پاسخ تکلیف اول

طبقه‌بندی بر اساس نظریه‌ی تصمیم بیزی

Assignment # 1

۱. توزیع‌های کوشی را برای یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دوطبقه‌ای تک بعدی در نظر بگیرید

$$p(x \mid \omega_i) = \frac{1}{\pi b} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_i}{b}\right)^2} \quad i = 1,2 \quad a_2 > a_1$$

(آ) با انتگرال گیری صریح، نشان دهید که این توزیع‌ها واقعاً نرمالیزه هستند.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} p(x \mid \omega_i)dx &= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-a_i}{b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{1+y^2}dy \quad , y = \frac{x-a_i}{b} \\
&= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} y\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

(ب) با فرض $P(\omega_1) = P(\omega_2)$، نشان دهید که $P(\omega_1 \mid x) = P(\omega_2 \mid x)$ است، اگر $x = (a_1 + a_2)/2$. $P(\omega_1 \mid x)$ را برای حالت $a_1 = 3$، $a_2 = 5$ و $b = 1$ رسم کنید. رفتار $P(\omega_1 \mid x)$ و $P(\omega_2 \mid x)$ وقتی $x \to \infty$ چگونه است؟ وقتی که $x \to -\infty$، چه؟ توضیح دهید.

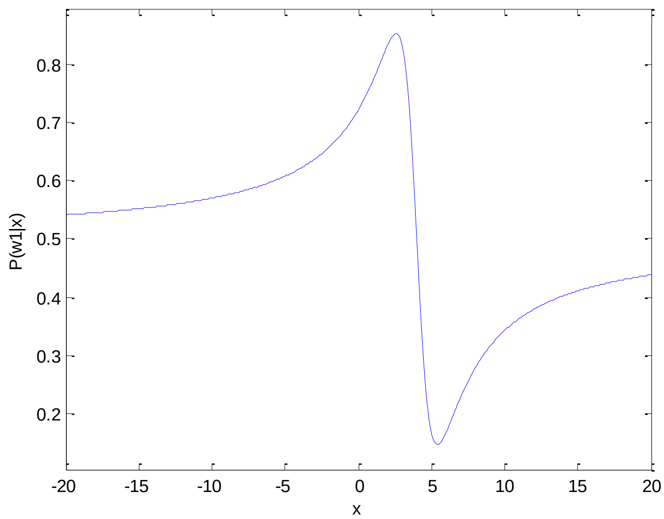
پاسخ:

$$\begin{gathered}
P(\omega_1 \mid x) = P(\omega_2 \mid x) \Rightarrow p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) \,/\, p(x) = p(x \mid \omega_2)P(\omega_2) \,/\, p(x) \\
p(x \mid \omega_1) = p(x \mid \omega_2) \\
\frac{1}{\pi b}\frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2} = \frac{1}{\pi b}\frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2} \\
\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2 = \left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2 \\
\left(x-a_1\right)^2 = \left(x-a_2\right)^2 \\
x^2 - 2a_1x + a_1^2 = x^2 - 2a_2x + a_2^2 \\
2x(a_2 - a_1) = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \quad a_1 \neq a_2 \\
x = (a_1 + a_2)\,/\,2
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) + p(x \mid \omega_2)P(\omega_2) \\ &= \frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}(0.5) + \frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}(0.5) \\ &= \frac{1}{2\pi b}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} P(\omega_1 \mid x) &= \frac{P(w_1)}{f(x)} f(x \mid \omega_1) \\ &= \frac{(0.5)\left(\frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}\right)}{\frac{1}{2\pi b}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}}{\frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}} \end{aligned}$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} P(\omega_1 \mid x) = \lim_{x\to\pm\infty} P(\omega_2 \mid x) = 0.5$$

توضیح: اگر اندازه‌ی ویژگی مشاهده شده بی‌نهایت بزرگ باشد، در این صورت احتمال وقوع شئی در هر دو طبقه برابر است.

