شبکه‌های عصبی مصنوعی

درس ۲۰

پایداری

Stability

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/nn

Stability

پایداری

STABILITY

موضوع بحث : تعریف دقیق‌تر **پایداری**

هدف: تعیین اینکه آیا مجموعه‌ی خاصی از معادلات غیرخطی
دارای نقاط (یا خط سیری) برای همگرایی خروجی است یا خیر؟

قضیه‌ی پایداری لیاپانوف
Lyapunov's Stability Theorem

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال
Lasalle's Invariance Theorem

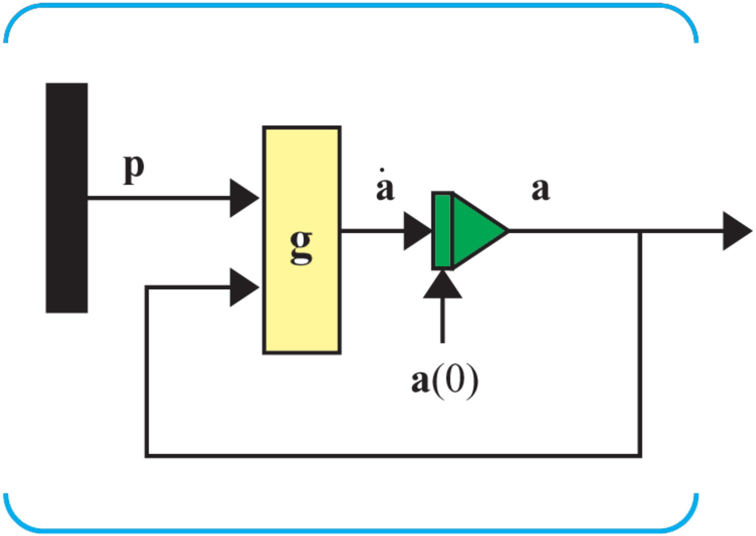
پایداری

۱

شبکه‌های بازگشتی

Recurrent Networks

Nonlinear Recurrent Network

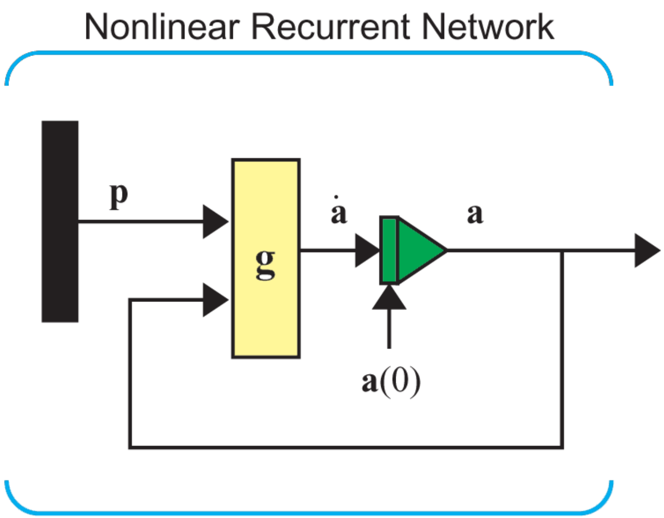


$$d\mathbf{a}(t)/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

شبکه‌های بازگشتی

Recurrent Networks

شبکه‌های بازگشتی : دارای فیدبک از خروجی به ورودی



$$d\mathbf{a}(t)/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

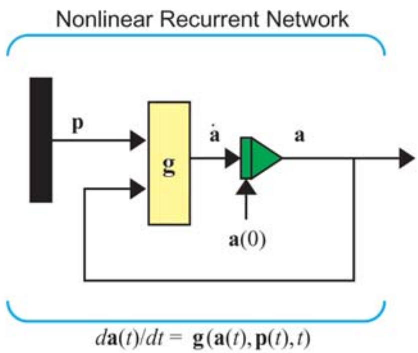
شبکه‌های بازگشتی به‌صورت بالقوه قوی‌تر از شبکه‌های پیش‌خور هستند،
زیرا قادر به بازشناسی و به‌یادآوری الگوهای زمانی (علاوه بر الگوهای مکانی) می‌باشند.
اما به هر حال رفتار آنها پیچیده‌تر می‌باشد.

