شبکه‌های عصبی مصنوعی

درس ۲۱

شبکه‌ی هاپفیلد

Hopfield Network

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/nn

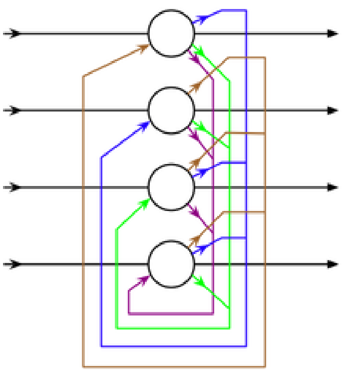
Hopfield Network

شبکه‌ی هاپفیلد

HOPFIELD NETWORK

شبکه‌ی هاپفیلد نقش عمده‌ای در احیای پژوهش‌های شبکه‌های عصبی در اواخر دهه‌ی ۱۹۸۰ داشت.

استفاده از شبکه‌ی هاپفیلد برای پیاده‌سازی رفتار یک **حافظه‌ی انجمنی**



شبکه‌ی هاپفیلد

جان هاپفیلد

HOPFIELD NETWORK

هاپفیلد یک فیزیکدان بود:

- آغاز فعالیت‌ها با مطالعه درباره‌ی تعاملات بین نور و جامدات
- بعدها، پژوهش بر روی مکانیسم انتقال الکترون‌ها بین مولکول‌های زنده
- در نهایت، ترکیب فعالیت‌ها و مطالعات فیزیکی و ریاضیاتی با تجربیات بعدی او در زیست‌شناسی
  ⇐ در قالب یک شبکه‌ی عصبی جدید (شبکه‌ی هاپفیلد)

John Hopfield (1933-)

مقالات تأثیرگذار هاپفیلد: ۱۹۸۲ و ۱۹۸۴:

- گردآوری مجموعه‌ای از ایده‌های مهم و بیان در قالب تحلیل‌های ریاضی روشن
- قیاس بین شبکه‌ی عصبی هاپفیلد و مدل آیزینگ در مغناطیس (⟵ فیزیک آماری)
  - مطرح شدن ایده‌های جدید در رابطه با نسبت علم فیزیک و علم شبکه‌های عصبی
  - موجب تشویق بسیاری از فیزیکدان‌ها برای کار بر روی شبکه‌های عصبی در کنار مهندسان و پژوهشگران

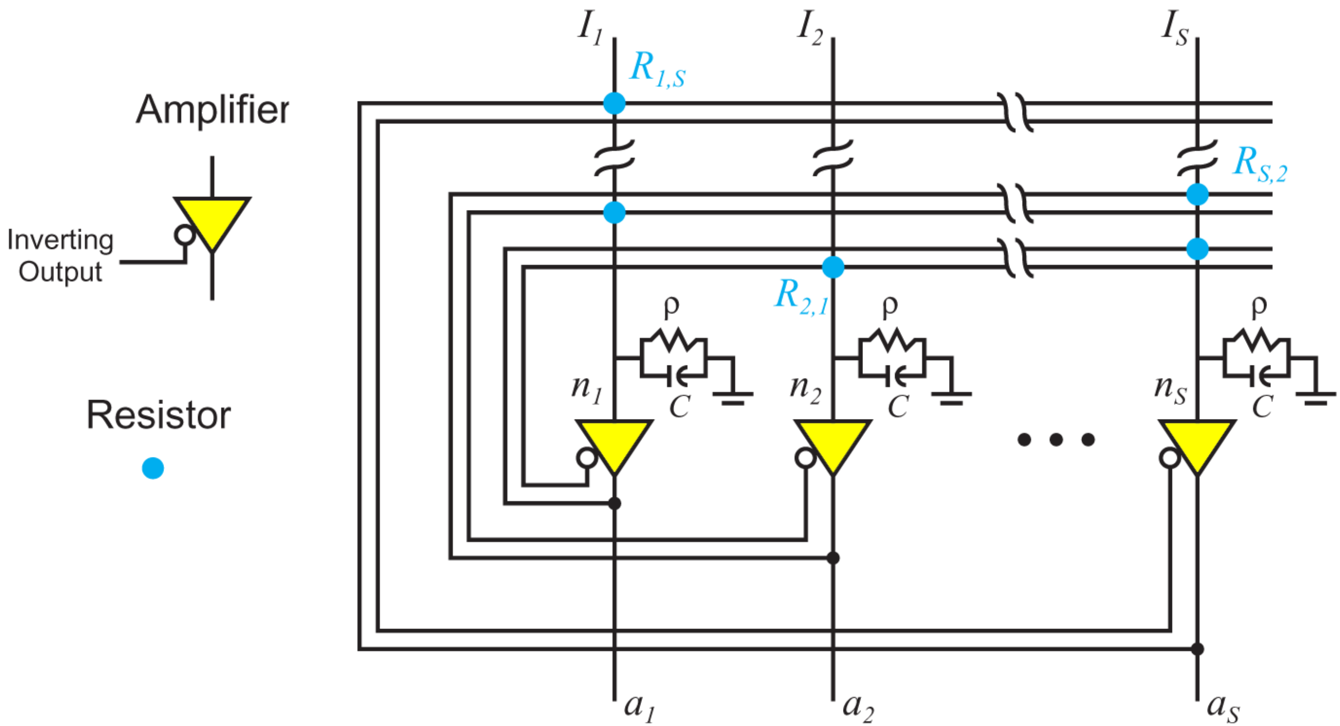
- همکاری طولانی مدت با آزمایشگاه AT&T بل و رابطه‌ی نزدیک با طراحان VLSI
- در اواسط ۱۹۸۷ آزمایشگاه بل موفق به توسعه‌ی یک تراشه‌ی شبکه‌ی عصبی بر مبنای شبکه‌ی هاپفیلد شد.
  - این یکی از دلایل تمایز و برتری پژوهش‌های هاپفیلد نسبت به دیگران است.

شبکه‌ی هاپفیلد

۱

مدل هاپفیلد

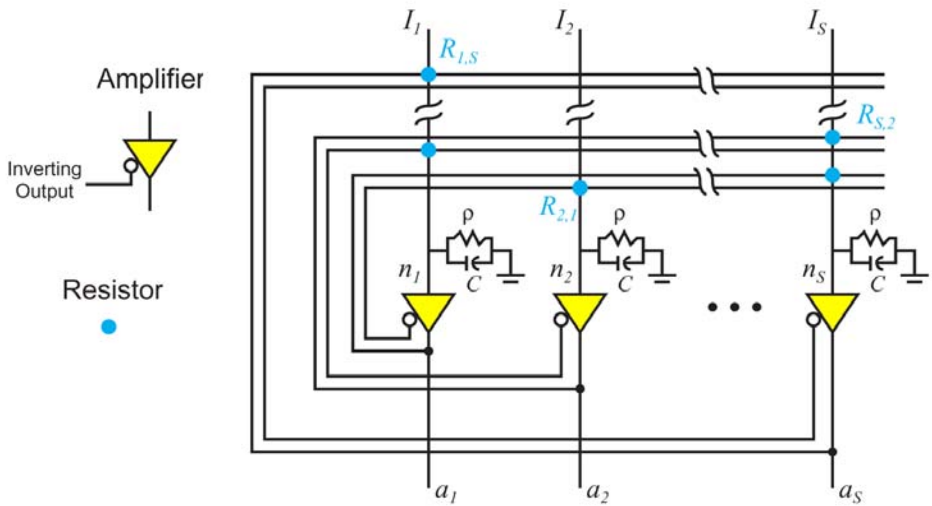
Hopfield Model



مدل هاپفیلد

Hopfield Model

هاپفیلد مدل خود را در قالب یک مدار الکتریکی ارائه کرد:



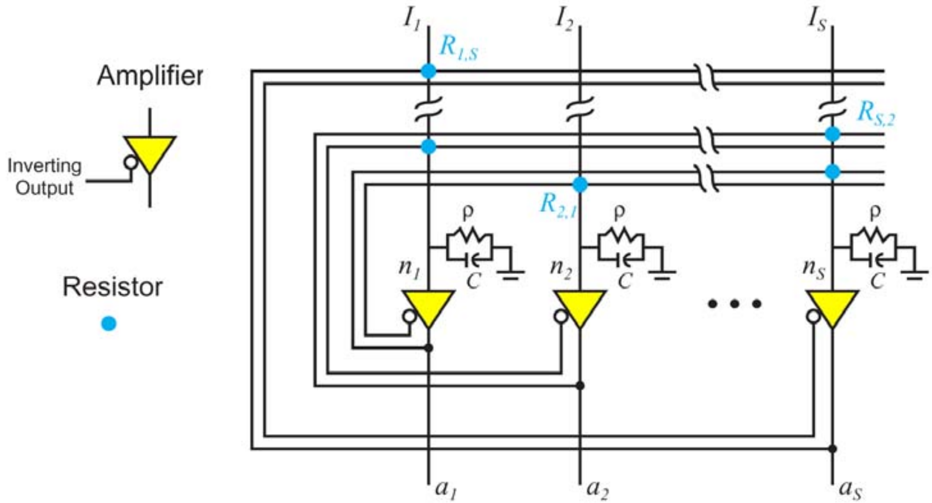
هر نرون، با یک تقویت‌کننده‌ی عملیاتی (Op-Amp) و شبکه‌ی مقاومت–خازن متصل به آن بازنمایی شده است.

نرون‌ها دارای دو مجموعه ورودی هستند:

- مجموعه‌ی اول: شامل جریان‌های ... ,I_1,I_2 که ورودی‌های ثابت خارجی محسوب می‌شوند.
- مجموعه‌ی دوم: حاوی اتصالات فیدبک از سایر تقویت‌کننده های عملیاتی است.

مدل هاپفیلد

Hopfield Model



به‌عنوان نمونه: خروجی دوم a_2 به مقاومت $R_{S,2}$ وصل می‌شود (که به ورودی تقویت‌کننده‌ی S متصل است.)

ورودی منفی به یک نرون از طریق انتخاب خروجی معکوس کننده از یک تقویت‌کننده قابل تدارک است.
(در شکل، خروجی معکوس‌کننده‌ی تقویت‌کننده‌ی اول از طریق مقاومت $R_{2,1}$ به ورودی تقویت‌کننده‌ی دوم متصل است.)

21

Equations of Operation

$$C\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{S} T_{i,j}a_j(t) - \frac{n_i(t)}{R_i} + I_i$$

n_i - input voltage to the *i*th amplifier
a_i - output voltage of the *i*th amplifier
C - amplifier input capacitance
I_i - fixed input current to the *i*th amplifier

$$\left|T_{i,j}\right| = \frac{1}{R_{i,j}} \qquad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho} + \sum_{j=1}^{S} \frac{1}{R_{i,j}} \qquad n_i = f^{-1}(a_i) \qquad a_i = f(n_i)$$

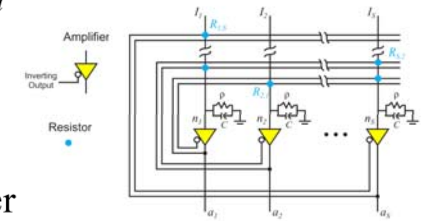
مدل هاپفیلد

معادلات عملکرد

Equations of Operation

معادلات عملکرد مدل هاپفیلد بر اساس قانون جریان کیرشهف استخراج می‌شود:

$$C\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{S} T_{i,j}a_j(t) - \frac{n_i(t)}{R_i} + I_i$$



ولتاژ ورودی به تقویت‌کننده‌ی iام — n_i - input voltage to the ith amplifier

ولتاژ خروجی از تقویت‌کننده‌ی iام — a_i - output voltage of the ith amplifier

ظرفیت خازنی ورودی تقویت‌کننده — C - amplifier input capacitance

جریان ورودی ثابت به تقویت‌کننده‌ی iام — I_i - fixed input current to the ith amplifier

با فرض تقارن در مدار، داریم: $T_{i,j} = T_{j,i}$

$$|T_{i,j}| = \frac{1}{R_{i,j}} \qquad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho} + \sum_{j=1}^{S}\frac{1}{R_{i,j}} \qquad n_i = f^{-1}(a_i) \qquad a_i = f(n_i)$$

$f(n)$ مشخصه‌ی تقویت‌کننده است.

تابع انتقال تقویت‌کننده $a_i = f(n_i)$ یک تابع سیگموئید است (خودش و معکوسش صعودی است).