(پ) نشان دهید که می‌نیمم احتمال خطا با

$$P(error) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left|\frac{a_2 - a_1}{2b}\right|$$

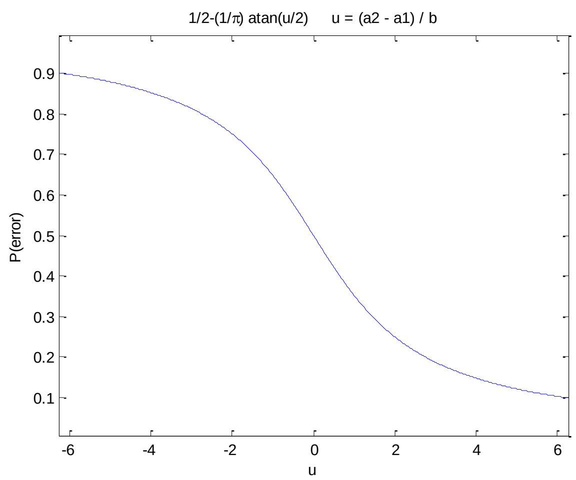
داده می‌شود. این را به صورت تابعی از $|a_2 - a_1|/b$ رسم کنید. (با فرض $b > 0$)

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
P(error) &= \int_{R_2} p(x \mid \omega_1)P(\omega_1)dx + \int_{R_1} p(x \mid \omega_2)P(\omega_2)dx \\
&= \int_{-\infty}^{x^*} \frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+\frac{x-a_1}{b}^{2}}P(\omega_1)dx + \int_{x^*}^{+\infty} \frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+\frac{x-a_2}{b}^{2}}P(\omega_2)dx \\
&= P(\omega_1)\frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{x^*}\frac{dx}{1+\frac{x-a_1}{b}^{2}} + P(\omega_2)\frac{1}{\pi b}\int_{x^*}^{+\infty}\frac{dx}{1+\frac{x-a_2}{b}^{2}} \\
&= \frac{P(\omega_1)}{\pi b}\int_{-\infty}^{x^*}\frac{b}{1+y^2}dy + \frac{P(\omega_2)}{\pi b}\int_{x^*}^{+\infty}\frac{b}{1+y^2}dy \\
&= \frac{P(\omega_1)}{\pi}\Big[\tan^{-1} y\Big]_{x=-\infty}^{x=x^*} + \frac{P(\omega_2)}{\pi}\Big[\tan^{-1} y\Big]_{x=x^*}^{x=+\infty} \\
&= \frac{P(\omega_1)}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{\infty}^{x^*} + \frac{P(\omega_2)}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a_2}{b}\right)\right]_{x^*}^{+\infty} \\
&= \frac{P(\omega_1)}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x^*-a_1}{b}\right)+\frac{\pi}{2}\right] + \frac{P(\omega_2)}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{x^*-a_2}{b}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial P(error)}{\partial x} = 0 \\
\frac{P(\omega_1)}{\pi}\frac{1/b}{1+\frac{x^*-a_1}{b}^{2}} - \frac{P(\omega_2)}{\pi}\frac{1/b}{1+\frac{x^*-a_2}{b}^{2}} = 0 \\
P(\omega_1)\frac{b^2}{b^2+x^*-a_1{}^{2}} = P(\omega_2)\frac{b^2}{b^2+x^*-a_2{}^{2}} \\
P(\omega_1) = P(\omega_2) \Rightarrow x^* = (a_1+a_2)/2
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
P(error) &= \frac{P(\omega_1)}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{a_2-a_1}{2b}+\frac{\pi}{2}\right] + \frac{P(\omega_2)}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a_1-a_2}{2b}\right] \\
&= \frac{0.5}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a_1-a_2}{2b}\right] + \frac{0.5}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a_1-a_2}{2b}\right] \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{a_1-a_2}{2b}
\end{aligned}
$$



(ت) ماکزیمم مقدار $P(error)$ چیست و تحت چه شرایطی می تواند رخ دهد؟ توضیح دهید.

پاسخ:

ماکزیمم مقدار $P(error)$ در یکی از کران‌های $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ رخ می‌دهد:

اگر $P(\omega_1) \geq P(\omega_2)$ باشد، در این صورت ماکزیمم $P(error)$ برابر با $P(\omega_1)$ خواهد بود و در $x \to -\infty$ رخ می‌دهد.

اگر $P(\omega_1) \leq P(\omega_2)$ باشد، در این صورت، ماکزیمم $P(error)$ برابر با $P(\omega_2)$ خواهد بود و در $x \to +\infty$ رخ می‌دهد.