شبکه‌های بازگشتی

پایداری

RECURRENT NETWORKS: STABILITY

پرسش: می‌خواهیم بدانیم که سیستم شبکه‌ی بازگشتی در حالت ماندگار چگونه عمل می‌کند؟



بیشتر به مواردی علاقه داریم که شبکه به یک خروجی ثابت (یک نقطه‌ی تعادل پایدار) همگرا می‌شود.

یک سیستم غیرخطی می‌تواند دارای تعداد زیادی نقطه‌ی پایدار باشد.
(در برخی شبکه‌های عصبی، این نقاط تعادل نقش الگوهای پروتوتایپ ذخیره شده را بازی می‌کنند)

در صورت امکان تمایل داریم مکان این نقاط پایدار و شرایط آغازین منتهی به رسیدن به یک نقطه‌ی پایدار را بیابیم.

شبکه‌های عصبی مصنوعی

پایداری

۲

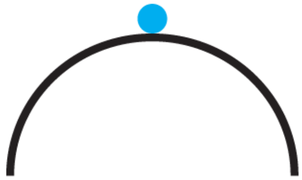
مفاهیم پایداری

Types of Stability

A ball bearing, with dissipative friction, in a gravity field:

Asymptotically Stable

Stable in the Sense of Lyapunov



Unstable

انواع پایداری

Types of Stability

یک توپ (بلبرینگ) با اصطکاک اتلافی در یک میدان جاذبه قرار دارد:

A ball bearing, with dissipative friction, in a gravity field:

پایداری مجانبی

Asymptotically Stable

پس از به‌حرکت در آمدن توپ، شروع به نوسان خواهد کرد و در نهایت پس از مدتی به‌دلیل وجود اصطکاک به کف ظرف برمی‌گردد.

نقطه‌ی پایدار مجانبی: مکان استقرار توپ پس از توقف

در شبکه‌ی هاپفیلد، الگوهای پروتوتایپ ذخیره شده،
در قالب نقاط تعادل پایدار مجانبی هستند.

پایداری به‌مفهوم لیاپانوف

Stable in the Sense of Lyapunov

در صورت جابه‌جایی سطح، توپ روی آن نوسان نمی‌کند: توپ پس از حرکت دوباره به مکان اولیه خود برنمی‌گردد.

❋ از یک نظر پایدار است: زیرا حداقل در صورت ثابت بودن وضعیت توپ، در مرکز باقی مانده و به اطراف نمی‌غلتد.

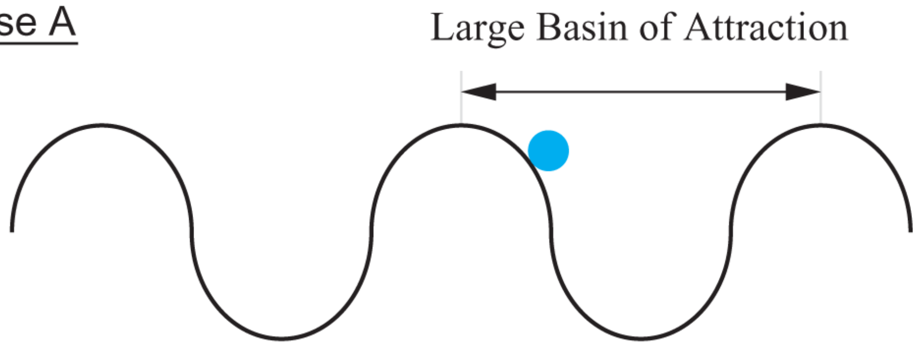
ناپایدار

Unstable

بالای تپه یک نقطه‌ی تعادل (اما ناپایدار) برای توپ است: اگر توپ را دقیقاً بالای تپه قرار دهیم، در جای خود ثابت می‌ماند، اما اگر کوچک‌ترین نیرویی به وضعیت موجود وارد شود، توپ به پایین می‌غلتد.