Network Format

$$R_i C \frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{S} R_i T_{i,j} a_j(t) - n_i(t) + R_i I_i$$

Define:

$$\varepsilon = R_i C \qquad w_{i,j} = R_i T_{i,j} \qquad b_i = R_i I_i$$

$$\varepsilon \frac{dn_i(t)}{dt} = -n_i(t) + \sum_{j=1}^{S} w_{i,j} a_j(t) + b_i$$

Vector Form:

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = -\mathbf{n}(t) + \mathbf{W}\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{n}(t))$$

مدل هاپفیلد

قالب شبکه

Network Format

با ضرب طرفین معادله در R_i داریم:

$$R_i C \frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{S} R_i T_{i,j} a_j(t) - n_i(t) + R_i I_i$$

با تعریف:

Define:

$$\varepsilon = R_i C \qquad w_{i,j} = R_i T_{i,j} \qquad b_i = R_i I_i$$

به معادله‌ی زیر در فرم استاندارد شبکه‌های عصبی می‌رسیم:

$$\varepsilon \frac{dn_i(t)}{dt} = -n_i(t) + \sum_{j=1}^{S} w_{i,j} a_j(t) + b_i$$

فرم برداری:

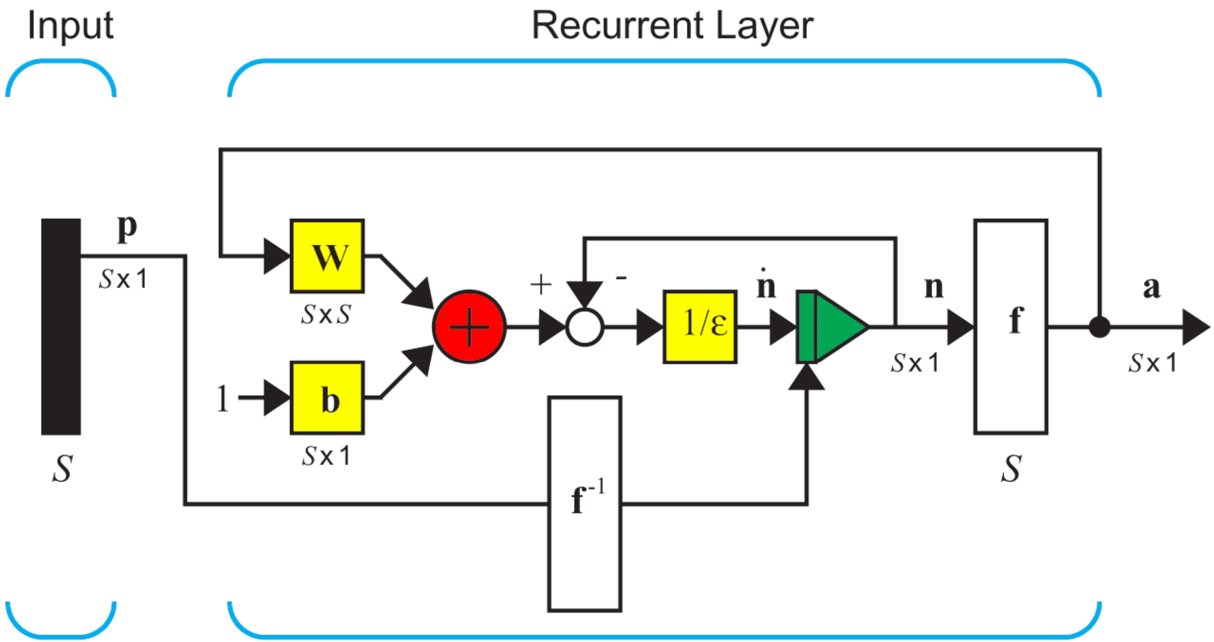
Vector Form:

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = -\mathbf{n}(t) + \mathbf{W}\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}$$

که در آن:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{n}(t))$$

Hopfield Network



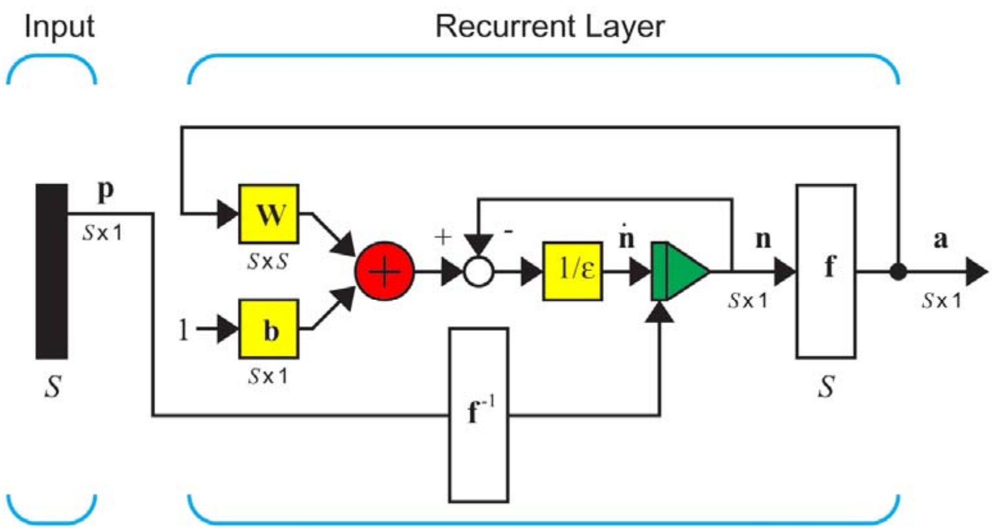
$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}), \quad (\mathbf{a}(0) = \mathbf{p}) \qquad \varepsilon\, d\mathbf{n}/dt = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\,\mathbf{f}(\mathbf{n}) + \mathbf{b}$$

مدل هاپفیلد

شبکه‌ی هاپفیلد

HOPFIELD NETWORK

بازنمایی شبکه‌ی هاپفیلد پایه (متشکل از مدارهای تقویت‌کننده‌ی عملیاتی) در قالب شبکه‌های عصبی استاندارد:



$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}),\ \ (\mathbf{a}(0) = \mathbf{p}) \qquad \varepsilon\, d\mathbf{n}/dt = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\,\mathbf{f}(\mathbf{n}) + \mathbf{b}$$

بردار ورودی **p** مشخص، خروجی اولیه‌ی شبکه می‌باشد.

❋ این شکل از شبکه‌های هاپفیلد در شبکه‌های حافظه انجمنی استفاده می‌شود.

شبکه‌ی هاپفیلد

۲

تابع لیاپانوف

Lyapunov Function

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

تابع لیاپانوف

تابع لیاپانوف برای شبکه‌ی هاپفیلد

LYAPUNOV FUNCTION

استفاده از قضیه‌ی پایداری لیاپانوف برای تحلیل شبکه‌های بازگشتی، یکی از دستاوردهای کلیدی هاپفیلد است.

نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از «قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال» برای شبکه‌ی هاپفیلد استفاده نمود.
ابتدا باید **تابع لیاپانوف** انتخاب شود.
هاپفیلد، تابع زیر را به‌عنوان تابع لیاپانوف پیشنهاد کرد:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

❋ انتخاب این تابع خاص، به‌عنوان تابع لیاپانوف، یکی از دستاوردهای مهم هاپفیلد است.

Individual Derivatives

First Term:

$$\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a}\right\} = -\frac{1}{2}\nabla[\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -[\mathbf{W}\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{a}^T\mathbf{W}\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

Second Term:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} = \frac{d}{da_i}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\}\frac{da_i}{dt} = f^{-1}(a_i)\frac{da_i}{dt} = n_i\frac{da_i}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\}\right] = \mathbf{n}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

Third Term:

$$\frac{d}{dt}\{-\mathbf{b}^T\mathbf{a}\} = -\nabla[\mathbf{b}^T\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{b}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

تابع لیاپانوف

مشتقات تک تک جملات تابع لیاپانوف برای شبکه‌ی هاپفیلد

INDIVIDUAL DERIVATIVES

برای استفاده از قضیه‌ی لاسال، باید مشتق $V(\mathbf{a})$ را محاسبه کنیم. هر یک از جملات $V(\mathbf{a})$ را جداگانه بررسی می‌کنیم:

جمله‌ی اول:

First Term:

$$\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a}\right\} = -\frac{1}{2}\nabla[\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -[\mathbf{W}\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{a}^T\mathbf{W}\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

جمله‌ی دوم: شامل مجموع چند انتگرال؛
با در نظر گرفتن یکی از انتگرال‌ها داریم:

Second Term:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} = \frac{d}{da_i}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\}\frac{da_i}{dt} = f^{-1}(a_i)\frac{da_i}{dt} = n_i\frac{da_i}{dt}$$

مجموع مشتقات جمله‌ی دوم:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\}\right] = \mathbf{n}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

جمله‌ی سوم:

Third Term:

$$\frac{d}{dt}\{-\mathbf{b}^T\mathbf{a}\} = -\nabla[\mathbf{b}^T\mathbf{a}]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{b}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

21 Complete Lyapunov Derivative

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^T\mathbf{W}\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{n}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \mathbf{b}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = [-\mathbf{a}^T\mathbf{W} + \mathbf{n}^T - \mathbf{b}^T]\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

From the system equations we know:

$$[-\mathbf{a}^T\mathbf{W} + \mathbf{n}^T - \mathbf{b}^T] = -\varepsilon\left[\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right]^T$$

So the derivative can be written:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon\left[\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{dn_i}{dt}\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right) = -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{dn_i}{dt}\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)$$

$$= -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)]\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2$$

If $\quad \frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)] > 0 \quad$ then $\quad \frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) \le 0$

تابع لیاپانوف

مشتقات کامل تابع لیاپانوف برای شبکه‌ی هاپفیلد

Complete Lyapunov Derivative

پس مشتق $V(\mathbf{a})$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^T\mathbf{W}\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{n}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \mathbf{b}^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = [-\mathbf{a}^T\mathbf{W} + \mathbf{n}^T - \mathbf{b}^T]\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

From the system equations we know: از معادلات سیستم داریم:

$$[-\mathbf{a}^T\mathbf{W} + \mathbf{n}^T - \mathbf{b}^T] = -\varepsilon\left[\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right]^T$$

So the derivative can be written: پس می‌توان مشتق را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon\left[\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right]^T\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{dn_i}{dt}\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right) = -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{dn_i}{dt}\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)$$

$$= -\varepsilon\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)]\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2$$

وقتی f^{-1} تابعی صعودی است.

$$\text{If} \quad \frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)] > 0 \quad \text{then} \quad \frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) \le 0$$

پس اگر $f^{-1}(\mathbf{a})$ یک تابع صعودی باشد، $dV(\mathbf{a})/dt$ یک تابع نیمه‌معین منفی است $\Leftarrow$ $V(\mathbf{a})$ یک تابع مناسب لیاپانوف می‌باشد.

Invariant Sets

$$Z = \{\mathbf{a}: dV(\mathbf{a})/dt = 0,\ \ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{S} \left(\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)]\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2$$

This will be zero only if the neuron outputs are not changing:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0}$$

Therefore, the system energy is not changing only at the equilibrium points of the circuit. Thus, all points in Z are potential attractors:

$$L = Z$$

تابع لیاپانوف

مجموعه‌های تغییرناپذیر

Invariant Sets

به‌منظور استفاده از قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال برای تعیین نقاط تعادل در شبکه‌ی هاپفیلد، ابتدا مجموعه‌ی Z را می‌یابیم:

$$Z = \{\mathbf{a}: dV(\mathbf{a})/dt = 0,\ \ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$

(همه‌ی نقاطی که مشتق تابع لیاپانوف در آن صفر است: فرض می‌کنیم G شامل کل $\mathbb{R}^2$ باشد.)

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{S} \left(\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)]\right)\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2$$

مقدار مشتق $V(\mathbf{a})$ در صورتی صفر می‌شود که مشتق خروجی همه‌ی نرون‌ها برابر با صفر شود.

This will be zero only if the neuron outputs are not changing:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0}$$

صفر شدن مشتقات در صورتی امکان دارد که خروجی‌های نرون‌ها بدون تغییر باشند.

Therefore, the system energy is not changing only at the equilibrium points of the circuit. Thus, all points in Z are potential attractors:

این نقاط در مکان‌هایی قرار دارند که انرژی سیستم تغییر نمی‌کند؛ پس L (بزرگ‌ترین مجموعه‌ی تغییرناپذیر Z) می‌شود:

$$L = Z$$

بنابراین همه‌ی نقاط Z به‌طور بالقوه جزء **نقاط جذب** هستند.