(ث) یك طبقه‌بندی کننده‌ی می‌نیمم خطای بیزی را بر حسب a_i و b طراحی کنید، اگر $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ باشد.

$$P(\omega_1 \mid x) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} P(\omega_2 \mid x)$$

$$p(x \mid \omega_1)\frac{P(\omega_1)}{p(x)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} p(x \mid \omega_2)\frac{P(\omega_2)}{p(x)}$$

$$\frac{f(x \mid \omega_1)}{f(x \mid \omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) \Rightarrow p(x \mid \omega_1) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} p(x \mid \omega_2) \Rightarrow x \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{a_1 + a_2}{2}$$

(ج) یك طبقه‌بندی کننده‌ی می‌نیمم خطرپذیری بیزی را با وزن‌های خطای زیر طراحی کنید

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مرزهای تصمیم را برای این حالت نشان دهید. احتمال خطا چیست؟ نتایج (ث) و (ج) را مقایسه کنید.

$$\frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}}{\lambda_{11} - \lambda_{21}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

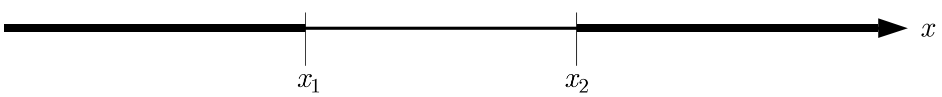
$$\frac{f(x \mid \omega_1)}{f(x \mid \omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{1 + \left(\frac{x - a_1}{b}\right)^2} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - a_2}{b}\right)^2}$$

$$b^2 + 2(x - a_2)^2 - (x - a_1)^2 \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} 0$$

پس

$$\begin{matrix} x < x_1 = 2a_2 - a_1 - (2a_2^2 - 4a_1a_2 + 2a_1^2 + b^2)^{1/2} \\ \text{or} \\ x > x_2 = 2a_2 - a_1 + (2a_2^2 - 4a_1a_2 + 2a_1^2 + b^2)^{1/2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x \in \omega_1 \quad \text{otherwise} \quad x \in \omega_2$$



برای محاسبه‌ی احتمال خطا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(error)=\int_{R_2}p(x\mid\omega_1)P(\omega_1)dx+\int_{R_1}p(x\mid\omega_2)P(\omega_2)dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}p(x\mid\omega_1)P(\omega_1)dx+\int_{-\infty}^{x_1}p(x\mid\omega_2)P(\omega_2)dx+\int_{x_2}^{+\infty}p(x\mid\omega_1)P(\omega_1)dx$$
$$=P(\omega_1)\int_{x_1}^{x_2}p(x\mid\omega_1)dx+P(\omega_2)\left(\int_{-\infty}^{x_1}p(x\mid\omega_2)dx+\int_{x_2}^{+\infty}p(x\mid\omega_1)dx\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi b}\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}+\int_{-\infty}^{x_1}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}+\int_{x_2}^{+\infty}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi b}\left(\left[b\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{x_1}^{x_2}+\left[b\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{-\infty}^{x_1}+\left[b\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{x_2}^{+\infty}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{x_1}^{x_2}+\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{-\infty}^{x_1}+\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a_1}{b}\right)\right]_{x_2}^{+\infty}\right)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\left[\tan^{-1}\left(\frac{x_2-a_1}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x_1-a_1}{b}\right)\right]+\left[\tan^{-1}\left(\frac{x_1-a_1}{b}\right)+\frac{\pi}{2}\right]+\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{x_2-a_1}{b}\right)\right]\right) & ,b>0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\left[\tan^{-1}\left(\frac{x_2-a_1}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x_1-a_1}{b}\right)\right]+\left[\tan^{-1}\left(\frac{x_1-a_1}{b}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+\left[-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{x_2-a_1}{b}\right)\right]\right) & ,b<0\end{cases}$$

مقایسه: در حالت (ث) تابع تفکیك، یك تابع خطی است، در حالی که در حالت (ج) تابع تفکیك، مربعی (درجه دوم) می‌باشد.

۲. توزیع‌های یکنواخت زیر را در یك مسئله‌ی طبقه‌بندی دوطبقه‌ای تك بعدی در نظر بگیرید

طبقه‌ی ۱، ω_1، یکنواخت در $[0,2]$　　طبقه‌ی ۲، ω_2، یکنواخت در $[1,4]$

(آ) فرض کنید $P(\omega_1)=P(\omega_2)$. یك طبقه‌بندی کننده‌ی بیزی برای می‌نیمم خطا طراحی کنید.

$$p(x\mid\omega_1)=u(0,2)=\begin{cases}1/2 & ,0<x<2\\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}\qquad p(x\mid\omega_2)=u(1,4)=\begin{cases}1/3 & ,1<x<4\\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$$

$$\frac{p(x\mid\omega_1)}{p(x\mid\omega_2)}\underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}}\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$
$$\frac{p(x\mid\omega_1)}{p(x\mid\omega_2)}=\begin{cases}1 & ,x<0 \text{ or } x>4\\ \infty & ,0\le x<1\\ 3/2 & ,1\le x<2\\ 0 & ,2\le x\le 4\end{cases}\underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}}1$$

