هوالحکیم

دانشگاه تهران
دانشکدگان فارابی
دانشکده مهندسی

سیگنال‌ها و سیستم‌ها
نیمسال دوم ۰۳-۱۴۰۲
http://courses.fouladi.ir/sigsys

تکلیف کامپیوتری شماره‌ی ۵

فصل پنجم

تبدیل فوریه گسسته-زمان

THE DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM

تمرین‌های زیر را در MATLAB انجام بدهید و کدهای مربوطه را در قالب یک فایل m تحویل بدهید.

۱) **تبدیل فوریه سریع:** تبدیل فوریه سریع (Fast Fourier Transform: FFT) نام الگوریتمی است که برای محاسبه تبدیل فوریه‌ی گسسته (DFT) و تبدیل فوریه‌ی گسسته معکوس به صورتی سریع و بسیار کارآمد استفاده می‌شود به‌طوری‌که محاسبه‌ی تبدیل فوریه گسسته برای N نقطه با استفاده از تعریف آن، $O(N^2)$ عملیات ریاضی نیاز دارد درحالی‌که الگوریتم FFT می‌تواند همان نتایج را با $O(N \log N)$ عملیات محاسبه نماید. برای استفاده از این الگوریتم ها در متلب از دستورات `fft` و `ifft` استفاده کنید.

نمودار تبدیل فوریه‌ی گسسته تابع زیر را رسم کنید. (دقت کنید که DFT با DTFT تفاوت دارد).

$$x[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \frac{1}{n} & , n = 1, 2, 3, \ldots, 10 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

۲) **تخمین تبدیل فوریه‌ی توابع پیوسته:** یکی از راه‌های به‌دست آوردن تبدیل فوریه برای توابع پیوسته، تخمین آن با استفاده از توابع گسسته است. برای تخمین تبدیل فوریه‌ی تابع f می‌توان مقدار آن را روی مجموعه‌ای از نقاط بسیار نزدیک به‌هم به‌دست آورد و سپس تبدیل فوریه‌ی تابع به‌دست‌آمده را حساب کرد. توجه داشته باشید که بعد از محاسبه‌ی تبدیل فوریه، از تابع `fftshift` استفاده می‌کنیم تا مؤلفه‌ی دارای فرکانس صفر از ابتدای ماتریس به وسط آن منتقل شود.

تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x) = \sin x$ را با استفاده از این روش تخمین بزنید و نمودار آن را رسم کنید.

۳) **بررسی DTFT:** تبدیل فوریه‌ی گسسته-زمان (DTFT) سیگنال $x[n]$ را حساب کرده و نمودار اندازه، فاز، قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

$$x[n] = 1 + \cos(\frac{25n\pi}{100}), \qquad 0 \leq n \leq 99$$

۴) **آشنایی با کاربردهای آنالیز فوریه (جهت مطالعه بیشتر)**

محاسبه‌ی ضرب اعداد بسیار بزرگ: یکی از کاربردهای الگوریتم FFT محاسبه‌ی ضرب اعداد بسیار بزرگ است. با استفاده از این الگوریتم بار محاسباتی ضرب دو عدد صحیح N رقمی از $O(N^2)$ به $O(N \log N)$ کاهش می‌یابد. اساس این روش ذخیره‌ی ارقام دو عدد به عنوان ضرایب دو چند جمله‌ای در دو vectorبوده و استفاده از این خاصیت که کانوولوشن در حوزه زمان با ضرب نقطه به نقطه در حوزه‌ی فرکانس برابر می باشد. جهت آشنایی بیشتر می‌توانید به مقاله‌ی [2] مراجعه کنید.

فشرده سازی تصاویر: تاکنون الگوریتم‌های فراوانی برای فشرده‌سازی تصاویر دیجیتال ارائه شده‌اند. به‌طورکلی الگوریتم‌های فشرده‌سازی را می‌توان به دو دسته‌ی بی‌اتلاف و بااتلاف تقسیم کرد. در روش‌های بااتلاف (lossy) داده‌ی اصلی پس از فشرده‌سازی قابل بازیابی کامل نیست. JPEG یکی از روش‌های فشرده‌سازی بااتلاف است که امروزه کاربرد گسترده‌ای دارد و در الگوریتم آن از یک تبدیل حوزه‌ی فرکانس به‌نام تبدیل کسینوسی گسسته (DCT) استفاده می‌شود.

مراجع

[1] M.N.O. Sadiku, W.H. Ali, **Signals and Systems: A Primer with Matlab**, CRC Press, 2016.

[2] A. Emerencia, **Multiplying huge integers using Fourier transforms**, Online slides. URL: http://www.cs.rug.nl/∼ando/pdfs/Ando_Emerencia_ multiplying_huge_integers_using _fourier_transforms_presentation.pdf, 2007.