21

Example

$$a = f(n) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\pi n}{2}\right) \qquad n = \frac{2}{\gamma\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2}a\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{1,2} = R_{2,1} = 1 \\ \\ T_{1,2} = T_{2,1} = 1 \end{array}\right\} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = R_i C = 1$$

$$\gamma = 1.4$$

$$\left. I_1 = I_2 = 0 \right\} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تابع لیاپانوف

مثال

EXAMPLE

سیستمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای مشخصه‌ی یک تقویت‌کننده است:

$$a = f(n) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\pi n}{2}\right) \qquad n = \frac{2}{\gamma\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2}a\right)$$

دو تقویت‌کننده را در نظر می‌گیریم که خروجی هر یک به ورودی دیگری از طریق یک مقاومت متصل باشد:

$$\left.\begin{aligned} R_{1,2} &= R_{2,1} = 1 \\ T_{1,2} &= T_{2,1} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس وزن

اگر خازن ورودی تقویت‌کننده نیز برابر 1 قرار داده شود، داریم:

$$\varepsilon = R_i C = 1$$

قرار می‌دهیم:

$$\gamma = 1.4$$

پس:

$$\left.I_1 = I_2 = 0\right\} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بایاس

Example Lyapunov Function

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -a_1 a_2$$

$$\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du = \frac{2}{\gamma\pi}\int_0^{a_i} \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)du = \frac{2}{\gamma\pi}\left[-\log\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right]\frac{2}{\pi}\right]_0^{a_i} = -\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}a_i\right)\right]$$

$$V(\mathbf{a}) = -a_1 a_2 - \frac{4}{1.4\pi^2}\left[\log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_1\right)\right\} + \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_2\right)\right\}\right]$$

تابع لیاپانوف

مثال (تابع لیاپانوف)

Example Lyapunov Function

تابع لیاپانوف:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

جمله‌ی اول:

$$-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -a_1 a_2$$

جمله‌ی سوم صفر است زیرا بایاس صفر است.

جزء i–ام جمله‌ی دوم به‌صورت زیر است:

$$\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du = \frac{2}{\gamma\pi}\int_0^{a_i}\tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)du = \frac{2}{\gamma\pi}\left[-\log\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right]\frac{2}{\pi}\right]_0^{a_i} = -\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}a_i\right)\right]$$

بنابراین، برای تابع لیاپانوف داریم:

$$V(\mathbf{a}) = -a_1 a_2 - \frac{4}{1.4\pi^2}\left[\log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_1\right)\right\} + \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_2\right)\right\}\right]$$

21

Example Network Equations

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\mathbf{a}$$

$$dn_1/dt = a_2 - n_1$$

$$dn_2/dt = a_1 - n_2$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.4\pi}{2}n_1\right)$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.4\pi}{2}n_2\right)$$

تابع لیاپانوف

مثال (معادلات شبکه)

Example Network Equations

حال، معادله‌ی شبکه را می‌نویسیم. با $\varepsilon = 1$ و $\mathbf{b} = 0$ معادله‌ی شبکه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} + \mathbf{W}\mathbf{a}$$

با جایگزینی ماتریس وزن‌ها در این عبارت به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$dn_1/dt = a_2 - n_1$$

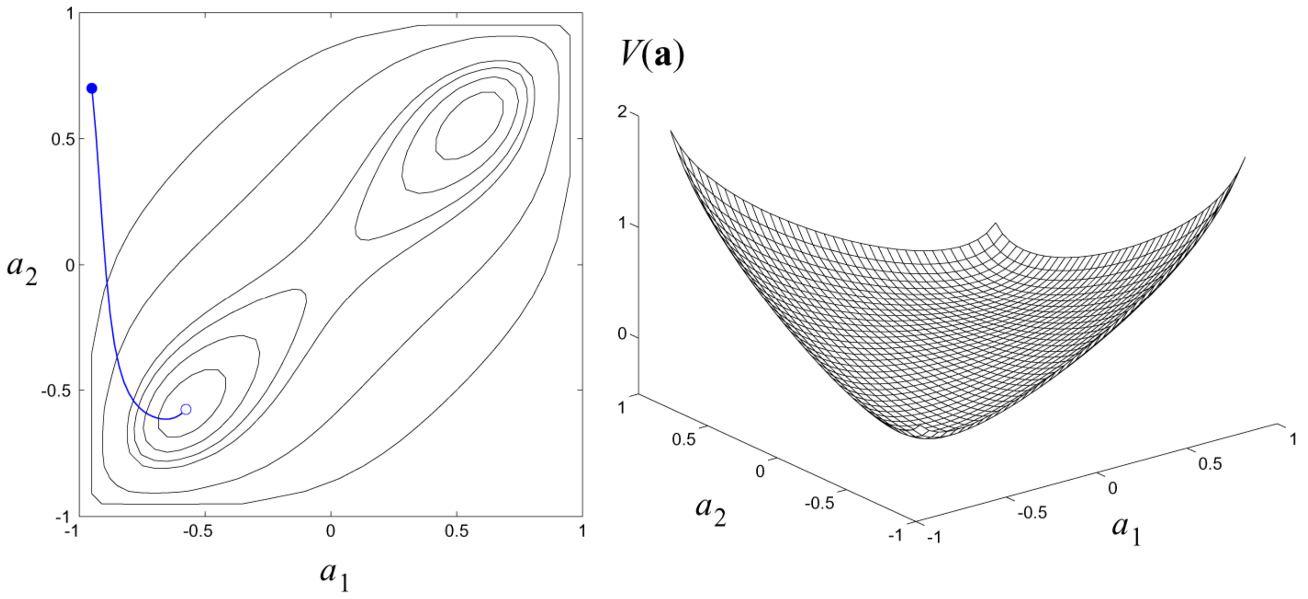
$$dn_2/dt = a_1 - n_2$$

خروجی نرون‌ها عبارت است از:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.4\pi}{2}n_1\right)$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.4\pi}{2}n_2\right)$$

21 Lyapunov Function and Trajectory

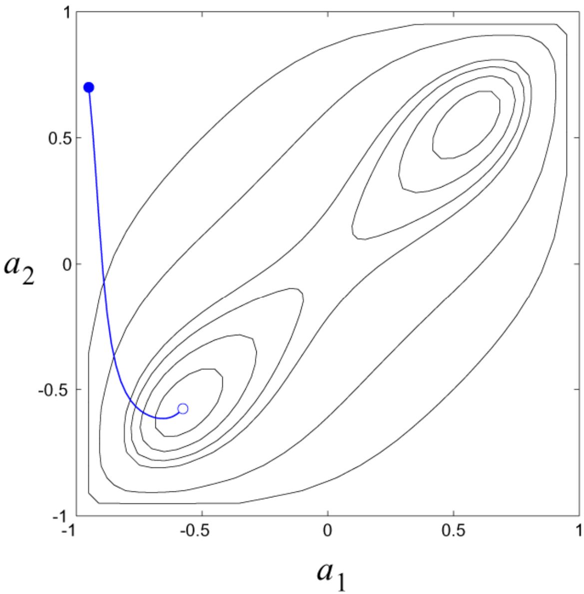


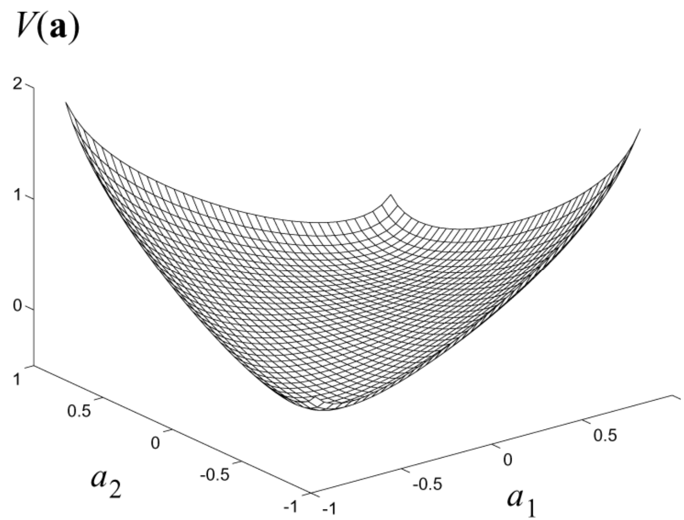
تابع لیاپانوف

مثال (تابع لیاپانوف و خط سیر)

LYAPUNOV FUNCTION AND TRAJECTORY

نمودار کانتوری و یک خط سیر نمونه
(در ارتباط با این تابع لیاپانوف)

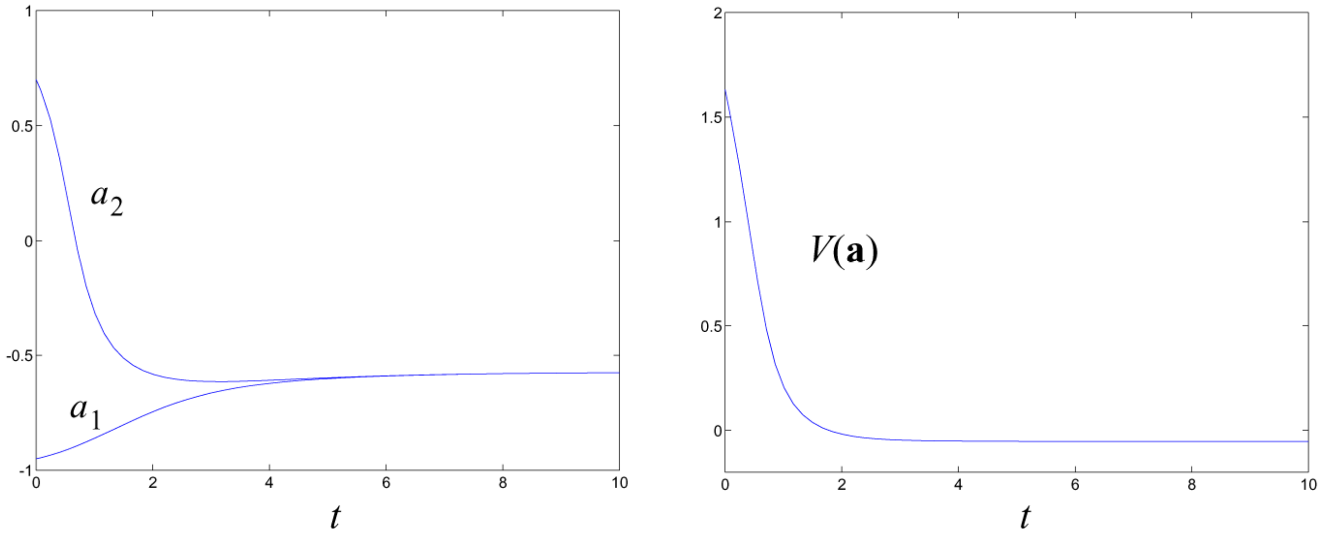




این سیستم دارای دو **جذب‌کننده** می‌باشد (یکی در پایین سمت چپ و دیگری در بالا سمت راست)

21

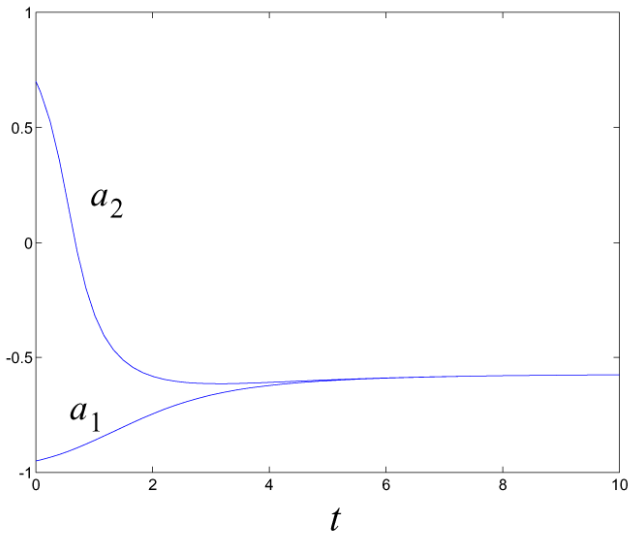
Time Response

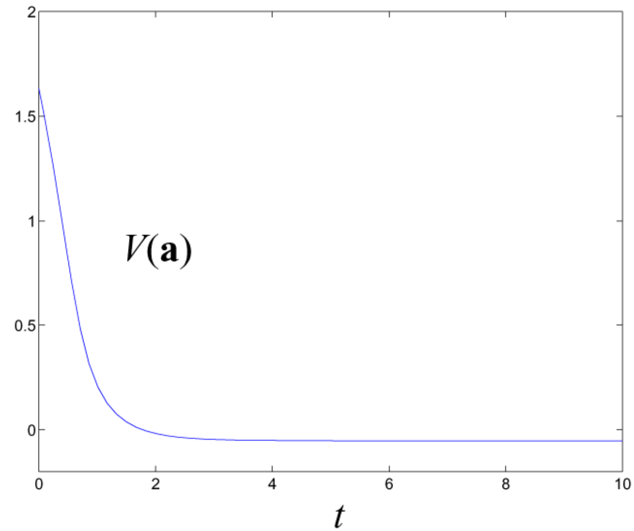


تابع لیاپانوف

مثال (پاسخ زمانی)