(ب) فرض کنید $P(\omega_1)=0.5P(\omega_2)$. مجدداً یك طبقه‌بندی کننده‌ی بیزی برای می‌نیمم خطا طراحی کنید.

$$\frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$
$$\frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} 2$$
$$\begin{cases} x \in \omega_1 & ,0 \le x \le 1 \\ x \in \omega_2 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

۳. توزیع‌های نرمال زیر را برای یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دو طبقه‌ای دو بعدی در نظر بگیرید

طبقه‌ی ۱، ω_1، نرمال $\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ **طبقه‌ی ۲، ω_2، نرمال** $\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1$

(آ) مرز تصمیم بیزی را برای می‌نیمم احتمال خطا به دست آورید و آن را رسم کنید.

در حالتی که ماتریس کوواریانس هر دو توزیع با هم برابر هستند، یعنی $\Sigma=\Sigma_1=\Sigma_2$ داریم

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

که در آن

$$\mathbf{w}_i = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i$$
$$w_{i0} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i + \ln P(\omega_i)$$

پس داریم

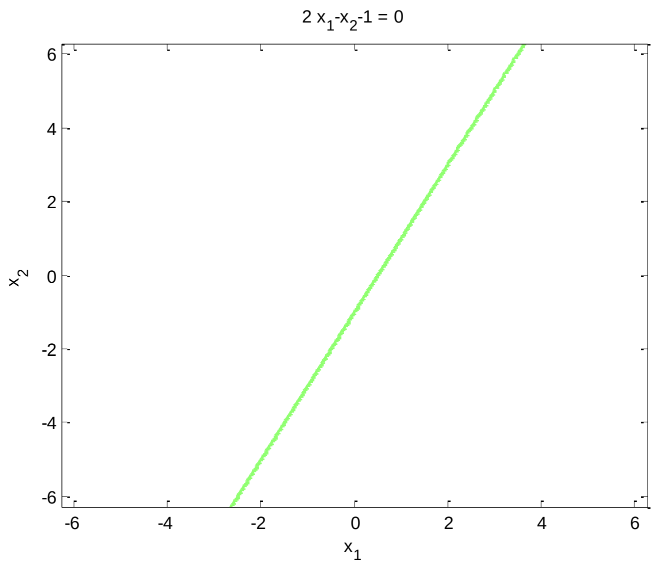
$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$
$$w_{10} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_1) = -\frac{2}{3} + \ln P(\omega_1)$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$
$$w_{20} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_1) = -\frac{2}{3} + \ln P(\omega_2)$$

برای بدست آوردن مرز تصمیم داریم

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x})$$
$$\frac{4}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} + \ln P(\omega_1) = -\frac{4}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} + \ln P(\omega_1)$$

با فرض $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ به دست می‌آوریم

$$2x_1 - x_2 - 1 = 0$$



ب) مرز تصمیم بیزی را برای می‌نیمم خطرپذیری به دست آورید و آن را رسم کنید، با داشتن

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad a > 0$$

$$x \in \omega_1 \Rightarrow \frac{f(\mathbf{x} \mid \omega_1)}{f(\mathbf{x} \mid \omega_2)} > \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}}{\lambda_{11} - \lambda_{21}} \frac{P(\omega_2)}{P(w_1)} \quad , P(\omega_1) = P(\omega_2), d = 2$$

$$\frac{p(\mathbf{x} \mid \omega_1)}{p(\mathbf{x} \mid \omega_2)} > \frac{2}{1}$$

$$p(\mathbf{x} \mid \omega_1) > 2p(\mathbf{x} \mid \omega_2)$$

$$\ln p(\mathbf{x} \mid \omega_1) > \ln p(\mathbf{x} \mid \omega_2) + \ln 2$$

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) > -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + \ln 2$$

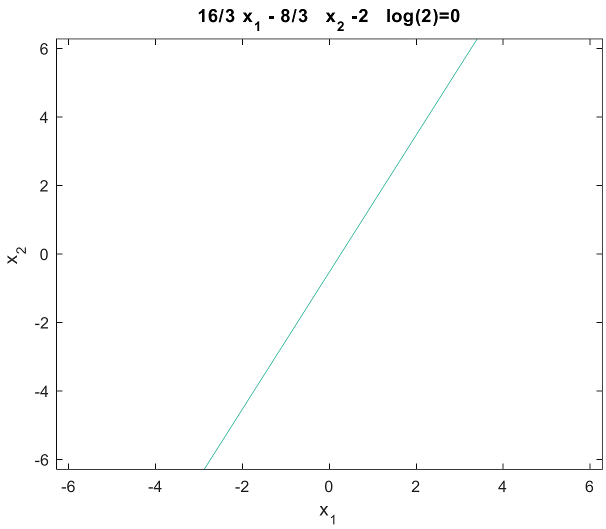
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - 2\ln 2 > 0$$

