



تکلیف شماره ۱

تکلیف اول

طبقه‌بندی بر اساس نظریه‌ی تصمیم‌بیزی

CLASSIFICATION BASED ON BAYESIAN DECISION THEORY

۱) توزیع کوشی را در یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دو طبقه‌ای یک بعدی در نظر بگیرید:

$$p(x|\omega_i) = \frac{1}{\pi b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_i}{b}\right)^2}, \quad i = 1, 2, \quad a_2 > a_1$$

(الف) با انتگرال‌گیری نشان دهید که این توزیع‌ها واقعاً نرمال شده هستند.

(ب) با فرض مساوی بودن احتمالات پیشین $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ نشان دهید که اگر $x = (a_1 + a_2)/2$ $P(\omega_1|x) = P(\omega_2|x)$ رفتار $P(\omega_1|x)$ و $P(\omega_2|x)$ وقتی که $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ چگونه است؟ توضیح دهید.

(ج) نشان دهید که می‌نیم احتمال خطا با رابطه‌ی

$$P(\text{error}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{a_2 - a_1}{2b} \right|$$

داده می‌شود. این مقدار را به صورت تابعی از $|a_2 - a_1|/b$ رسم کنید (با فرض $b > 0$).

(د) ماکزیم مقدار $P(\text{error})$ چیست و تحت چه شرایطی می‌تواند رخ دهد؟ توضیح دهید.

(ه) یک طبقه‌بندی‌کننده‌ی می‌نیم خطای بیزی را بر حسب a_i و b طراحی کنید با فرض اینکه احتمالات پیشین مساوی باشند.

(و) یک طبقه‌بندی‌کننده‌ی می‌نیم خطر بیزی را با وزن‌های خطای زیر طراحی کنید:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مرزهای تصمیم‌گیری را برای این حالت نشان دهید. احتمال خطا چیست؟ نتایج این قسمت را با قسمت قبلی مقایسه کنید.

۲) توزیع‌های یکنواخت زیر را در یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دو طبقه‌ای تک بعدی در نظر بگیرید:

• طبقه‌ی ۱، ω_1 ، یکنواخت در $[0, 2]$

• طبقه‌ی ۲، ω_2 ، یکنواخت در $[1, 4]$

(الف) فرض کنید $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ باشد. یک طبقه‌بندی‌کننده‌ی بیزی برای می‌نیم خطا طراحی کنید.

(ب) فرض کنید $P(\omega_1) = 0.5P(\omega_2)$ باشد. مجدداً یک طبقه‌بندی‌کننده‌ی بیزی برای می‌نیم خطا طراحی کنید.

۳) توزیع‌های نرمال زیر را برای یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دو طبقه‌ای دو بعدی در نظر بگیرید:

• طبقه‌ی ۱، ω_1 ، نرمال، $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

• طبقه‌ی ۲، ω_2 ، نرمال، $\Sigma_2 = \Sigma_1$, $\mu_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- (الف) مرز تصمیم بیزی را برای می‌نیمم احتمال خطا به دست آورید و آن را رسم کنید
- (ب) مرز تصمیم بیزی را برای می‌نیمم خطر (risk) به دست آورید و آن را رسم کنید. فرض کنید:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ a & 0 \end{bmatrix}, a > 0$$

- (ج) دو قسمت قبل را برای مورد زیر تکرار کنید:

• طبقه ۱، ω_1 ، نرمال، $\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

• طبقه ۲، ω_2 ، نرمال، $\mu_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$