TIME RESPONSE

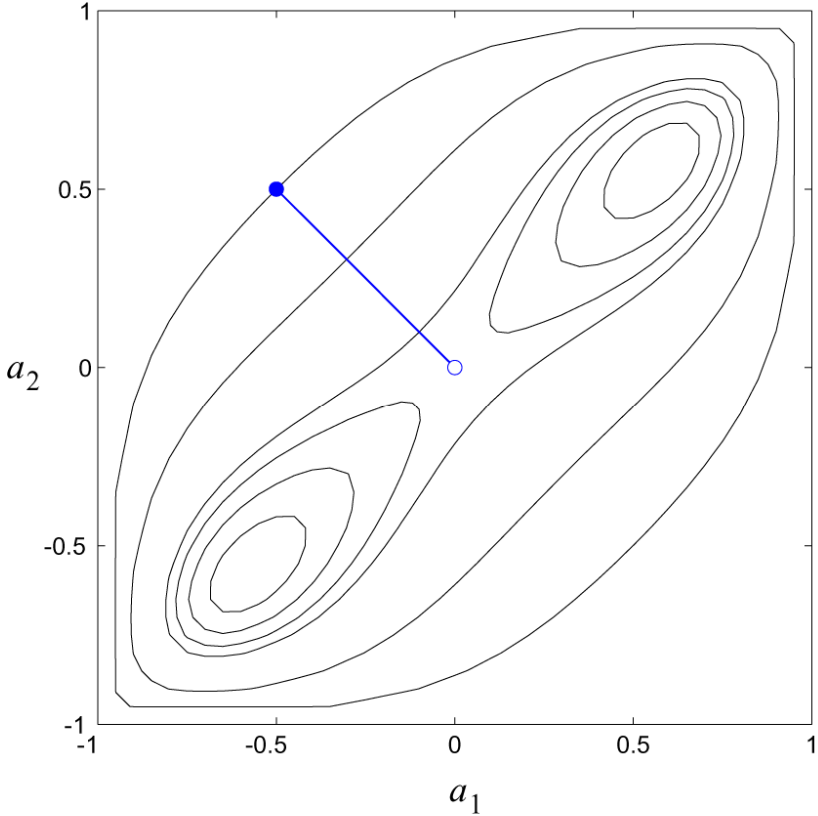




پاسخ زمانی تابع لیاپانوف:
این تابع تا رسیدن به نقطه‌ی تعادل
به‌صورت پیوسته کاهش می‌یابد.

21

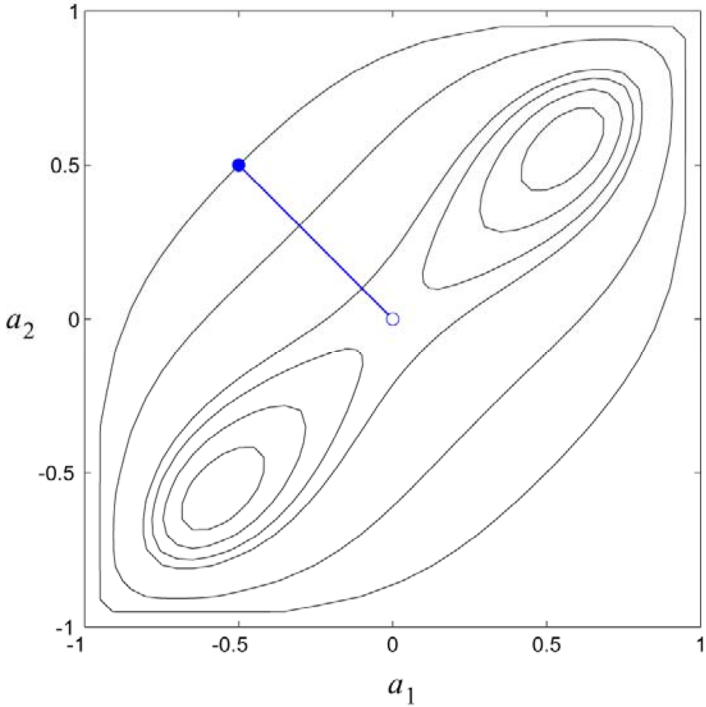
Convergence to a Saddle Point



تابع لیاپانوف

مثال (همگرایی به نقطه‌ی زینی)

CONVERGENCE TO A SADDLE POINT

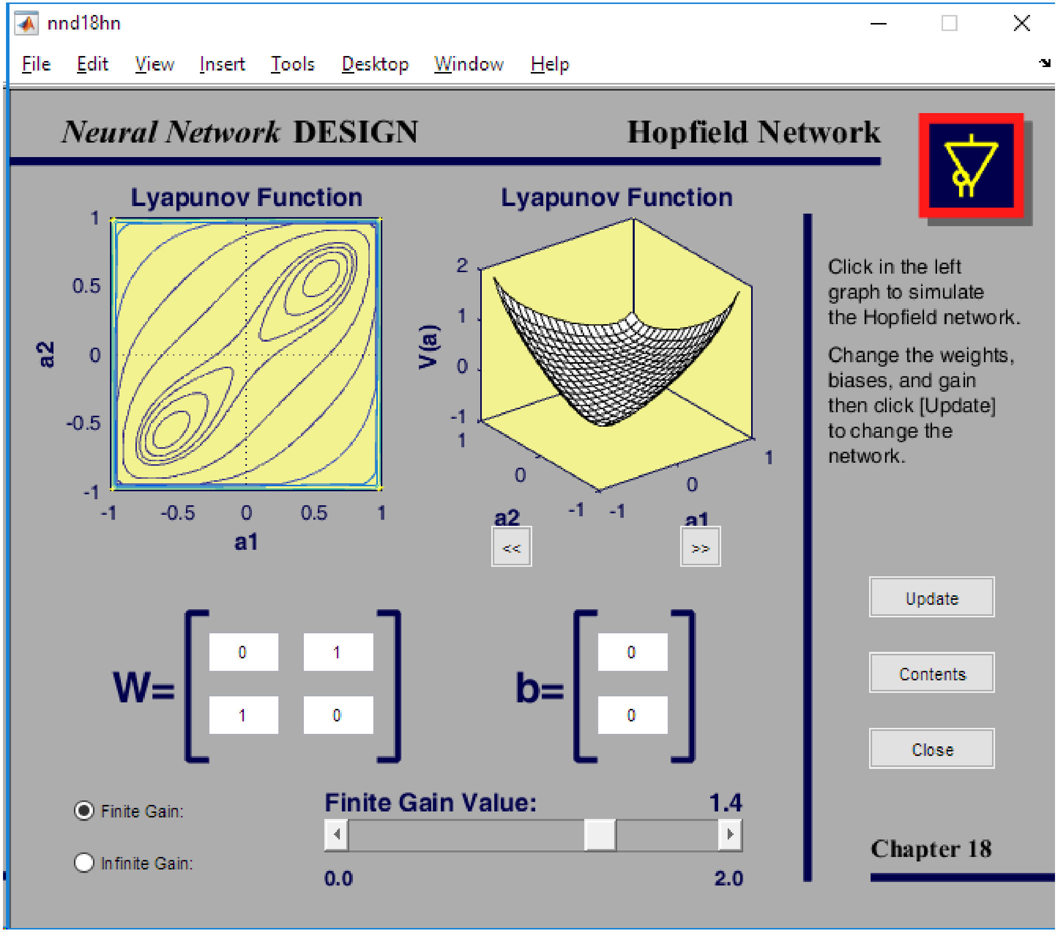


این سیستم
دارای یک نقطه‌ی تعادل زینی در مبدأ است.

اگر شبکه در هر مکانی روی خط قطری
واصل بین گوشه‌های چپ بالا و راست پایین
مقداردهی آغازین شود،
راه‌حل به مبدأ همگرا می‌شود.

هر حالت آغازینی که روی این خط واقع
نشود، به یکی از راه‌حل‌های چپ پایین یا
راست بالا همگرا می‌شود.

❋ راه‌حل واقع در مبدأ یک نقطه‌ی زینی برای
تابع لیاپانوف است و می‌نیمم محلی نیست.


nnd18hn
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Neural Network DESIGN
Hopfield Network
Lyapunov Function
Lyapunov Function
a2
a1
V(a)
a2
a1
<<
>>
Click in the left graph to simulate the Hopfield network.
Change the weights, biases, and gain then click [Update] to change the network.
W=
0 1
1 0
b=
0
0
Update
Contents
Close
Finite Gain:
Infinite Gain:
Finite Gain Value:
1.4
0.0
2.0
Chapter 18

>> nnd18hn

Hopfield Attractors

The potential attractors of the Hopfield network satisfy:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0}$$

How are these points related to the minima of $V(\mathbf{a})$? The minima must satisfy:

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial a_1}\ \frac{\partial V}{\partial a_2}\ \dots\ \frac{\partial V}{\partial a_S}\right]^T = \mathbf{0}$$

Where the Lyapunov function is given by:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

تابع لیاپانوف

جذب‌کننده‌های هاپفیلد

HOPFIELD ATTRACTORS

جذب‌کننده‌های بالقوه‌ی شبکه‌ی هاپفیلد، شرط زیر را ارضا می‌کنند:

The potential attractors of the Hopfield network satisfy:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0}$$

ارتباط نقاط جذب‌کننده با می‌نیمم‌های تابع لیاپانوف: نقاط می‌نیمم باید شرط نقطه‌ی ایستان را ارضا کنند:

How are these points related to the minima of $V(\mathbf{a})$? The minima must satisfy:

(نقطه‌ی ایستان ≡ مشتق مساوی صفر)

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial a_1}\ \frac{\partial V}{\partial a_2}\ \ldots\ \frac{\partial V}{\partial a_S}\right]^T = \mathbf{0}$$

که در آن تابع لیاپانوف به‌صورت زیر است:

Where the Lyapunov function is given by:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

21 Hopfield Attractors

Using previous results, we can show that:

$$\nabla V(\mathbf{a}) = [-\mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{n} - \mathbf{b}] = -\varepsilon\left[\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right]$$

The *i*th element of the gradient is therefore:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon\frac{dn_i}{dt} = -\varepsilon\frac{d}{dt}([f^{-1}(a_i)]) = -\varepsilon\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)]\frac{da_i}{dt}$$

Since the transfer function and its inverse are monotonic increasing:

$$\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)] > 0$$

All points for which $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \mathbf{0}$ will also satisfy $\nabla V(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

Therefore all attractors will be stationary points of $V(\mathbf{a})$.

تابع لیاپانوف

جذب‌کننده‌های هاپفیلد

Hopfield Attractors

Using previous results, we can show that: از نتایج قبلی می‌توان نشان داد:

$$\nabla V(\mathbf{a}) = [-\mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{n} - \mathbf{b}] = -\varepsilon\left[\frac{d\,\mathbf{n}(t)}{dt}\right]$$

پس عنصر i–ام گرادیان می‌شود:

The ith element of the gradient is therefore:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}V(\mathbf{a}) = -\varepsilon\frac{dn_i}{dt} = -\varepsilon\frac{d}{dt}([f^{-1}(a_i)]) = -\varepsilon\frac{d}{d\,a_i}[f^{-1}(a_i)]\frac{da_i}{d\,t}$$

چون تابع انتقال و معکوس آن یکنوای صعودی هستند، پس:

Since the transfer function and its inverse are monotonic increasing:

$$\frac{d}{da_i}[f^{-1}(a_i)] > 0$$

این دلالت دارد بر اینکه در همه‌ی نقاطی که $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{0}$ است، گرادیان $V(\mathbf{a})$ هم مساوی صفر است.