با مقادیر داده شده داریم

$$\begin{bmatrix} x_1 + 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2\ln 2 > 0$$

$$\frac{16}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2 - 2\ln 2 > 0$$

که مرز تصمیم زیر را به دست می‌دهد:




```
>> syms x
>> ezplot('16/3*x1 - 8/3 * x2 -2 * log(2)=0')
```

(پ) (آ) و (ب) را برای مورد زیر تکرار کنید

طبقه‌ی ۲، ω_2**، نرمال** $\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$

قسمت (آ) در حالتی که ماتریس کوواریانس هر دو توزیع با هم برابر نیستند، یعنی $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ داریم

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{W}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

که در آن

$$\mathbf{W}_i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}$$
$$\mathbf{w}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{\mu}_i$$
$$w_{i0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_i^T\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{\mu}_i - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| + \ln P(\omega_i)$$

پس داریم

$$\mathbf{W}_1 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{0.75}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$w_{10} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_1| + \ln P(\omega_1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln P(\omega_1)$$

$$\mathbf{W}_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{0.75}\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} = -\frac{1}{0.75}\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} = -\frac{1}{0.75}\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}4/3\\ 2/3\end{bmatrix}$$

$$w_{20} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}4/3\\ 2/3\end{bmatrix}\right) - \frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Sigma}_1| + \ln P(\omega_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln P(\omega_2)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x})$$

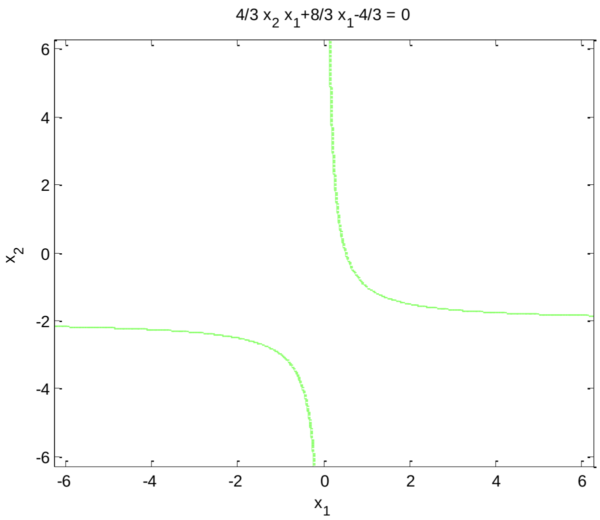
$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3 & 1/3\\ 1/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln P(\omega_1) =$$

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3 & -1/3\\ -1/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln P(\omega_2) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3 & 1/3\\ 1/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} - \frac{2}{3} =$$

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3 & -1/3\\ -1/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4/3 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \frac{2}{3}$$

$$4/3x_1x_2 + 8/3x_2 - 4/3 = 0$$



قسمت (ب)

$$x \in \omega_1 \Rightarrow \frac{p(\mathbf{x} \mid \omega_1)}{p(\mathbf{x} \mid \omega_2)} > \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}}{\lambda_{11} - \lambda_{21}} \frac{P(\omega_2)}{P(w_1)} \quad , P(\omega_1) = P(\omega_2), d = 2$$
$$\frac{p(\mathbf{x} \mid \omega_1)}{p(\mathbf{x} \mid \omega_2)} > \frac{2}{1}$$
$$p(\mathbf{x} \mid \omega_1) > 2p(\mathbf{x} \mid \omega_2)$$
$$\ln p(\mathbf{x} \mid \omega_1) > \ln p(\mathbf{x} \mid \omega_2) + \ln 2$$
$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_1\right| > -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_2\right| + \ln 2$$
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_2\right| - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_1\right| - 2\ln 2 > 0$$

با مقادیر داده شده داریم

$$\begin{bmatrix} x_1 + 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0.75 - 0.75 - 2\ln 2 > 0$$
$$(16 / 3 + 8 / 3x_2)x_1 - 2\ln 2 > 0$$

که مرز تصمیم زیر را به دست می‌دهد: