دانشگاه تهران
دانشکدگان فارابی
دانشکده مهندسی

بازشناسی الگو
نیمسال دوم ۰۳-۱۴۰۲
http://courses.fouladi.ir/pr

تکلیف شماره‌ی ٤
تکلیف چهارم

طبقه‌بندی‌کننده‌های غیرخطی

NON-LINEAR CLASSIFIERS

۱) برای تابع هزینه‌ی آنتروپی متقابل (cross-entropy cost function) با رابطه‌ی

$$J = -\sum_{i=۱}^{N}\sum_{k=۱}^{k_L} y_k(i)\ln\frac{\hat{y}_k(i)}{y_k(i)}$$

(الف) نشان دهید که مقدار می‌نیمم آن برای مقادیر پاسخ مطلوب دودویی صفر است و وقتی رخ می‌دهد که خروجی‌های واقعی شبکه (output) مساوی با خروجی‌های مطلوب (target) باشند.

(ب) نشان دهید که تابع هزینه‌ی آنتروپی متقابل وابسته به خطاهای نسبی خروجی است.

۲) نشان دهید که اگر تابع هزینه‌ی بهینه شده توسط پرسپترون چندلایه، آنتروپی متقابل باشد و تابع فعال‌سازی (activation function) سیگموئید باشد:

$$f(x) = \frac{۱}{۱+\exp(-ax)}$$

آنگاه گرادیان خطا

$$\delta_j^L(i) = \frac{\partial\varepsilon(i)}{\partial v_j^L(i)}$$

برابر می‌شود با

$$\delta_j^L(i) = a(۱-\hat{y}_j(i))y_j(i).$$

۳) نشان دهید که اگر تابع هزینه‌ی بهینه شده توسط پرسپترون چندلایه، آنتروپی متقابل باشد و تابع فعال‌سازی (activation function) تابع softmax باشد:

$$\hat{y}_k = \frac{exp(v_k^L)}{\sum_{k'} exp(v_{k'}^L)}$$

آنگاه گرادیان خطا

$$\delta_j^L(i) = \frac{\partial\varepsilon(i)}{\partial v_j^L(i)}$$

برابر می‌شود با

$$\delta_j^L(i) = \hat{y}_j(i) - y_j(i).$$

۴) حداکثر تعداد نواحی چندوجهی (polyhedral regions) در فضای lبعدی با رابطه‌ی

$$M = \sum_{m=۰}^{l}\binom{K}{m} \quad \text{, where } \binom{K}{m} = ۰, \text{ for } K < m$$

داده می‌شود. نشان دهید که اگر $l > K$ باشد، آنگاه $M = ۲^K$ خواهد بود.

۵) روش زیر برای تطبیق پارامتر یادگیری (نرخ یادگیری) μ در طول آموزش شبکه‌ی پرسپترون چندلایه پیشنهاد شده است:

$$\mu = \mu_{\circ} \frac{۱}{۱ + \frac{t}{t_{\circ}}}$$

نشان دهید که برای مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ $t_{\circ}$ (مانند $۳۰۰ \leq t_{\circ} \leq ۵۰۰$)، پارامتر یادگیری در مراحل اولیه‌ی آموزش (مقادیر کوچک گام تکرار t) تقریباً ثابت است و برای مقادیر بزرگ با نسبت معکوس با t کاهش می‌یابد. مرحله‌ی اول، مرحله‌ی جستجو (search pahse) و مرحله‌ی دوم، مرحله‌ی همگرایی (converge phase) خوانده می‌شود. منطق و چرایی چنین روالی را توضیح دهید.

۶) نشان دهید که اگر $N = ۲(l+۱)$ باشد، تعداد دای‌کوتومی‌ها (dichotomy: تفکیک‌کننده به دو بخش) برای N نقطه در وضعیت عمومی در فضای l بعدی برابر است با $۲^{N-۱}$.
راهنمایی: از روابط زیر استفاده کنید:

$$\sum_{i=۰}^{J} \binom{J}{i} = ۲^{J}, \qquad \binom{۲n+۱}{n-i+۱} = \binom{۲n+۱}{n+i}$$

۷) نگاشت ϕ از فضای ورود به یک فضای بعد بالاتر را به صورت

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}(x) \in \mathbb{R}^{۲k+۱}$$

در نظر بگیرید که در آن

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \left[\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \cos x, \cos ۲x, \ldots, \cos kx, \sin x, \sin ۲x, \ldots, \sin kx\right]$$

نشان دهید که هسته (kernel) ضرب داخلی متناظر عبارت است از

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_j = K(x_i, x_j) = \frac{\sin\left(\left(k + \frac{۱}{۲}\right)(x_i - x_j)\right)}{۲ \sin\left(\frac{x_i - x_j}{۲}\right)}.$$

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2024 (۲۸ اسفند ۱۴۰۲)