All points for which $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \mathbf{0}$ will also satisfy $\nabla V(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

پس همه‌ی جذب‌کننده‌ها، نقاط ایستان $V(\mathbf{a})$ نیز هستند.

Therefore all attractors will be stationary points of $V(\mathbf{a})$.

❋ در صورت خطی بودن $f^{-1}(\mathbf{a})$ داریم: $d\mathbf{a}/dt = -\alpha\nabla V(\mathbf{a})$، پس پاسخ شبکه‌ی هاپفیلد، پاسخی از نوع بیشترین کاهش است.
پس در ناحیه‌ای که $f^{-1}(\mathbf{a})$ تقریباً خطی است، راه‌حل شبکه تقریبی از بیشترین کاهش است.

شبکه‌های عصبی مصنوعی

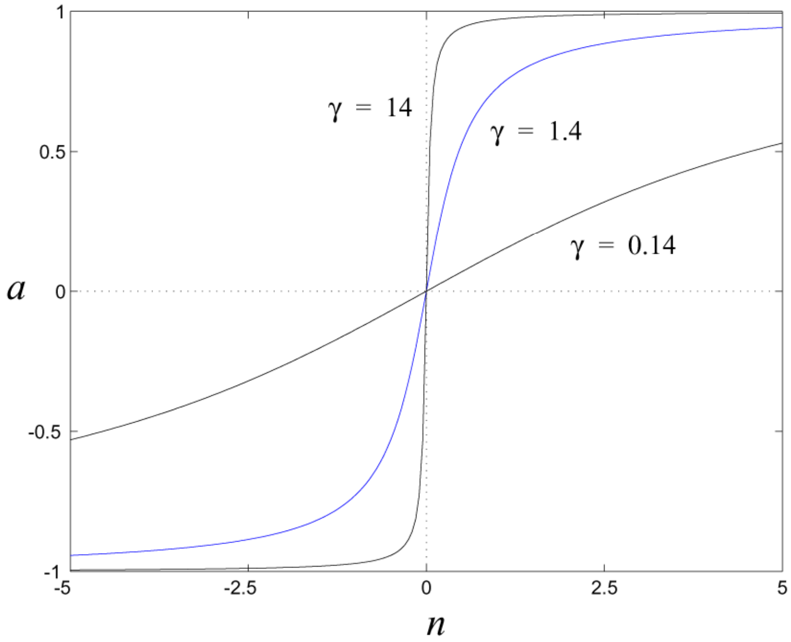
شبکه‌ی هاپفیلد

۳

اثر
بهره

Effect of Gain

$$a = f(n) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\pi n}{2}\right)$$



اثر بهره

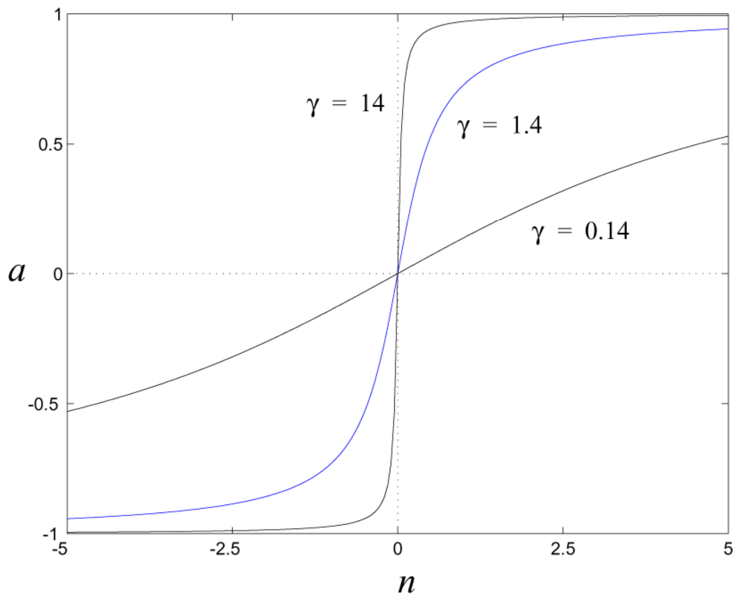
اثر بهره در تابع انتقال

EFFECT OF GAIN

تابع لیاپانوف هاپفیلد را می‌توان در مواردی که **میزان بهره‌ی تقویت‌کنندگی** (γ) بزرگ باشد، ساده‌تر نمود:

$$a = f(n) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\pi n}{2}\right)$$

γ شیب منحنی در $n = 0$ را تعیین می‌کند. (افزایش γ تا بی‌نهایت، $f(n)$ را به تابع علامت (sign) تبدیل می‌کند.)



21

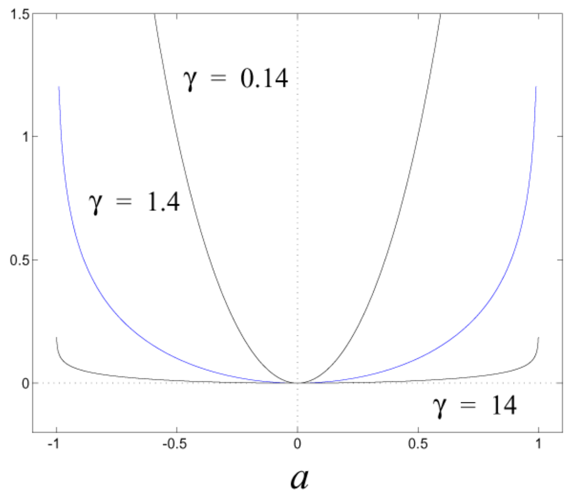
Lyapunov Function

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

$$f^{-1}(u) = \frac{2}{\gamma\pi}\tan\left(\frac{\pi u}{2}\right)$$

$$\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du = \frac{2}{\gamma\pi}\left[\frac{2}{\pi}\log\left(\cos\left(\frac{\pi a_i}{2}\right)\right)\right] = -\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi a_i}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right]$$



اثر بهره

اثر بهره در تابع لیاپانوف

LYAPUNOV FUNCTION

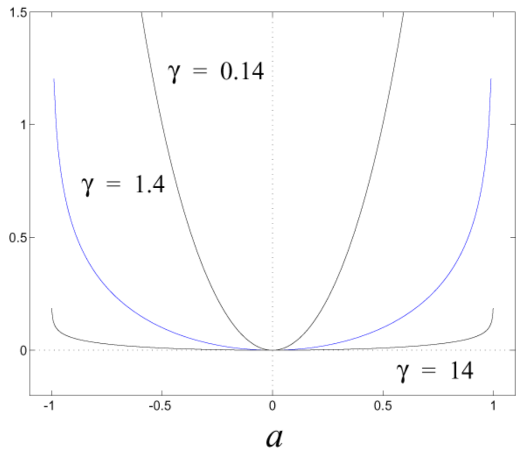
با در نظر گرفتن شکل کلی تابع لیاپانوف هاپفیلد داریم:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{S}\left\{\underbrace{\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du}\right\} - \mathbf{b}^T\mathbf{a} \qquad f^{-1}(u) = \frac{2}{\gamma\pi}\tan\left(\frac{\pi u}{2}\right)$$

جمله‌ی دوم تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\int_0^{a_i} f^{-1}(u)\,du = \frac{2}{\gamma\pi}\left[\frac{2}{\pi}\log\left(\cos\left(\frac{\pi a_i}{2}\right)\right)\right] = -\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi a_i}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{4}{\gamma\pi^2}\log\left[\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right]$$



تابع این جمله با افزایش γ مسطح‌تر شده و به تابع صفر نزدیک‌تر می‌شود.

$\Leftarrow$

با رسیدن γ به بی‌نهایت، انتگرال جمله‌ی دوم در تابع لیاپانوف در محدوده‌ی $-1 < a_i < 1$ به صفر نزدیک می‌شود.

$\Leftarrow$

می‌توان از این جمله صرف‌نظر کرد.

High Gain Lyapunov Function

As $\gamma \to \infty$ the Lyapunov function reduces to:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

The high gain Lyapunov function is quadratic:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{d}^T\mathbf{a} + c$$

where

$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = \mathbf{A} = -\mathbf{W} \qquad \mathbf{d} = -\mathbf{b} \qquad c = 0$$

اثر بهره

تابع لیاپانوف با بهره‌ی بالا

High Gain Lyapunov Function

وقتی γ به سمت بی‌نهایت میل کند، تابع لیاپانوف به‌صورت زیر فروکاسته می‌شود:

As $\gamma \to \infty$ the Lyapunov function reduces to:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

پس تابع لیاپانوف با بهره‌ی بالا، یک تابع درجه دوم است.

The high gain Lyapunov function is quadratic:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{d}^T\mathbf{a} + c$$

where

$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = \mathbf{A} = -\mathbf{W} \qquad \mathbf{d} = -\mathbf{b} \qquad c = 0$$

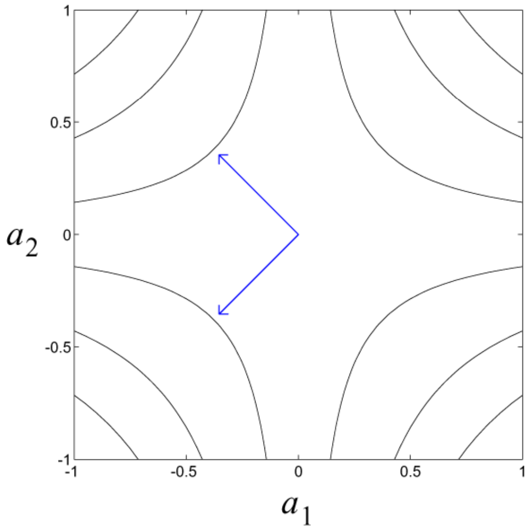
$\Leftarrow$ با استفاده از خواص تابع درجه دوم می‌توان عملکرد شبکه‌ی هاپفیلد را تشریح کرد.

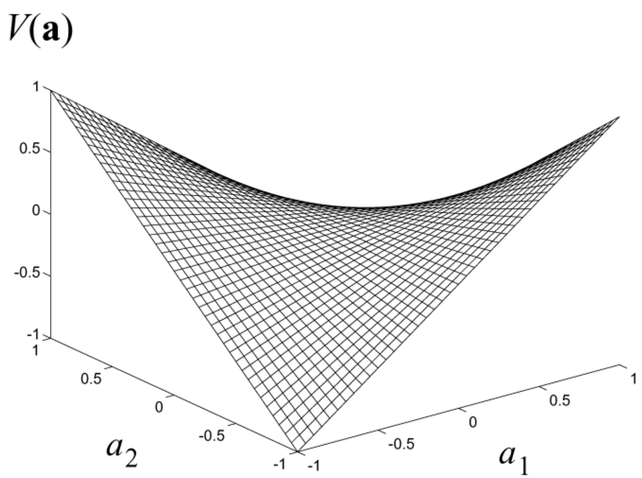
21

Example

$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = -\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left|\nabla^2 V(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{I}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda_2 = 1 \qquad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$





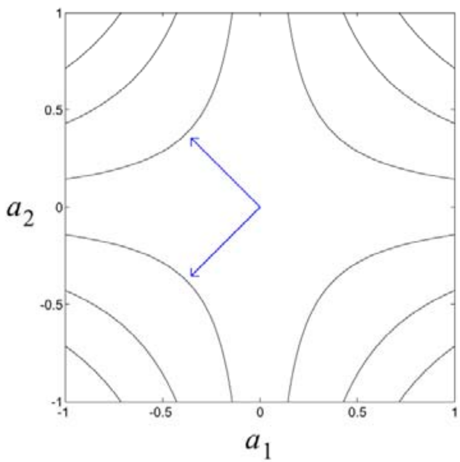
اثر بهره

مثال

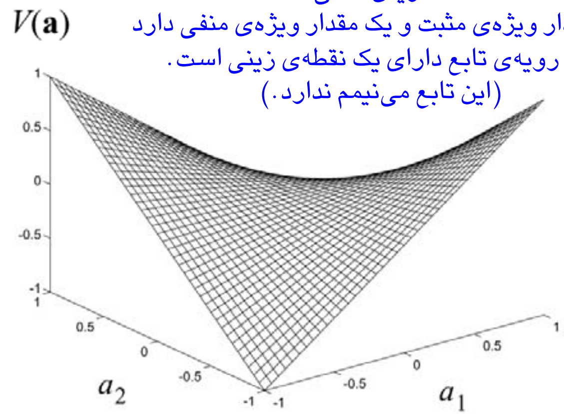
EXAMPLE

$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = -\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left|\nabla^2 V(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{I}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda_2 = 1 \qquad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



ماتریس هسی
یک مقدار ویژه‌ی مثبت و یک مقدار ویژه‌ی منفی دارد
$\Leftarrow$ رویه‌ی تابع دارای یک نقطه‌ی زینی است.
(این تابع می‌نیمم ندارد.)



