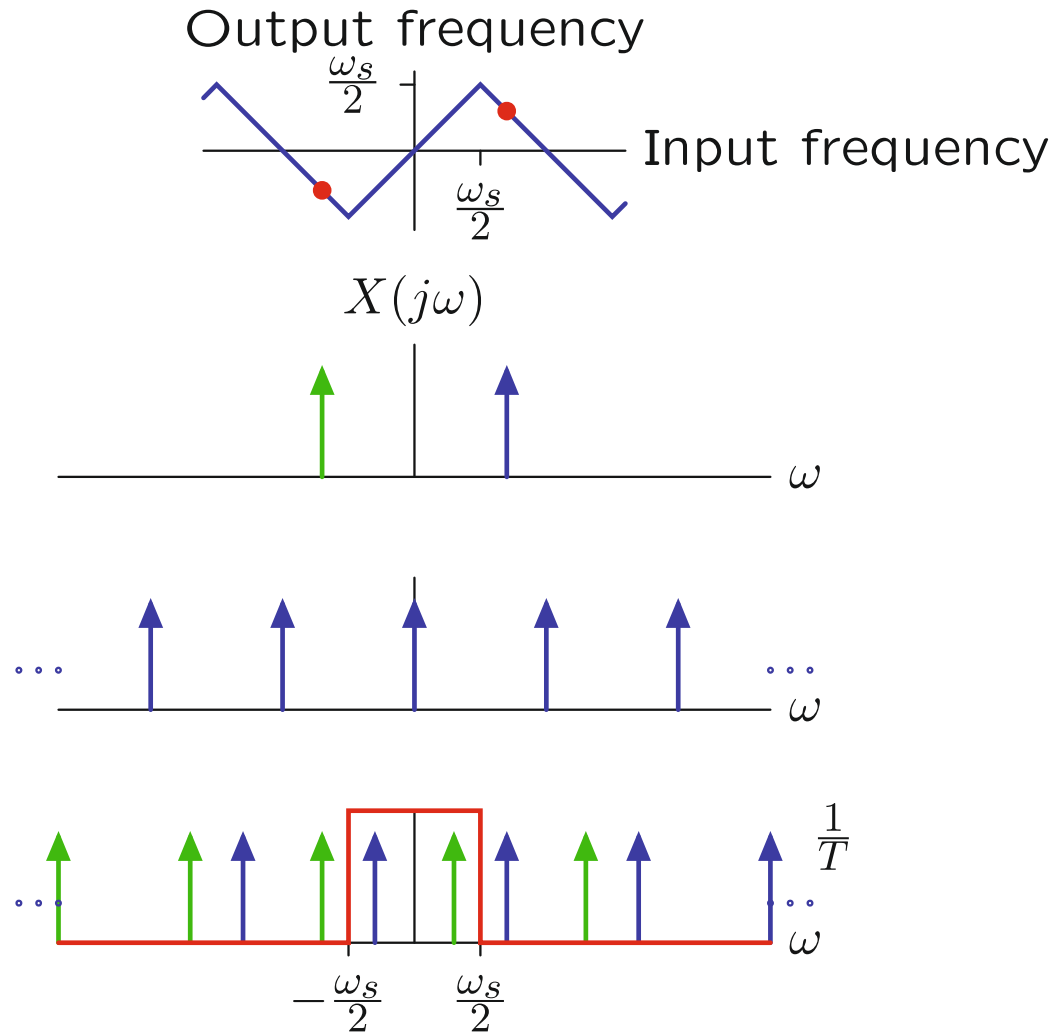
The effect of aliasing is to wrap frequencies.



آلیاسینگ

ALIASING

The effect of aliasing is to wrap frequencies.



آلیاسینگ

مثال (۱ از ۴)

ALIASING

A periodic signal with a period of 0.1 ms is sampled at 44 kHz.

To what frequency does the eighth harmonic alias?

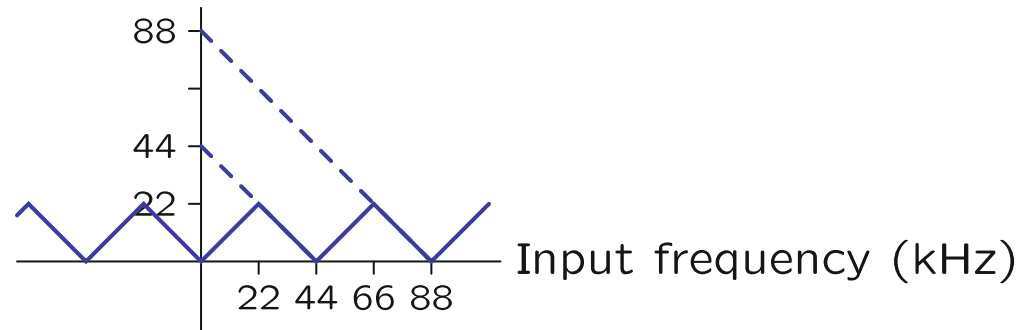
1. 18 kHz
2. 16 kHz
3. 14 kHz
4. 8 kHz
5. 6 kHz
6. none of the above

آلیاسینگ

مثال (۲ از ۴)

ALIASING

Output frequency (kHz)



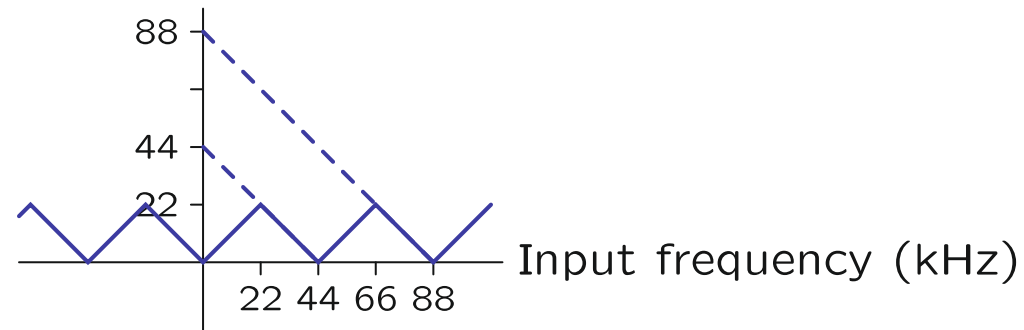
Input frequency (kHz)

آلیاسینگ

مثال (۳ از ۴)

ALIASING

Output frequency (kHz)



Harmonic	Alias
10 kHz	10 kHz
20 kHz	20 kHz
30 kHz	$44 \text{ kHz} - 30 \text{ kHz} = 14 \text{ kHz}$
40 kHz	$44 \text{ kHz} - 40 \text{ kHz} = 4 \text{ kHz}$
50 kHz	$50 \text{ kHz} - 44 \text{ kHz} = 6 \text{ kHz}$
60 kHz	$60 \text{ kHz} - 44 \text{ kHz} = 16 \text{ kHz}$
70 kHz	$88 \text{ kHz} - 70 \text{ kHz} = 18 \text{ kHz}$
80 kHz	$88 \text{ kHz} - 80 \text{ kHz} = 8 \text{ kHz}$

آلیاسینگ

مثال (۴ از ۴)

ALIASING

A periodic signal with a period of 0.1 ms is sampled at 44 kHz.

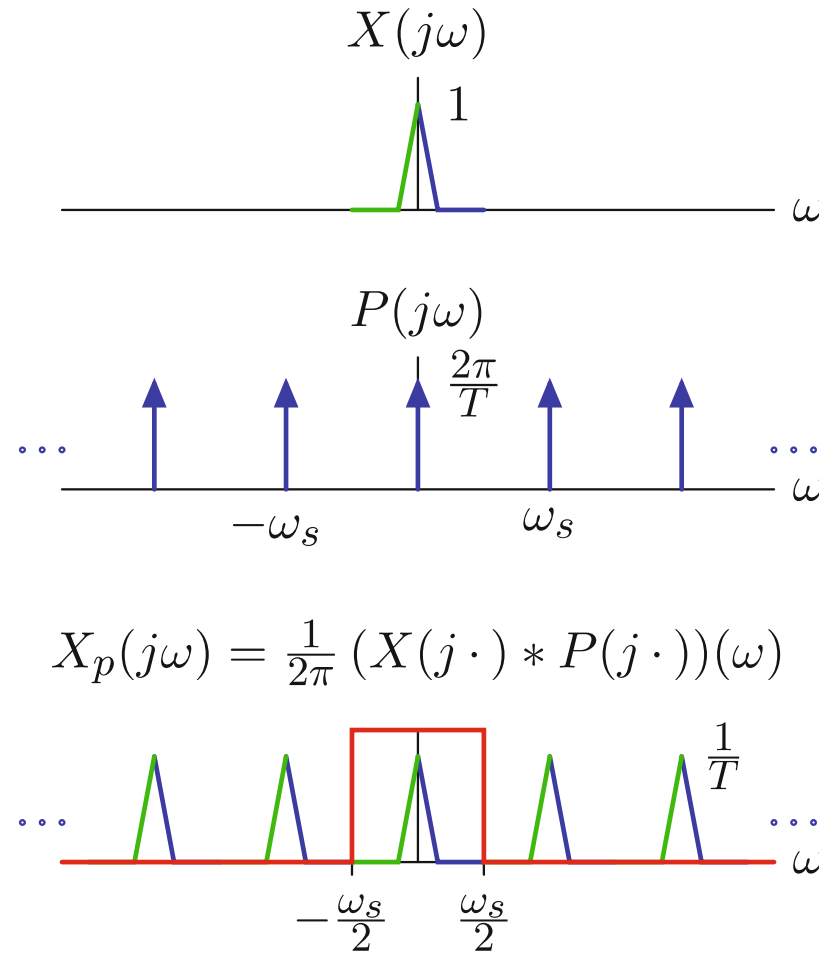
To what frequency does the eighth harmonic alias?

1. 18 kHz
2. 16 kHz
3. 14 kHz
4. 8 kHz
5. 6 kHz
6. none of the above

آلیاسینگ

ALIASING

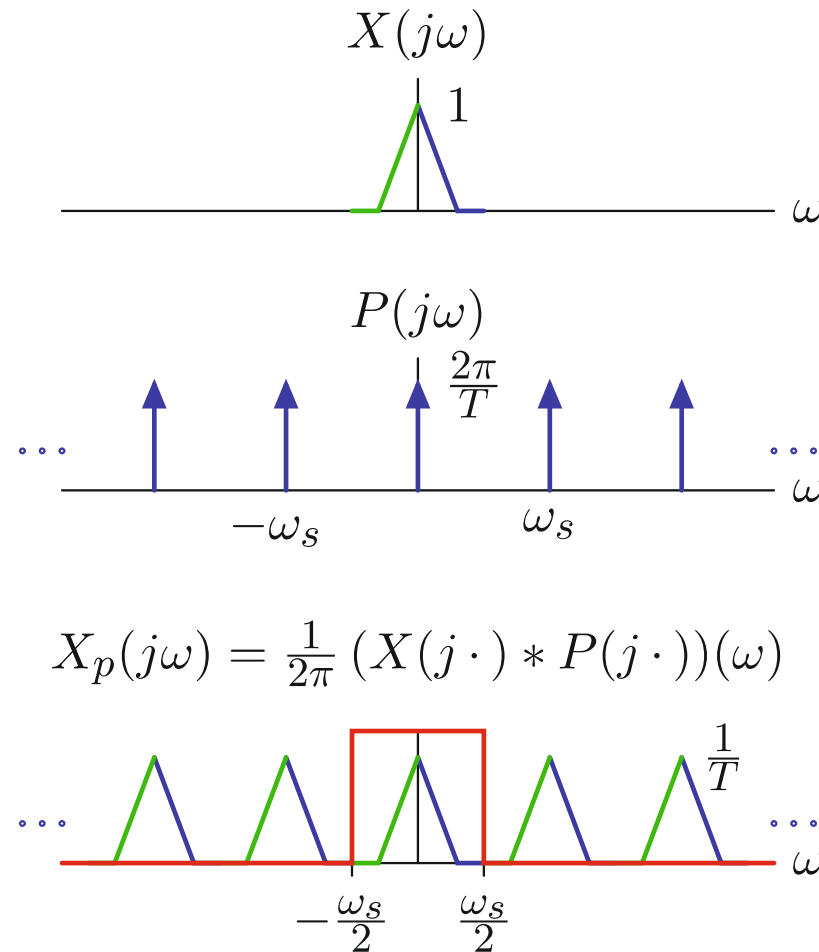
High frequency components of complex signals also wrap.



آلیاسینگ

ALIASING

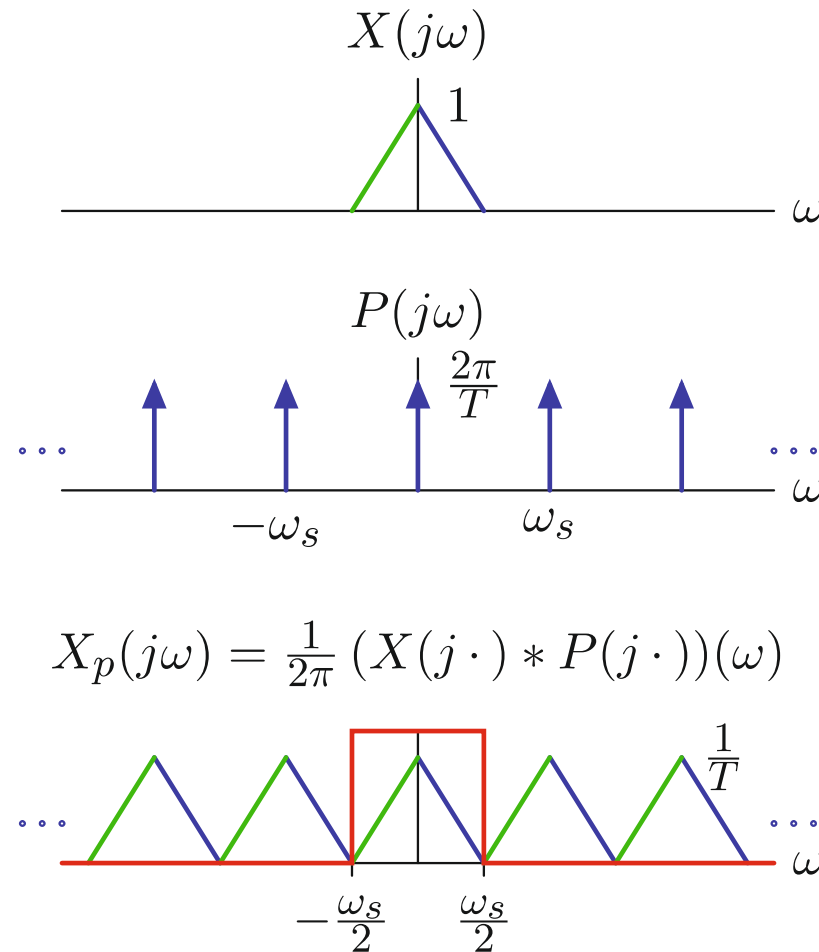
High frequency components of complex signals also wrap.



آلیاسینگ

ALIASING

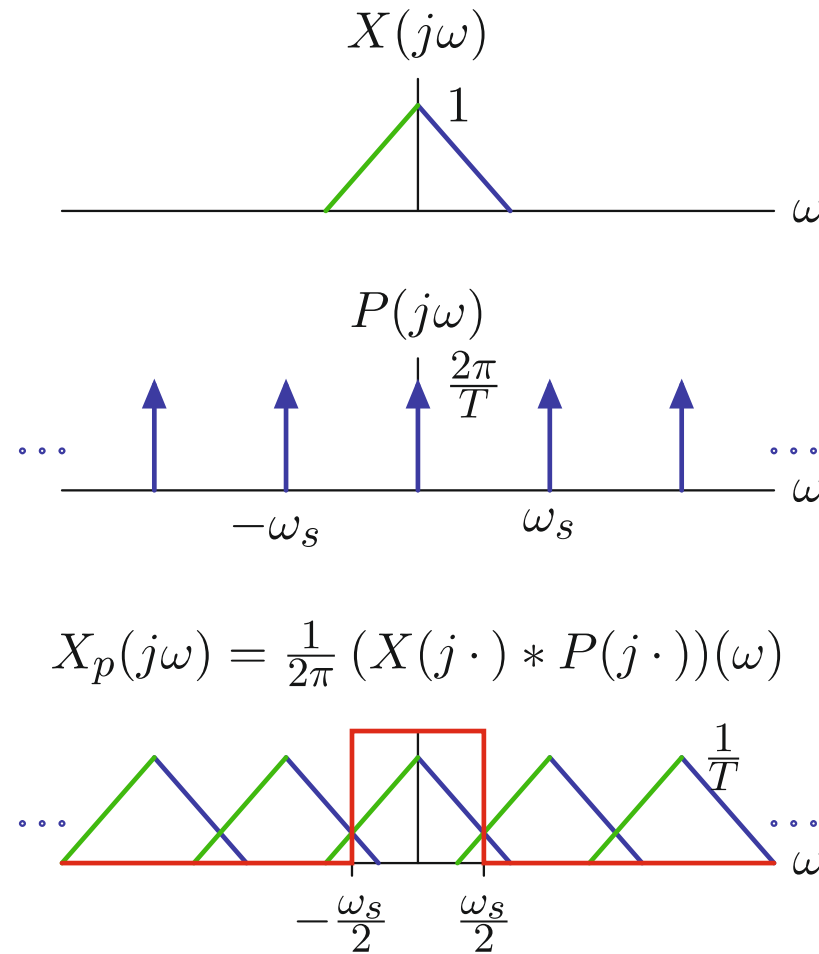
High frequency components of complex signals also wrap.



آلیاسینگ

ALIASING

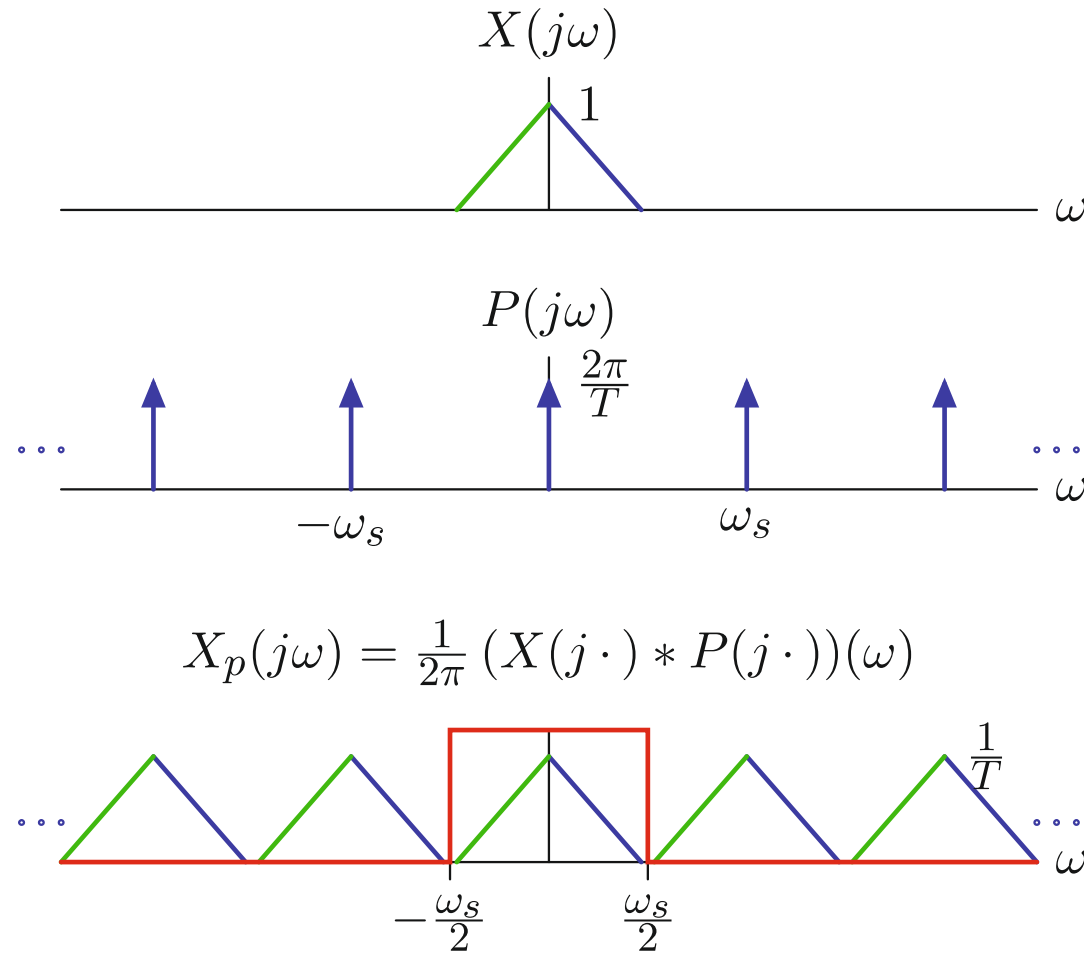
High frequency components of complex signals also wrap.



آلیاسینگ

ALIASING

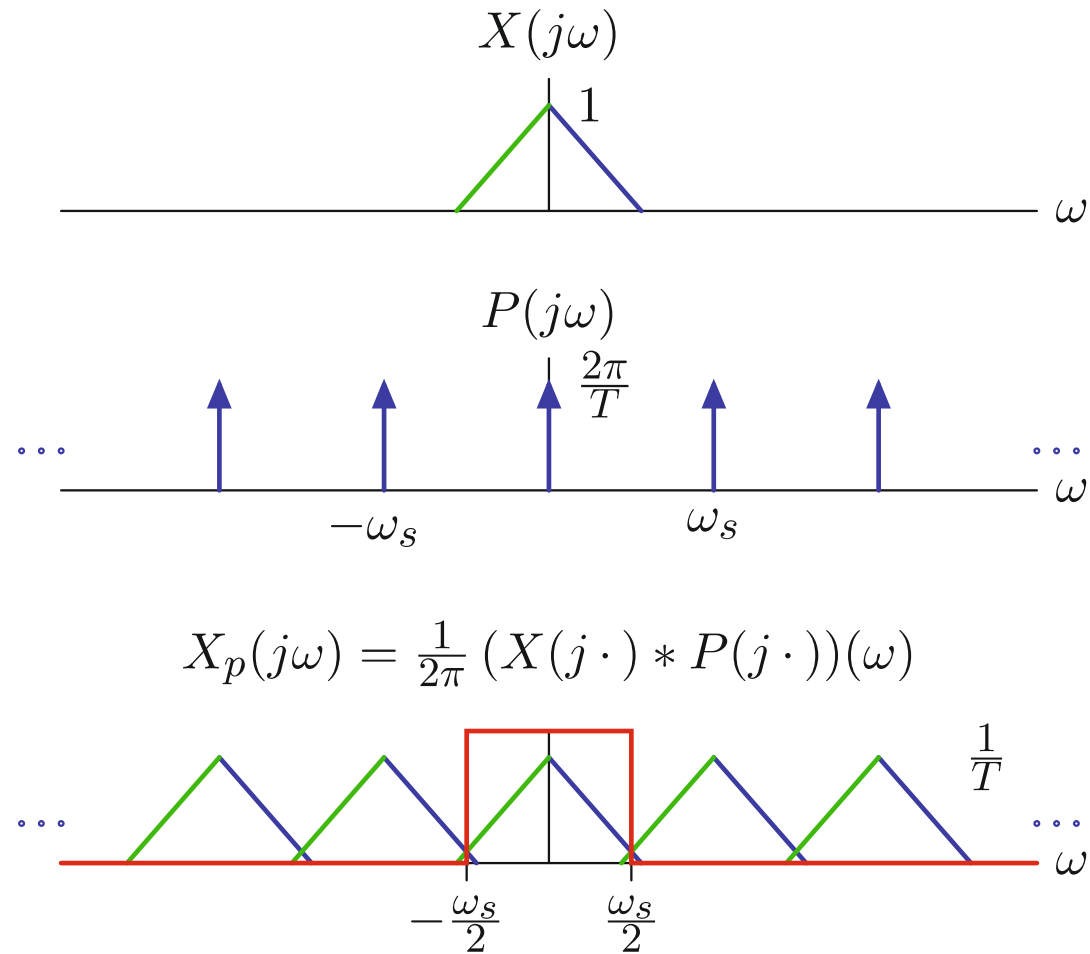
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

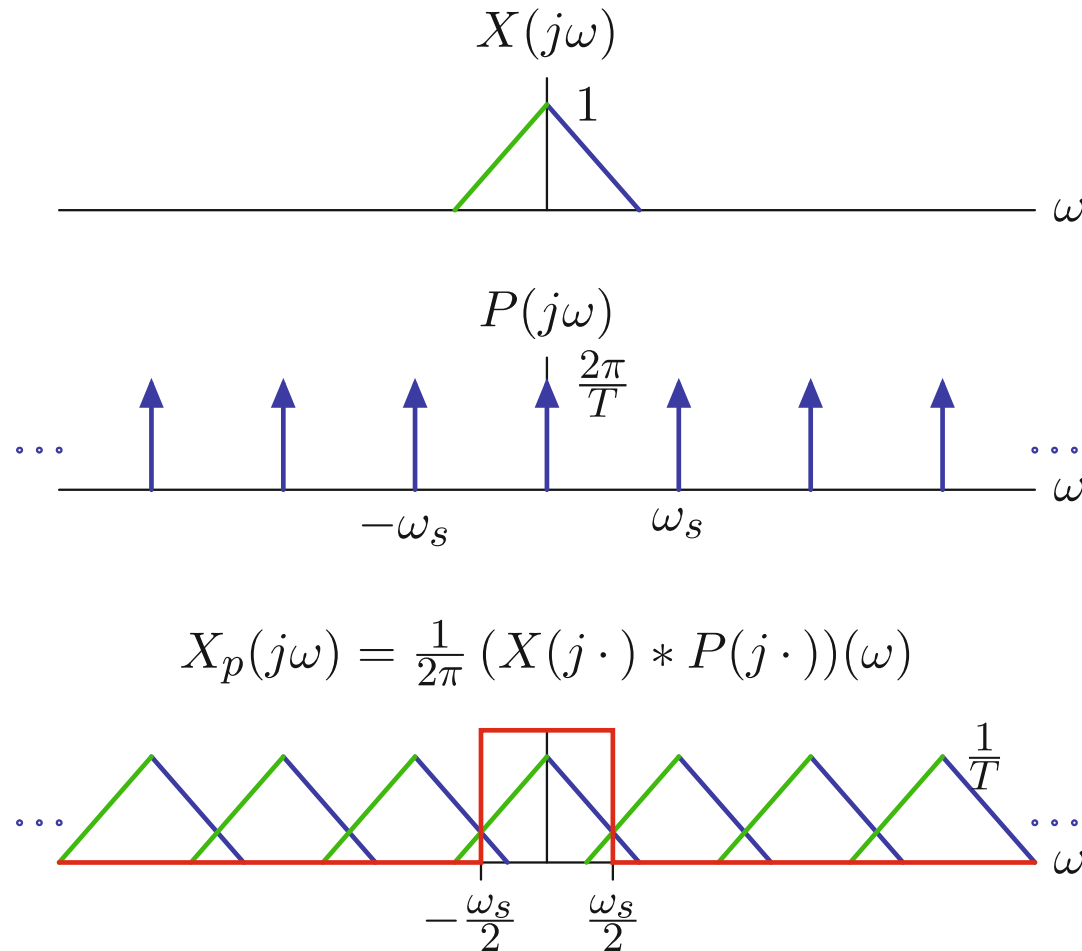
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

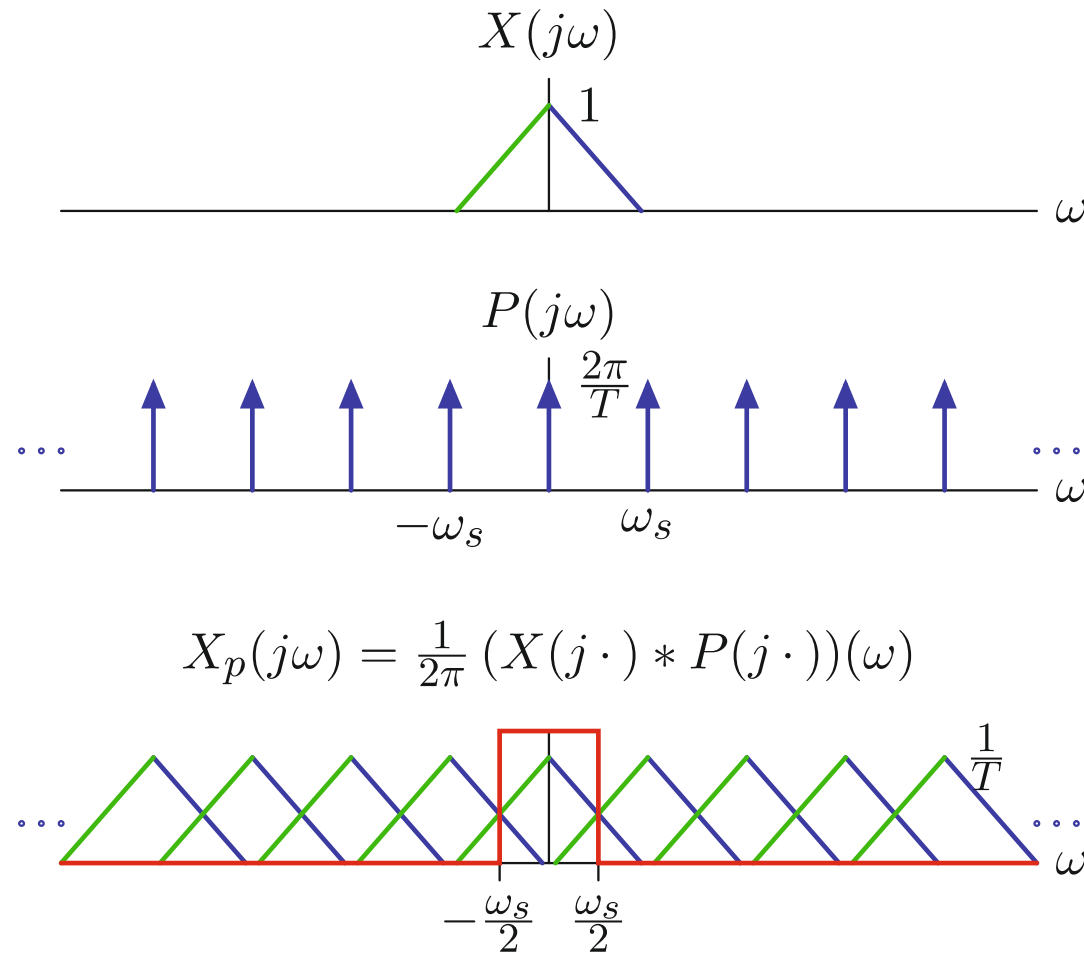
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

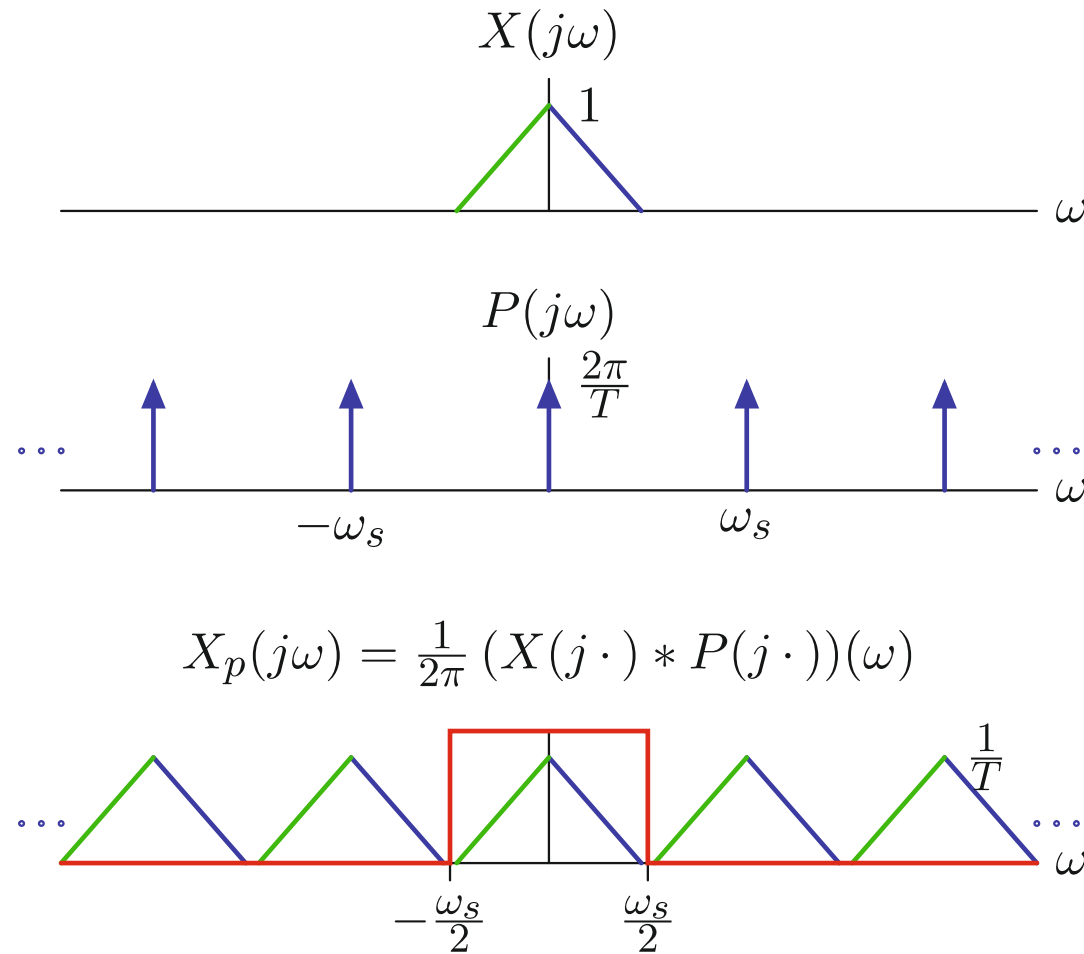
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

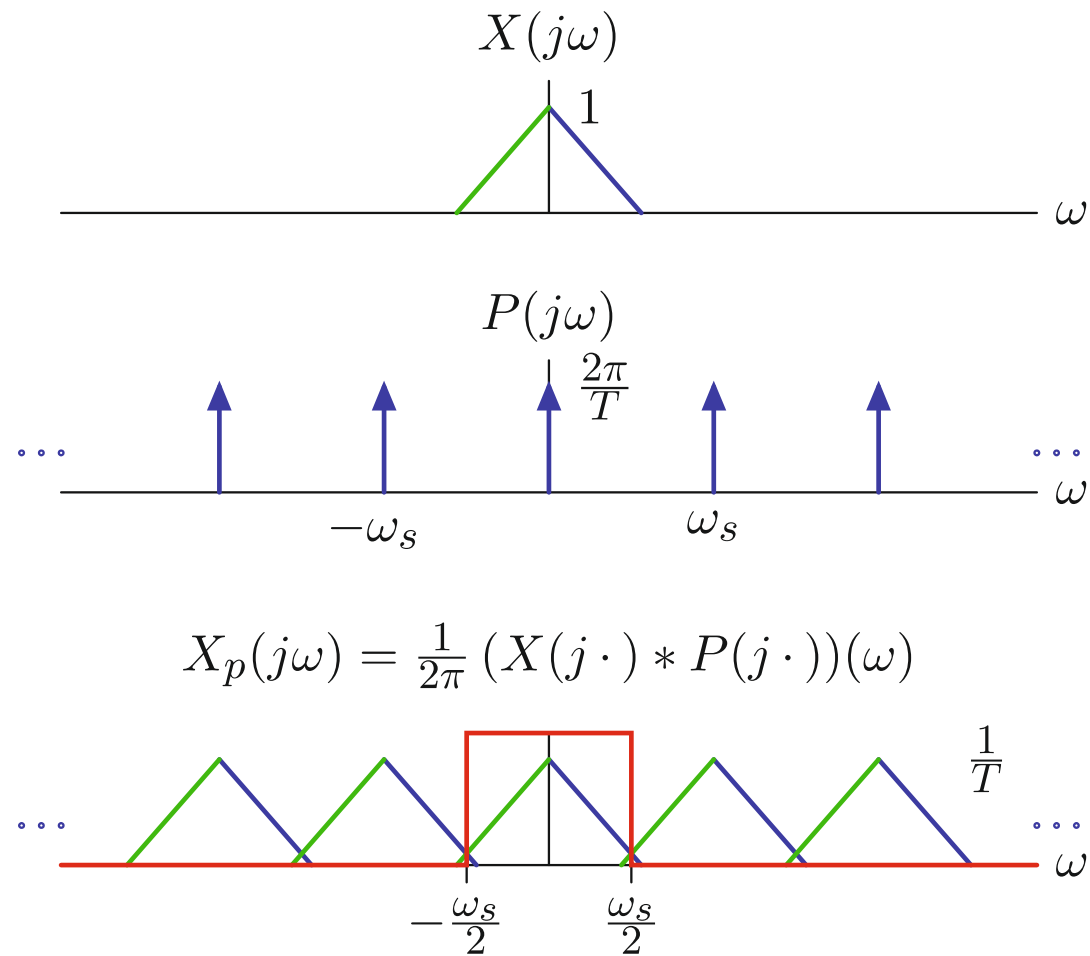
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

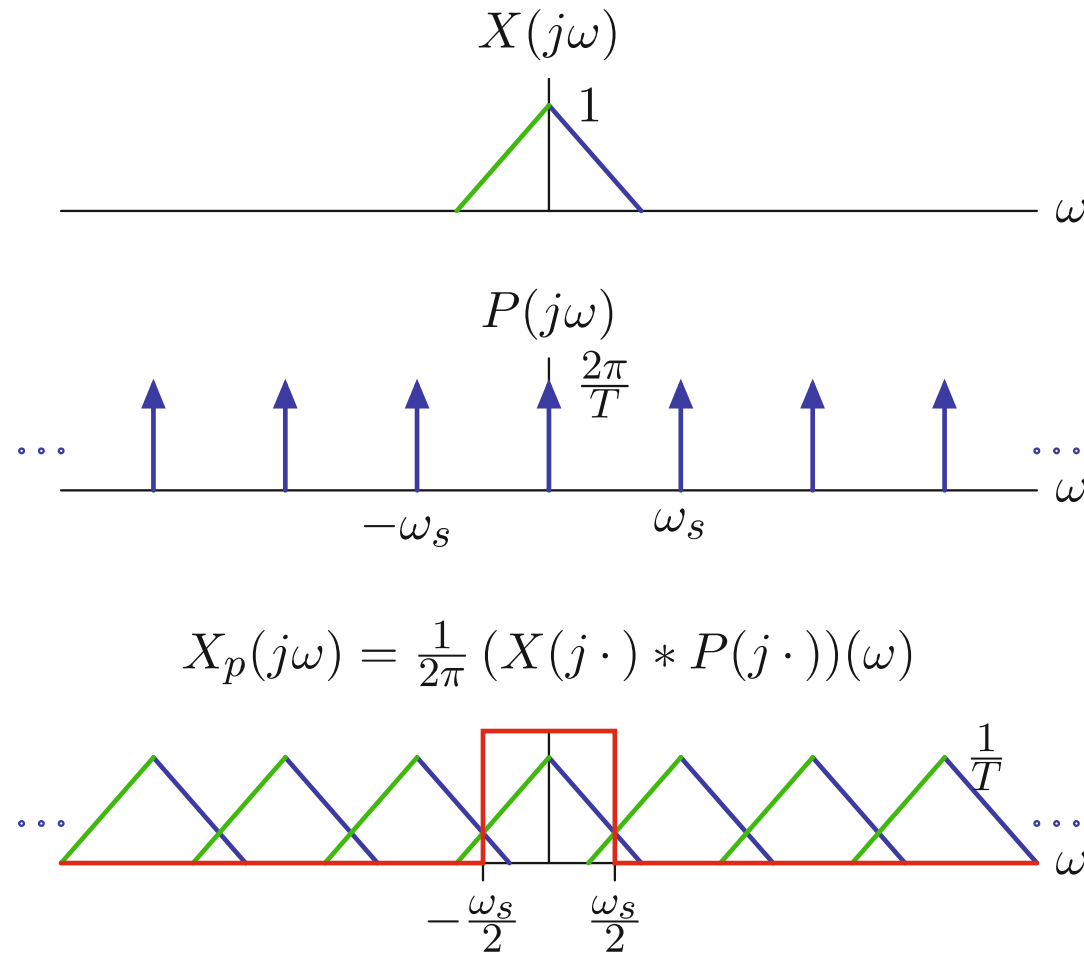
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

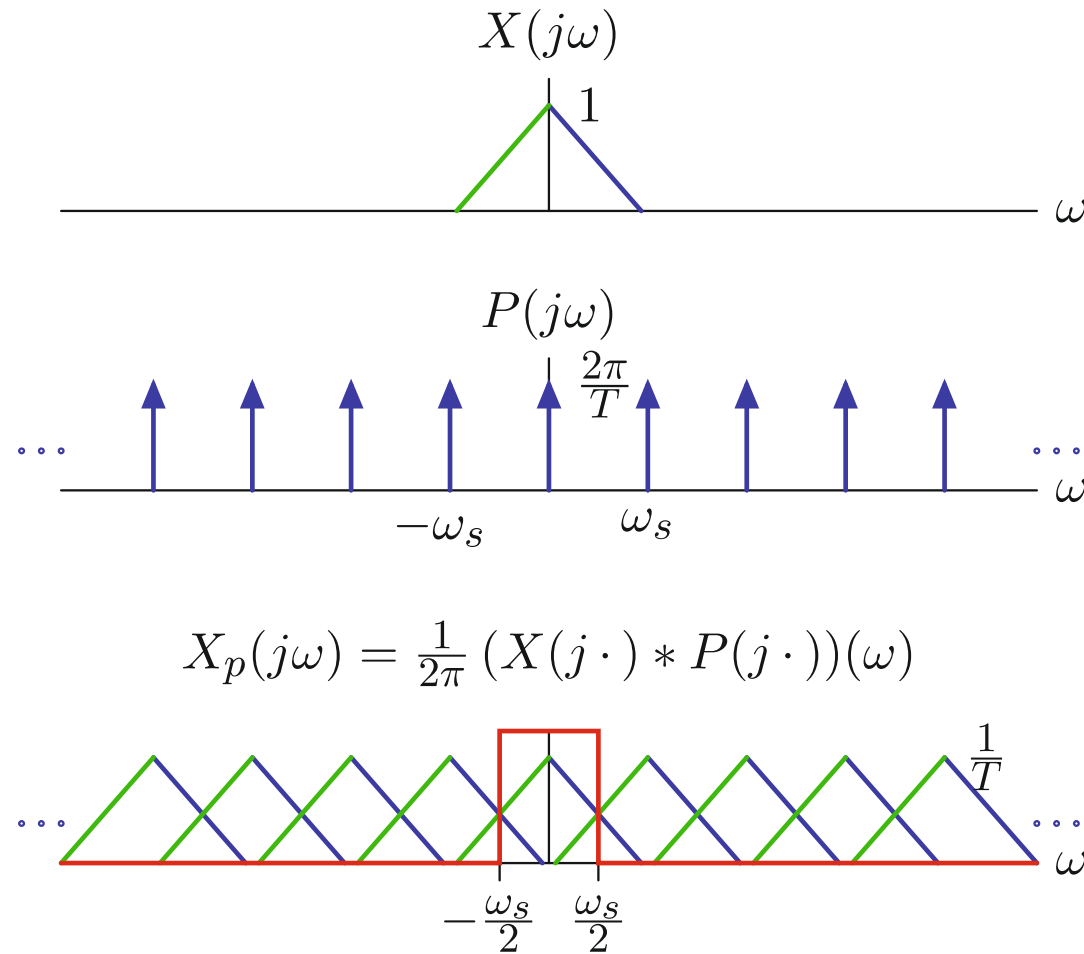
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

Aliasing increases as the sampling rate decreases.

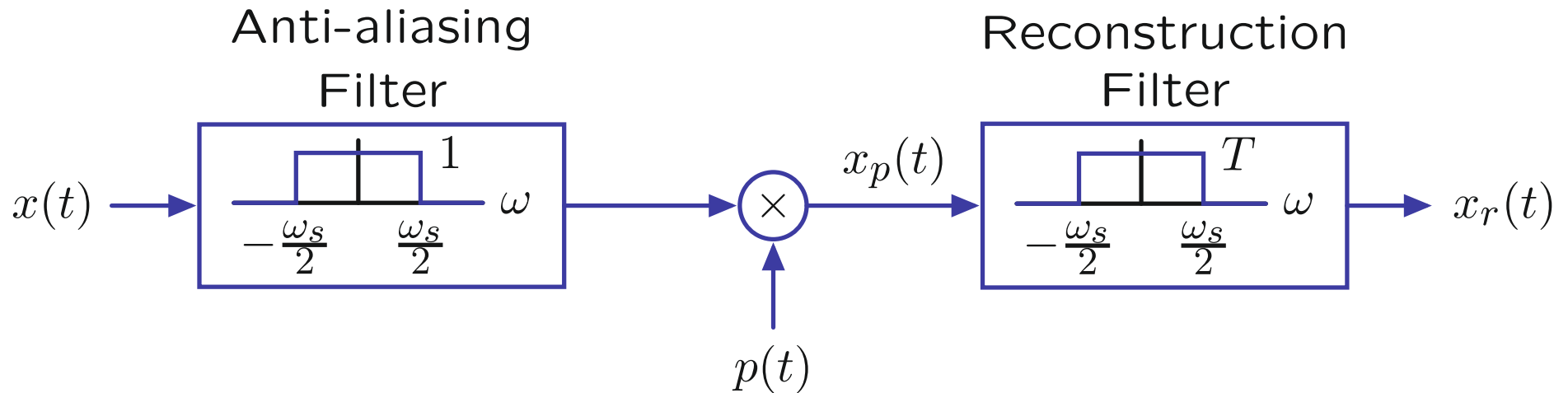


آلیاسینگ

فیلتر ضد آلیاسینگ

ANTI-ALIASING FILTER

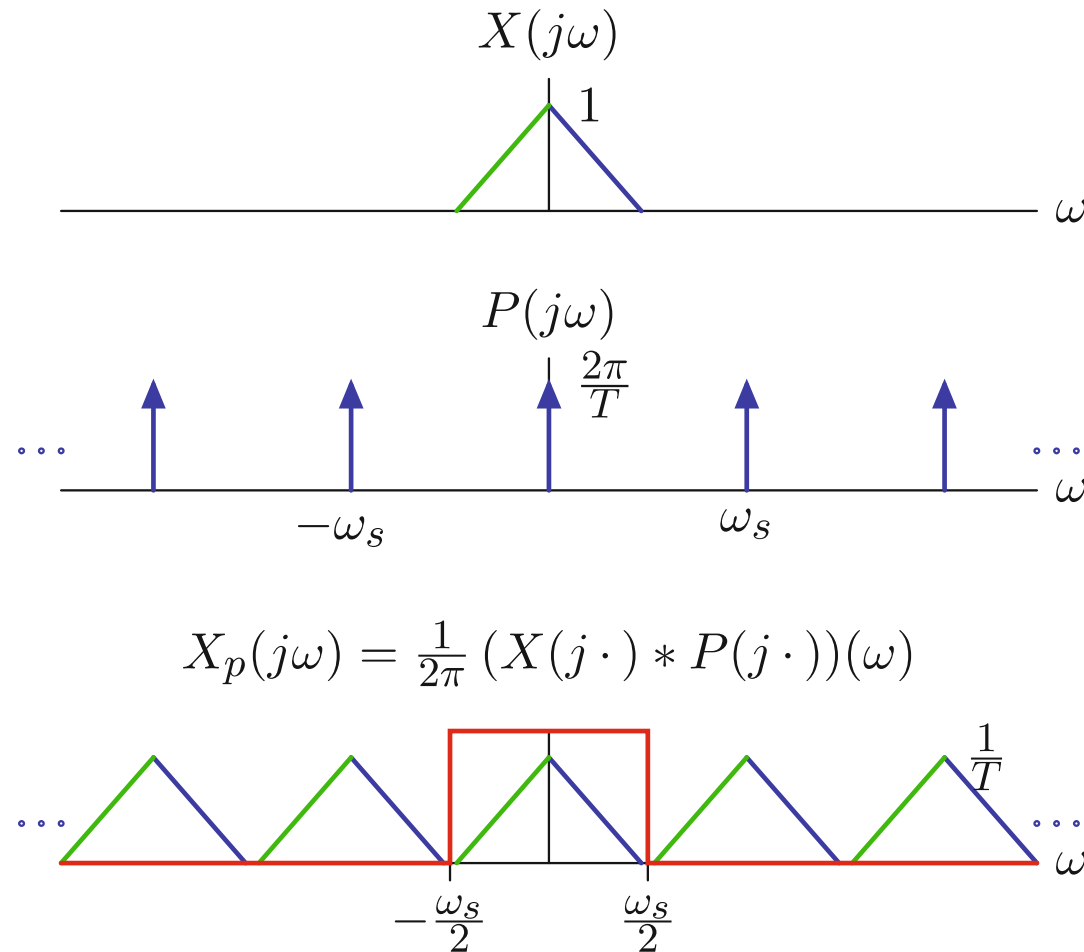
برای اجتناب از آلیاسینگ،
مؤلفه‌های فرکانسی که آلیاس می‌شوند را پیش از نمونه برداری حذف می‌کنیم.



آلیاسینگ

ALIASING

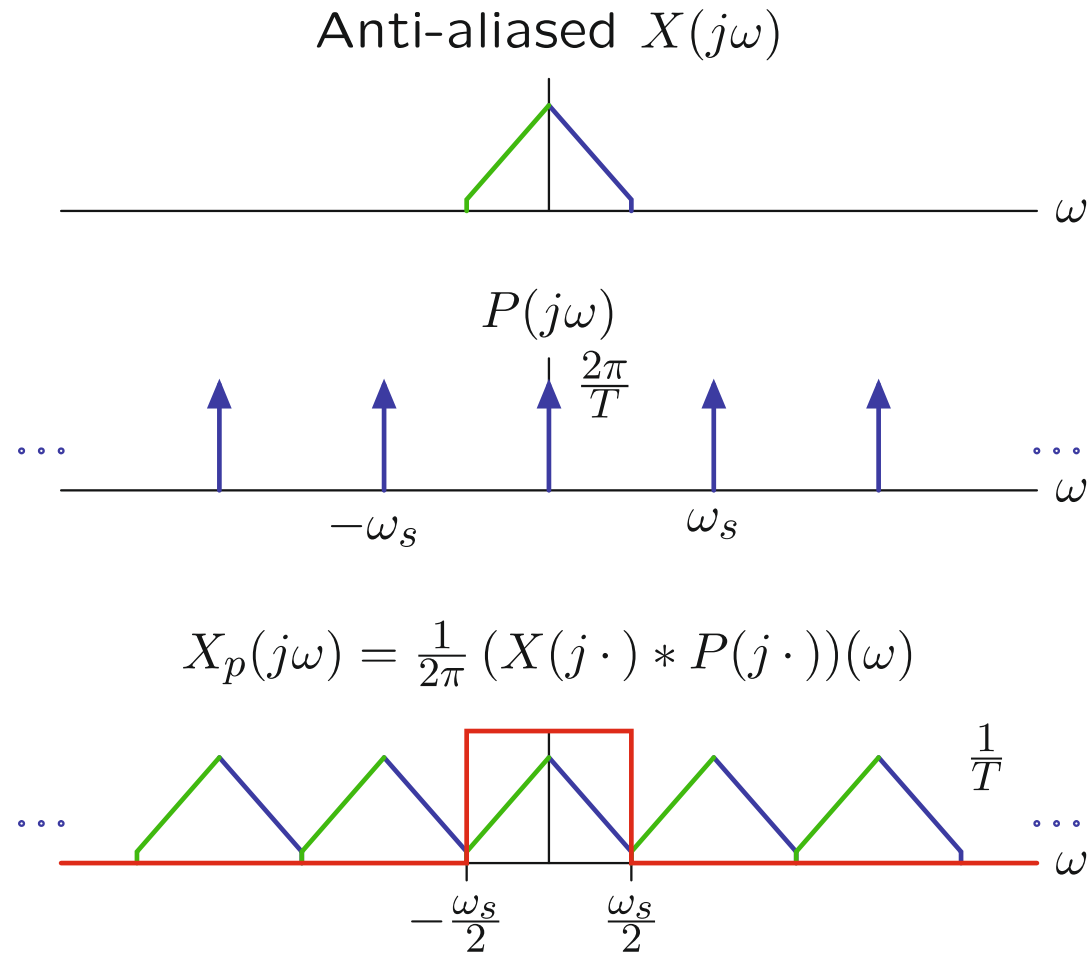
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

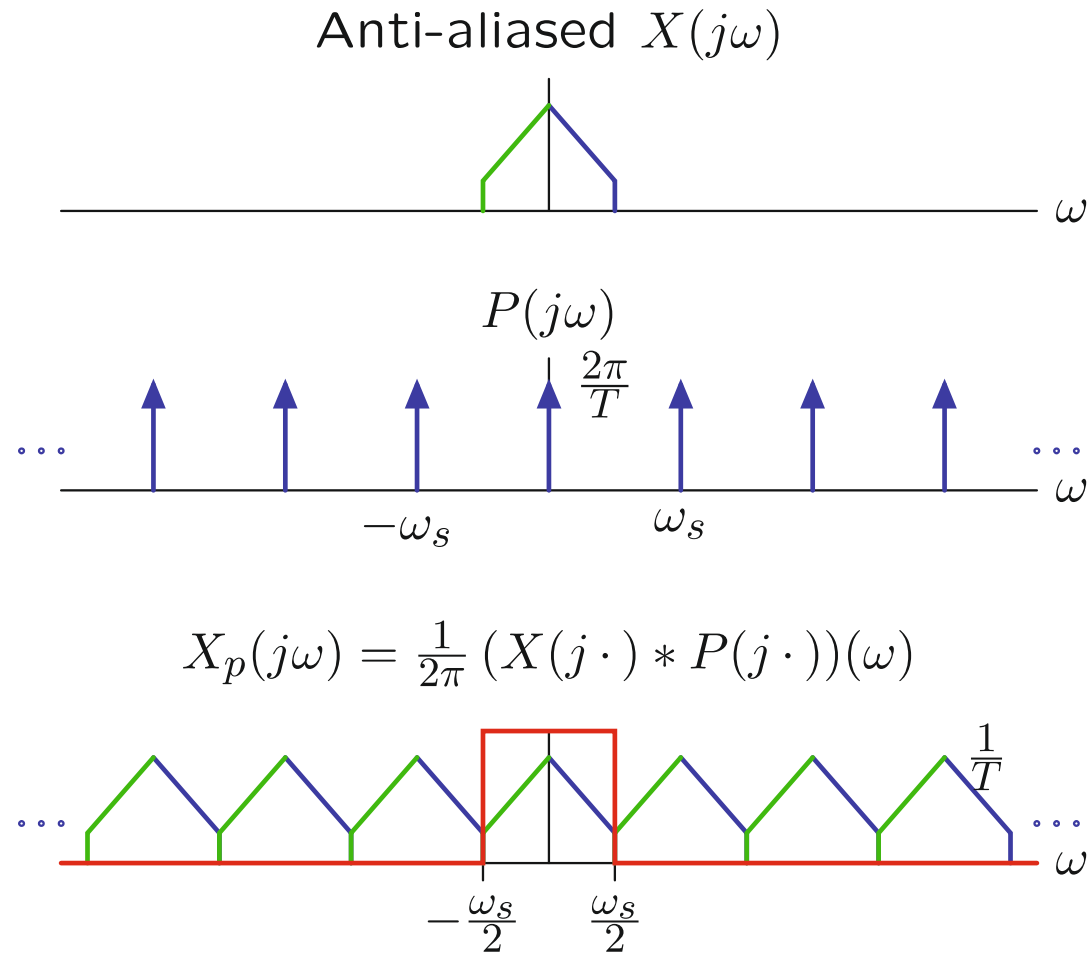
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

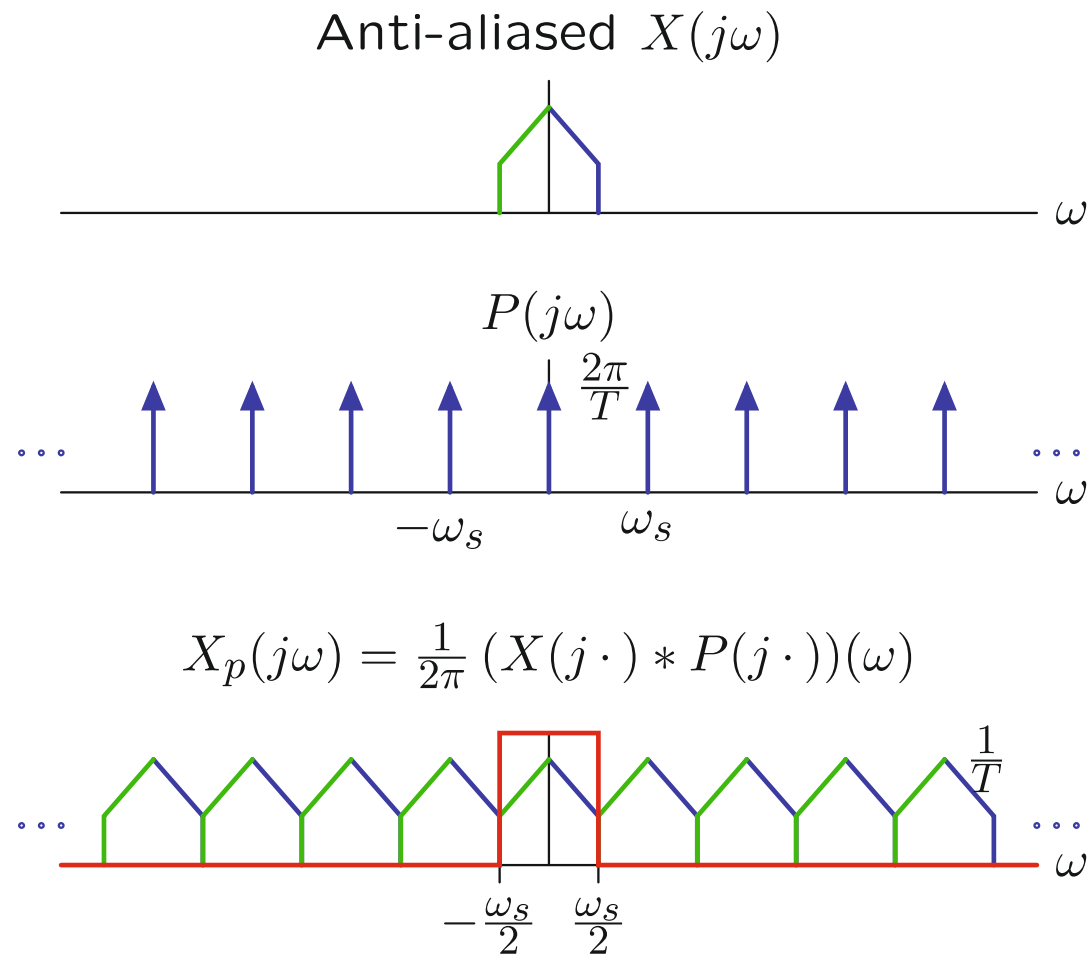
Aliasing increases as the sampling rate decreases.



آلیاسینگ

ALIASING

Aliasing increases as the sampling rate decreases.

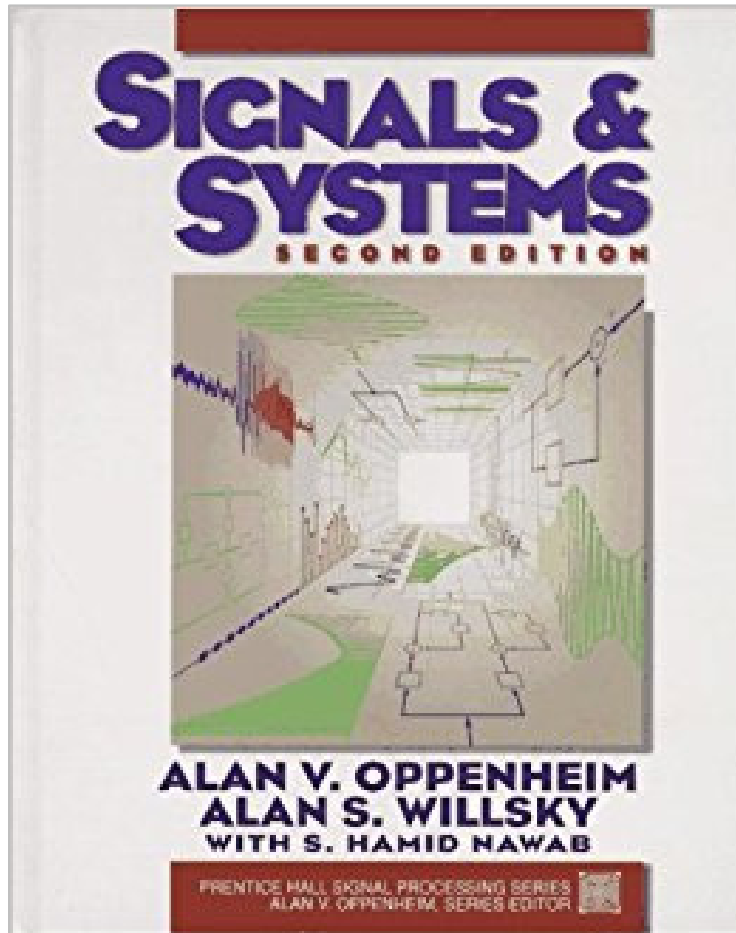


نمونه برداری (۱)

۶

منابع

منبع اصلی



A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab,
Signals and Systems,
Second Edition, Prentice Hall, 1997.

Chapter 7