با توجه به محدود شدن شبکه به یک ابرمکعب $\{\mathbf{a}: -1 < a_i < 1\}$ دو می‌نیمم در دو گوشه‌ی آن داریم: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

❊ وقتی γ خیلی کوچک است، یک نقطه‌ی می‌نیمم در مبدأ وجود دارد.

❊ با افزایش γ دو نقطه‌ی می‌نیمم از مبدأ به سمت گوشه‌ها حرکت می‌کند. مثلاً برای $\gamma = 1.4$ داریم: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.57 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.57 \end{bmatrix}$

اثر بهره

می‌نیمم‌های بهره–بالا

HIGH-GAIN MINIMUMS

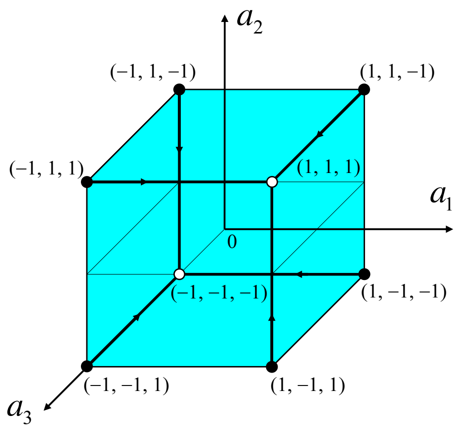
در حالت کلی شبکه‌ی هاپفیلد:

وقتی بیش از دو نرون در شبکه داشته باشیم،
می‌نیمم‌های بهره–بالا در **گوشه‌های ابرمکعب**

$$\{\mathbf{a} : -1 < a_i < 1\}$$

واقع می‌شوند.

$$S = 3$$



شبکه‌ی هاپفیلد

۴

طراحی شبکه‌ی هاپفیلد

Hopfield Design

The Hopfield network will minimize the following Lyapunov function:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

Choose the weight matrix **W** and the bias vector **b** so that V takes on the form of a function you want to minimize.

طراحی شبکه‌ی هاپفیلد

HOPFIELD DESIGN

شبکه‌ی هاپفیلد فاقد قاعده‌ی یادگیری است.
در واقع این شبکه آموزش داده نمی‌شود،
بلکه بر مبنای تابع لیاپانوف مورد استفاده برای تعیین ماتریس وزن‌ها طراحی می‌گردد.

The Hopfield network will minimize the following Lyapunov function:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

Choose the weight matrix **W** and the bias vector **b** so that V takes on the form of a function you want to minimize.

ماتریس وزن **W** و بردار بایاس **b** را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که
تابع V که قصد می‌نیمم‌سازی آن را داریم، شکل دهد.

$\Downarrow$

تبدیل مسئله‌ی آموزش شبکه به یک مسئله‌ی می‌نیمم‌سازی درجه دوم
(چون شبکه‌ی هاپفیلد V را نیز می‌نیمم می‌کند، به این ترتیب مسئله‌ی اصلی را هم حل می‌کند.)

Content-Addressable Memory

Content-Addressable Memory - retrieves stored memories on the basis of part of the contents.

Prototype Patterns:

$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_Q\}$ (bipolar vectors)

Proposed Performance Index:

$$J(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\left([\mathbf{p}_q]^T\mathbf{a}\right)^2$$

For orthogonal prototypes, if we evaluate the performance index at a prototype:

$$J(\mathbf{p}_j) = -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\left([\mathbf{p}_q]^T\mathbf{p}_j\right)^2 = -\frac{1}{2}\left([\mathbf{p}_j]^T\mathbf{p}_j\right)^2 = -\frac{S}{2}$$

$J(\mathbf{a})$ will be largest when $\mathbf{a}$ is not close to any prototype pattern, and smallest when $\mathbf{a}$ is equal to a prototype pattern.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

Content-Addressable Memory

استفاده از شبکه‌ی هاپفیلد برای ساخت یک حافظه‌ی انجمنی ⇐ **حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا**
(حافظه‌های ذخیره شده، بر اساس بخشی از محتوای آن بازیابی می‌شوند.)

می‌خواهیم این الگوهای پروتوتایپ را در یک شبکه‌ی هاپفیلد ذخیره کنیم:

فرض: $Q << S$
فضای حالت به‌اندازه‌ی کافی بزرگ است و به‌شرط توزیع متناسب الگوهای پروتوتایپ در این فضا، فواصل مناسبی نسبت به هم دارند و به هم نزدیک نیستند.

Prototype Patterns:

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_Q\}$$

بردارهای دوقطبی S عضوی
(bipolar vectors)

Proposed Performance Index: شاخص کارآیی پیشنهادی:

$$J(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}([\mathbf{p}_q]^T\mathbf{a})^2$$

برای اینکه شبکه‌ی هاپفیلد قادر به یادآوری الگوهای پروتوتایپ باشد،
این الگوها باید در می‌نیمم تابع لیاپانوف واقع شوند.

چون تابع لیاپانوف با بهره‌ی بالا، یک تابع درجه دوم است، الگوهای پروتوتایپ باید می‌نیمم این تابع باشند.
اگر عناصر بردار $\mathbf{a}$ به -1 و $+1$ محدود شود، این تابع در محل الگوهای پروتوتایپ می‌نیمم می‌شود.

زمانی که یک الگوی ورودی به شبکه اعمال می‌شود،
شبکه باید نزدیک‌ترین الگوی پروتوتایپ ذخیره شده نسبت به ورودی را به‌عنوان خروجی تولید کند.
خروجی آغازین شبکه با الگوی ورودی مقداردهی می‌شود.
سپس خروجی شبکه باید به الگوی پروتوتایپی که در نزدیک‌ترین حالت نسبت به الگوی ورودی قرار دارد، همگرا شود.
⇐ الگوی پروتوتایپ باید در می‌نیمم تابع لیاپانوف واقع باشد.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

CONTENT-ADDRESSABLE MEMORY

برای الگوهای پروتوتایپ متعامد، اگر شاخص کارآیی را در یک پروتوتایپ ارزیابی کنیم، خواهیم داشت:

For orthogonal prototypes, if we evaluate the performance index at a prototype:

$$J(\mathbf{p}_j) = -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}([\mathbf{p}_q]^T\mathbf{p}_j)^2 = -\frac{1}{2}([\mathbf{p}_j]^T\mathbf{p}_j)^2 = -\frac{S}{2}$$

تعامد   همه‌ی عناصر ± 1

$J(\mathbf{a})$ will be largest when $\mathbf{a}$ is not close to any prototype pattern, and smallest when $\mathbf{a}$ is equal to a prototype pattern.

اگر شاخص کارآیی را در یک الگوی تصادفی ورودی $\mathbf{a}$ ارزیابی کنیم که تا حد امکان از الگوهای پروتوتایپ دور است، داریم:

ـــ عبارت داخل $\sum$ حاوی ضرب داخلی بین یک الگوی پروتوتایپ و بردار ورودی است.

ـــ در صورتی که ورودی به هیچ‌یک از الگوهای پروتوتایپ نزدیک نباشد، آن‌گاه کلیه‌ی جملات این مجموع کوچک خواهند بود.

$\Downarrow$

$J(\mathbf{a})$ بزرگ‌ترین مقدار خودش را زمانی دارد که $\mathbf{a}$ به هیچ الگوی پروتوتایپی نزدیک نباشد.

$J(\mathbf{a})$ کوچک‌ترین مقدار خودش را زمانی دارد که $\mathbf{a}$ با یک الگوی پروتوتایپ مساوی باشد.

$\Downarrow$

پس یک تابع درجه دوم در اختیار داریم که با دقت مناسبی کارآیی حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا را تعیین می‌کند.

$\Leftarrow$ تابع لیاپانوف V معادل با شاخص کارآیی درجه دوم J است.

Hebb Rule

If we use the supervised Hebb rule to compute the weight matrix:

$$\mathbf{W} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \qquad \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

the Lyapunov function will be:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T \left[\sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \right] \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a}$$

This can be rewritten:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{Q} [(\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a}]^2 = J(\mathbf{a})$$

Therefore the Lyapunov function is equal to our performance index for the content addressable memory.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

قاعده‌ی هب

HEBB RULE

حال باید ماتریس وزن **W** و بردار بایاس **b** را تعیین کنیم.

اگر از قاعده‌ی هب بانظارت برای محاسبه‌ی ماتریس وزن استفاده کنیم، داریم:

If we use the supervised Hebb rule to compute the weight matrix:

$$\mathbf{W} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \qquad\qquad \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

آن‌گاه تابع لیاپانوف خواهد بود:

the Lyapunov function will be:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T \left[\sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \right] \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a}$$

که می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود:

This can be rewritten:

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{Q} [(\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a}]^2 = J(\mathbf{a})$$

پس تابع لیاپانوف مساوی با شاخص کارآیی ما برای حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا می‌باشد.

Therefore the Lyapunov function is equal to our performance index for the content addressable memory.

⇐ خروجی شبکه‌ی هاپفیلد تمایل به همگرایی به الگوهای پروتوتایپ ذخیره شده دارد.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

قاعده‌ی هب

HEBB RULE

قاعده‌ی هب بانظارت در صورت وجود همبستگی بالا بین الگوهای پروتوتایپ، عملکرد مناسبی ندارد.
(در این موارد تکنیک شبه‌وارون پیشنهاد می‌شود.)

در بهترین حالت: **الگوهای پروتوتایپ، متعامد هستند.**
در این مورد هر یک از الگوهای پروتوتایپ در یک نقطه‌ی تعادل شبکه قرار خواهد داشت.

⇐ ممکن است شبکه به الگویی غیر از الگوهای پروتوتایپ همگرا شود.

قانون کلی در هنگام استفاده از قاعده‌ی هب:

تعداد الگوهای ذخیره شده نباید از 15% تعداد نرون‌ها بیشتر باشد.

Hebb Rule Analysis

$$\mathbf{W} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T$$

If we apply prototype $\mathbf{p}_j$ to the network:

$$\mathbf{W}\mathbf{p}_j = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j (\mathbf{p}_j)^T \mathbf{p}_j = S\mathbf{p}_j$$

Therefore each prototype is an eigenvector, and they have a common eigenvalue of S. The eigenspace for the eigenvalue $\lambda = S$ is therefore:

$$X = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_Q\}$$

An S-dimensional space of all vectors which can be written as linear combinations of the prototype vectors.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب

Hebb Rule Analysis

فرض می‌کنیم الگوهای پروتوتایپ متعامد هستند و از قاعده‌ی هب برای محاسبه‌ی ماتریس وزن استفاده شود:

$$\mathbf{W} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T$$

If we apply prototype $\mathbf{p}_j$ to the network: اگر بردار پروتوتایپ $\mathbf{p}_j$ را به شبکه اعمال کنیم:

$$\mathbf{W}\mathbf{p}_j = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j (\mathbf{p}_j)^T \mathbf{p}_j = S\mathbf{p}_j$$

تعامد

همه‌ی عناصر ± 1

Therefore each prototype is an eigenvector, and they have a common eigenvalue of S. The eigenspace for the eigenvalue $\lambda = S$ is therefore:

بنابراین، هر بردار پروتوتایپ یک بردار ویژه‌ی ماتریس وزن است و همگی آنها مقدار ویژه‌ی مشترک $\lambda = S$ را دارند. پس فضای ویژه برای این مقدار ویژه می‌شود:

$$X = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_Q\}$$

این یک فضای S–بعدی شامل همه‌ی بردارهایی است که می‌توان آنها را بر اساس ترکیب خطی بردارهای پروتوتایپ نوشت.

An S-dimensional space of all vectors which can be written as linear combinations of the prototype vectors.

$\Leftarrow$ هر بردار پروتوتایپی که از ترکیب خطی بردارهای پروتوتایپ ایجاد شود، یک بردار ویژه است.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب

HEBB RULE ANALYSIS

هر بردار پروتوتایپی که از ترکیب خطی بردارهای پروتوتایپ ایجاد شود، یک بردار ویژه است.

$$\mathbf{Wa} = \mathbf{W}\{\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \cdots + \alpha_Q\mathbf{p}_Q\}$$

$$= \{\alpha_1\mathbf{W}\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{W}\mathbf{p}_2 + \cdots + \alpha_Q\mathbf{W}\mathbf{p}_Q\}$$

$$= \{\alpha_1 S\mathbf{p}_1 + \alpha_2 S\mathbf{p}_2 + \cdots + \alpha_Q S\mathbf{p}_Q\}$$

$$= S\{\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \cdots + \alpha_Q\mathbf{p}_Q\} = S\mathbf{a}$$

با فرض مستقل خطی بودن بردارهای پروتوتایپ،
فضای ویژه‌ی مربوط به مقدار ویژه‌ی $\lambda = S$، Q-بعدی است.

Weight Matrix Eigenspace

The entire input space can be divided into two disjoint sets:

$$R^S = X \cup X^{\perp}$$

where $X^{\perp}$ is the orthogonal complement of X. For vectors **a** in the orthogonal complement we have:

$$(\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, Q$$

Therefore,

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a} = \sum_{q=1}^{Q} (\mathbf{p}_q \cdot 0) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}$$

The eigenvalues of **W** are S and 0, with corresponding eigenspaces of X and $X^{\perp}$. For the Hessian matrix

$$\nabla^2 V = -\mathbf{W}$$

the eigenvalues are -S and 0, with the same eigenspaces.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: فضای ویژه‌ی ماتریس وزن

WEIGHT MATRIX EIGENSPACE

کل فضای ورودی را می‌توان به دو مجموعه‌ی مجزا تقسیم کرد:

The entire input space can be divided into two disjoint sets:

$X^{\perp}$ متمم متعامد X است.
(هر بردار از $X^{\perp}$ بر هر بردار از X عمود است.)

$$R^S = X \cup X^{\perp}$$

where $X^{\perp}$ is the orthogonal complement of X. For vectors **a** in the orthogonal complement we have:

برای هر بردار $\mathbf{a} \in X^{\perp}$ داریم:

$$(\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, Q$$

Therefore,

پس اگر $\mathbf{a} \in X^{\perp}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{p}_q (\mathbf{p}_q)^T \mathbf{a} = \sum_{q=1}^{Q} (\mathbf{p}_q \cdot 0) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}$$

$\Leftarrow$ $X^{\perp}$ یک فضای ویژه برای مقدار ویژه‌ی مکرر $\lambda = 0$ است.

The eigenvalues of **W** are S and 0, with corresponding eigenspaces of X and $X^{\perp}$. For the Hessian matrix

پس مقادیر ویژه‌ی $\mathbf{W}$ عبارت است از S و 0.

$$\nabla^2 V = -\mathbf{W}$$

مقادیر ویژه‌ی هسی عبارت است از $-S$ و 0 (با همان فضای ویژه).

the eigenvalues are -S and 0, with the same eigenspaces.

- فضای ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی S: فضایی است که توسط بردارهای پروتوتایپ پوشش داده می‌شود.
- فضای ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی 0: متمم متعامد فضای تحت پوشش بردارهای پروتوتایپ است.

21

Lyapunov Surface

The high-gain Lyapunov function is a quadratic function. Therefore, the eigenvalues of the Hessian matrix determine its shape. Because the first eigenvalue is negative, V will have negative curvature in X. Because the second eigenvalue is zero, V will have zero curvature in $X^{\perp}$.

Because V has negative curvature in X, the trajectories of the Hopfield network will tend to fall into the corners of the hypercube $\{\mathbf{a}: -1 < a_i < 1\}$ that are contained in X.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف

LYAPUNOV SURFACE

The high-gain Lyapunov function is a quadratic function. Therefore, the eigenvalues of the Hessian matrix determine its shape. Because the first eigenvalue is negative, V will have negative curvature in X. Because the second eigenvalue is zero, V will have zero curvature in $X^{\perp}$.

تابع لیاپانوف با بهره‌ی بالا، یک تابع درجه دوم است. بنابراین، مقادیر ویژه‌ی ماتریس هسی شکل آن را تعیین می‌کند.
از آنجا که مقدار ویژه‌ی اول، منفی است $\Leftarrow V$ در X انحنای منفی خواهد داشت.
از آنجا که مقدار ویژه‌ی دوم، صفر است $\Leftarrow V$ در $X^{\perp}$ انحنای صفر خواهد داشت.

Because V has negative curvature in X, the trajectories of the Hopfield network will tend to fall into the corners of the hypercube $\{\mathbf{a}: -1 < a_i < 1\}$ that are contained in X.

از آنجا که V در X انحنای منفی دارد،
خط سیرهای شبکه‌های هاپفیلد تمایل دارند به گوشه‌های ابرمکعب

$$\{\mathbf{a} : -1 < a_i < 1\}$$

که در X واقع است، برسند.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: الگوهای تقلبی

Spurious Patterns

در صورتی که ماتریس وزن را با استفاده از قاعده‌ی هب محاسبه کنیم،
به‌ازای هر بردار پروتوتایپ، حداقل دو می‌نیمم در تابع لیاپانوف وجود خواهد داشت:

اگر $\mathbf{p}_q$ یک بردار پروتوتایپ باشد،
آن‌گاه $-\mathbf{p}_q$ نیز در فضای تحت پوشش بردارهای پروتوتایپ (X) خواهد بود.

$\Leftarrow$ قرینه‌ی هر بردار پروتوتایپ در یکی از گوشه‌های ابرمکعب زیر خواهد بود که در X نیز وجود دارد.

$$\{\mathbf{a} : -1 < a_i < 1\}$$

البته تابع لیاپانوف، می‌نیمم‌های دیگری هم دارد که با هیچ یک از الگوهای پروتوتایپ متناظر نیست.

می‌نیمم‌های V در گوشه‌های ابرمکعب خواهند بود که در X هم هستند.
این گوشه‌ها حاوی الگوهای پروتوتایپ نیز خواهند بود.
البته آنها شامل ترکیب خطی الگوهای پروتوتایپ هم هستند.

به می‌نیمم‌های تابع لیاپانوف که جزء الگوهای پروتوتایپ نیستند، **الگوهای تقلبی** گفته می‌شود.

هدف در طراحی شبکه‌ی هاپفیلد:
(۱) حداقل کردن تعداد **الگوهای تقلبی** و (۲) ایجاد یک **ناحیه‌ی جذب** برای هر یک از الگوهای پروتوتایپ در صورت امکان

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: مثال (۱ از ۲)

EXAMPLE

فرض می‌کنیم ماتریس اتصال (ماتریس وزن) به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و فرض می‌کنیم این ماتریس وزن با استفاده از قاعده‌ی هب برای الگوی پروتوتایپ زیر طراحی شده باشد:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$\mathbf{W} = \mathbf{p}_1(\mathbf{p}_1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

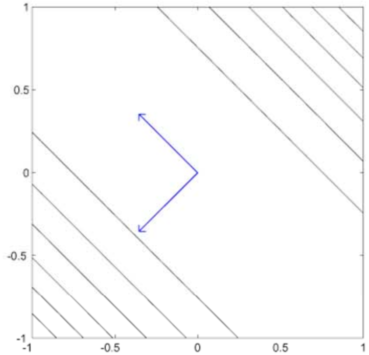
توجه کنید که ماتریس اتصال مورد نظر ما در واقع به‌صورت زیر است **(عناصر قطری صفر):**

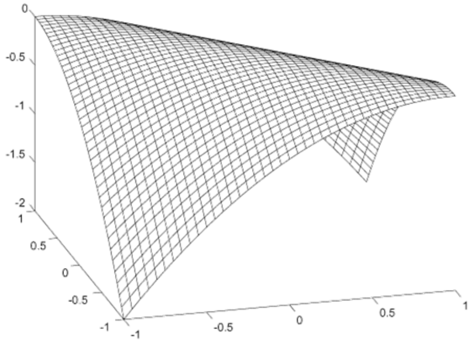
$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

کاظم فولادی

Example

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{p}_1(\mathbf{p}_1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{a}$$





$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = -\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -S = -2 \qquad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \{\mathbf{a} : a_1 = a_2\}$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{\perp} = \{\mathbf{a} : a_1 = -a_2\}$$

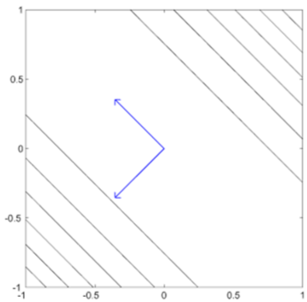
حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: مثال (۲ از ۲)

EXAMPLE

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{p}_1(\mathbf{p}_1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{a}$$

تابع لیاپانوف با بهره‌ی بالا



$$\nabla^2 V(\mathbf{a}) = -\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس هسی

$$\lambda_1 = -S = -2 \qquad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \{\mathbf{a}: a_1 = a_2\}$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{\perp} = \{\mathbf{a}: a_1 = -a_2\}$$

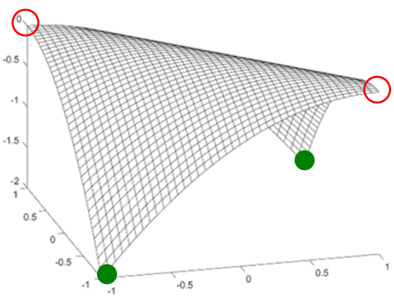
مقادیر ویژه
بردارهای ویژه
فضاهای ویژه

این رویه،
دارای لبه‌های مستقیم در
چپ بالا و راست پایین است.

(این لبه‌ها به‌دلیل انحنای
صفر در $X^{\perp}$ هستند)

شبکه با شروع از این نقاط
به یکی از دو نقطه‌ی زیر
همگرا می‌شود:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



اگر شبکه کار خود را در سمت راست یا چپ این لبه‌ها آغاز کند،
به یکی از نقاط اولیه‌ی طراحی همگرا می‌شود.
پس همگرایی این سیستم اصلی و سیستمی با اعضای قطری صفر، از هر جنبه یکسان است.

Zero Diagonal Elements

We can zero the diagonal elements of the weight matrix:

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - Q\mathbf{I}$$

The prototypes remain eigenvectors of this new matrix, but the corresponding eigenvalue is now (S-Q):

$$\mathbf{W}'\mathbf{p}_q = [\mathbf{W} - Q\mathbf{I}]\mathbf{p}_q = S\mathbf{p}_q - Q\mathbf{p}_q = (S - Q)\mathbf{p}_q$$

The elements of $X^{\perp}$ also remain eigenvectors of this new matrix, with a corresponding eigenvalue of (-Q):

$$\mathbf{W}'\mathbf{a} = [\mathbf{W} - Q\mathbf{I}]\mathbf{a} = \mathbf{0} - Q\mathbf{a} = -Q\mathbf{a}$$

The Lyapunov surface will have negative curvature in X and positive curvature in $X^{\perp}$, in contrast with the original Lyapunov function, which had negative curvature in X and zero curvature in $X^{\perp}$.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: عناصر قطری صفر

Zero Diagonal Elements

در بسیاری از مباحث مربوط به شبکه‌های هاپفیلد، اعضای قطری ماتریس وزن برابر با صفر قرار داده می‌شود:

می‌خواهیم تأثیر این مسئله را بر روی رویه‌ی لیاپانوف مورد تحلیل قرار دهیم.

در شبکه‌ی حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا، همه‌ی اعضای قطری ماتریس وزن برابر با Q (تعداد الگوی پروتوتایپ) است.

We can zero the diagonal elements of the weight matrix:

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - Q\mathbf{I}$$

پس می‌توانیم عناصر قطری ماتریس وزن را با Q مرتبه کم کردن ماتریس همانی از آن به صفر برسانیم.

The prototypes remain eigenvectors of this new matrix, but the corresponding eigenvalue is now $(S\text{-}Q)$:

$$\mathbf{W}'\mathbf{p}_q = [\mathbf{W} - Q\mathbf{I}]\mathbf{p}_q = S\mathbf{p}_q - Q\mathbf{p}_q = (S - Q)\mathbf{p}_q$$

پروتوتایپ‌ها، همچنان بردارهای ویژه‌ی این ماتریس جدید باقی می‌مانند، اما مقدار ویژه‌ی متناظر با آنها $(S-Q)$ می‌شود.

The elements of $X^{\perp}$ also remain eigenvectors of this new matrix, with a corresponding eigenvalue of $(-Q)$:

$$\mathbf{W}'\mathbf{a} = [\mathbf{W} - Q\mathbf{I}]\mathbf{a} = \mathbf{0} - Q\mathbf{a} = -Q\mathbf{a}$$

عناصر $X^{\perp}$ نیز بردارهای ویژه‌ی این ماتریس جدید خواهند بود، با مقادیر ویژه‌ی متناظر $-Q$

The Lyapunov surface will have negative curvature in X and positive curvature in $X^{\perp}$, in contrast with the original Lyapunov function, which had negative curvature in X and zero curvature in $X^{\perp}$.

این رویه‌ی لیاپانوف، دارای انحنای منفی در X و انحنای مثبت در $X^{\perp}$ است.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

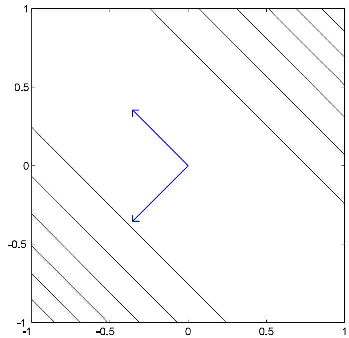
تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: عناصر قطری صفر: مقایسه (۱ از ۲)

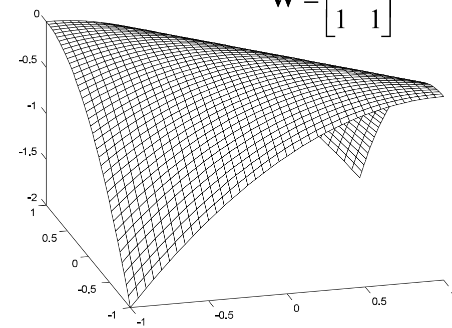
ZERO DIAGONAL ELEMENTS

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسه بین این دو رویه،
تأثیر صفر کردن اعضای قطر اصلی ماتریس وزن
روی تابع لیاپانوف مشخص می‌شود.

از نظر کارآیی سیستم می‌توان گفت:
این تأثیر اندکی دارد.

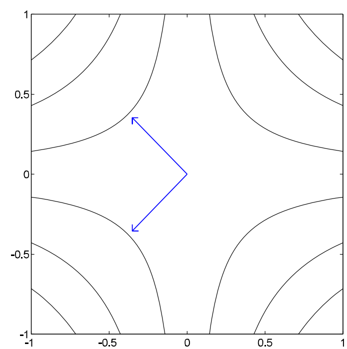


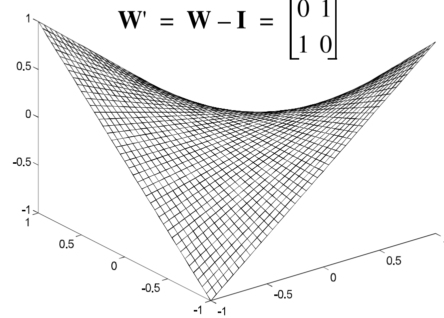


$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در صورتی که شرایط آغازین شبکه‌ی هاپفیلد
در هر جایی غیر از خط $a_1 = -a_2$ باشد،
آن‌گاه در هر دو مورد،
خروجی شبکه به یکی از گوشه‌های ابرمکعب
$\{\mathbf{a} : -1 < a_i < 1\}$
همگرا می‌شود که شامل نقاط زیر است.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$





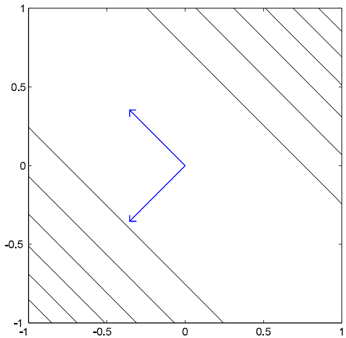
حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

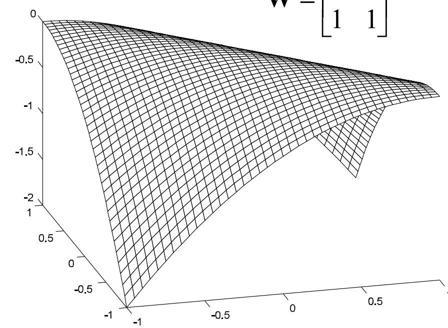
تحلیل قاعده‌ی هب : رویه‌ی لیاپانوف : عناصر قطری صفر : مقایسه (۲ از ۲)

ZERO DIAGONAL ELEMENTS

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

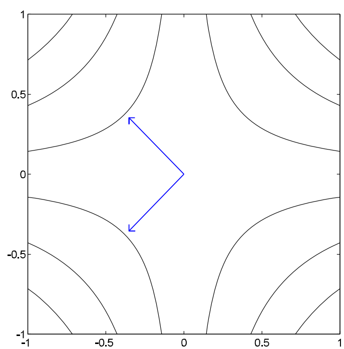
در صورتی که شرایط آغازین شبکه‌ی هاپفیلد دقیقاً بر
روی خط $a_1 = -a_2$ باشد،
و ماتریس وزن $\mathbf{W}$ استفاده شود،
خروجی شبکه ثابت می‌ماند.

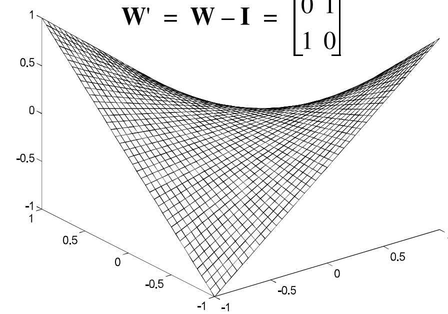




$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در صورتی که شرایط آغازین شبکه‌ی هاپفیلد دقیقاً بر
روی خط $a_1 = -a_2$ باشد،
و ماتریس وزن $\mathbf{W}'$ استفاده شود،
خروجی شبکه به نقطه‌ی زینی در مبدأ همگرا می‌شود.

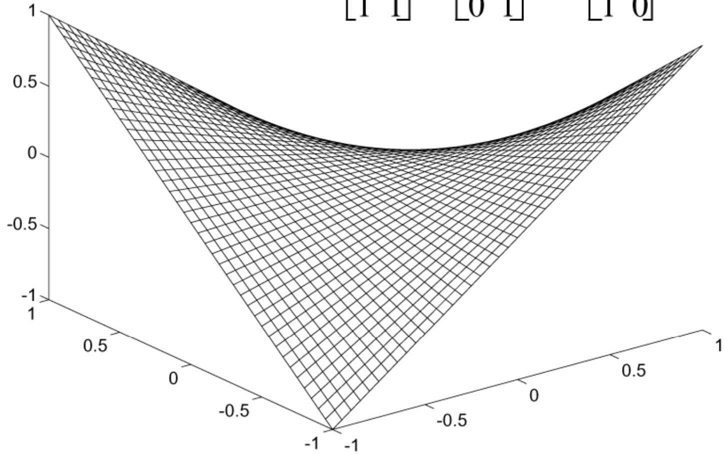




هیچ‌کدام از این نتایج، مطلوب نیستند
(زیرا خروجی شبکه به می‌نیمم تابع لیاپانوف همگرا نشده است)
اما همگرایی شبکه به **نقطه‌ی زینی** در کاربردهای
عملی مطلوب‌تر است.

Example

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - Q\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



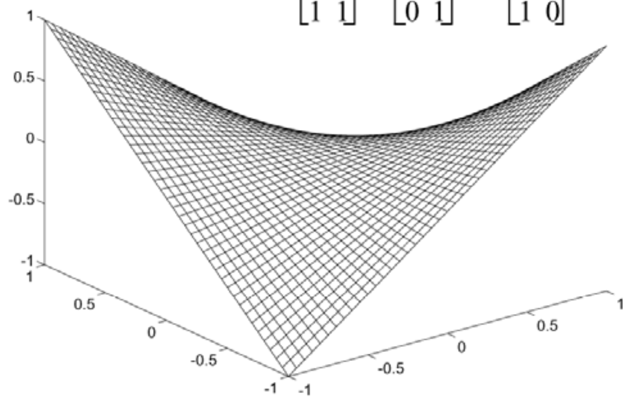
If the initial condition falls exactly on the line a_1=-a_2, and the weight matrix **W** is used, then the network output will remain constant. If the initial condition falls exactly on the line a_1=-a_2, and the weight matrix **W'** is used, then the network output will converge to the saddle point at the origin.

حافظه‌ی آدرس‌پذیر با محتوا

تحلیل قاعده‌ی هب: رویه‌ی لیاپانوف: عناصر قطری صفر: مثال

Zero Diagonal Elements

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} - Q\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



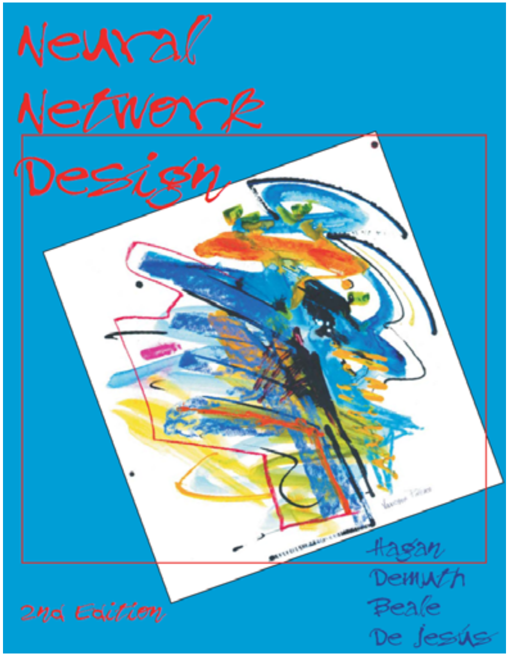
If the initial condition falls exactly on the line a_1=-a_2, and the weight matrix **W** is used, then the network output will remain constant. If the initial condition falls exactly on the line a_1=-a_2, and the weight matrix **W**' is used, then the network output will converge to the saddle point at the origin.

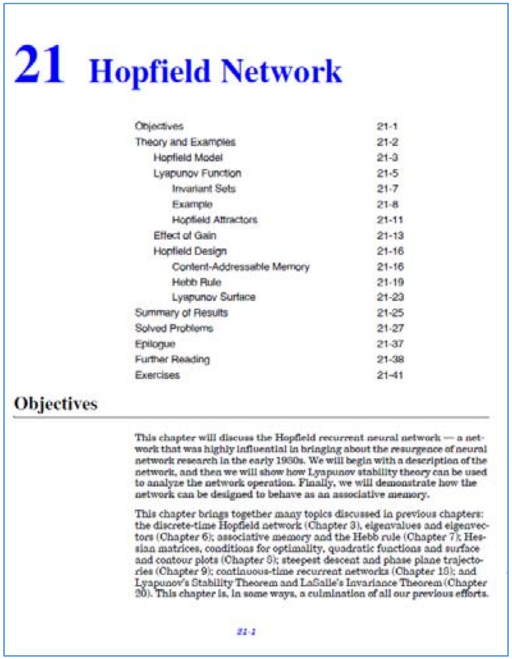
شبکه‌ی هاپفیلد

۵

منابع

منبع اصلی





21 Hopfield Network

Objectives

This chapter will discuss the Hopfield recurrent neural network — a network that was highly influential in bringing about the resurgence of neural network research in the early 1980s. We will begin with a description of the network, and then we will show how Lyapunov stability theory can be used to analyze the network operation. Finally, we will demonstrate how the network can be designed to behave as an associative memory.

This chapter brings together many topics discussed in previous chapters: the discrete-time Hopfield network (Chapter 3), eigenvalues and eigenvectors (Chapter 6); associative memory and the Hebb rule (Chapter 7); Hessian matrices, conditions for optimality, quadratic functions and surface and contour plots (Chapter 8); steepest descent and phase plane trajectories (Chapter 9); continuous-time recurrent networks (Chapter 18); and Lyapunov's Stability Theorem and LaSalle's Invariance Theorem (Chapter 20). This chapter is, in some ways, a culmination of all our previous efforts.

21-1

Martin T. Hagan, Howard B. Demuth, Mark H. Beale, Orlando De Jesus,
Neural Network Design,
2nd Edition, Martin Hagan, 2014.
Chapter 21

Online version can be downloaded from: http://hagan.okstate.edu/nnd.html