Basins of Attraction

Case A



Case B

In the Hopfield network we want the prototype patterns to be stable points with large basins of attraction.

بسترهای جذب

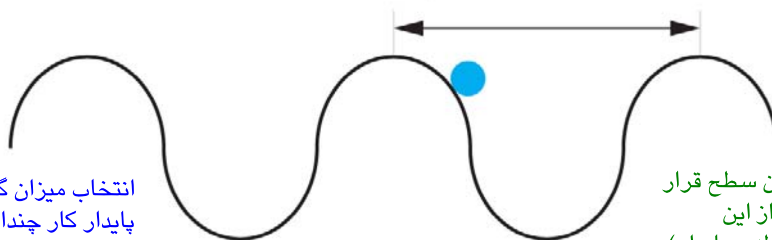
Basins of Attraction

بستر جذب بزرگ

Case A

Large Basin of Attraction

به‌دنبال طراحی شبکه‌های عصبی‌ای هستیم که گودی‌های آنها نظیر این مورد بسیار بزرگ باشد.



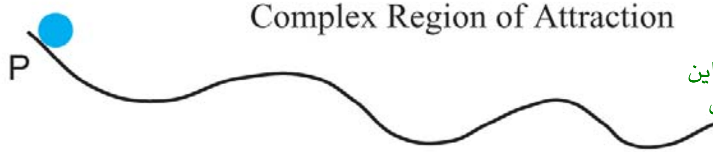
انتخاب میزان گودی سطح برای ایجاد یک نقطه‌ی پایدار کار چندان ساده‌ای نیست.

درصورتی که یک توپ در این سطح قرار گیرد، در نهایت در کف یکی از این گودی‌ها مستقر می‌شود (نقطه‌ی پایدار).

Case B

ناحیه‌ی جذب پیچیده

Complex Region of Attraction



درصورتی که یک توپ در مکان P از این سطح قرار گیرد، مکان استقرار نهایی روی آن به‌هیچ‌وجه مشخص نیست.

In the Hopfield network we want the prototype patterns to be stable points with large basins of attraction.

در طراحی شبکه‌ی هاپفیلد می‌خواهیم الگوهای پروتوتایپ نقاط تعادلی با بسترهای جذب بزرگ باشند.

پایداری

۳

قضیه‌ی پایداری لیاپانوف

Lyapunov Stability

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t),\mathbf{p}(t), t)$$

Eqilibrium Point:

An equilibrium point is a point $\mathbf{a}^*$ where $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{0}$.

Stability (in the sense of Lyapunov):

The origin is a stable equilibrium point if for any given value $\varepsilon > 0$ there exists a number $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|\mathbf{a}(0)\| < \delta$, then the resulting motion, $\mathbf{a}(t)$, satisfies $\|\mathbf{a}(t)\| < \varepsilon$ for $t > 0$.

پایداری لیاپانوف

Lyapunov Stability

سیستم دینامیکی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

نقطه‌ی تعادل: نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است.

Eqilibrium Point:

An equilibrium point is a point $\mathbf{a}^*$ where $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{0}$.

پایداری (به مفهوم لیاپانوف)

Stability (in the sense of Lyapunov):

The origin is a stable equilibrium point if for any given value $\varepsilon > 0$ there exists a number $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|\mathbf{a}(0)\| < \delta$, then the resulting motion, $\mathbf{a}(t)$, satisfies $\|\mathbf{a}(t)\| < \varepsilon$ for $t > 0$.

یعنی خروجی سیستم از نقطه‌ی پایدار فاصله‌ی زیادی نمی‌گیرد.

مثال: توپ روی سطح دارای اصطکاک

می‌خواهیم خروجی سیستم همواره در فاصله‌ی ε از مبدأ باقی بماند. در صورتی که مبدأ پایدار باشد، می‌توان فاصله‌ی δ را طوری یافت که اگر خروجی سیستم در زمان $t = 0$ در فاصله‌ی δ از مبدأ باشد، آن‌گاه حداکثر در فاصله‌ی ε از مبدأ باقی بماند.

Asymptotic Stability

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

<u>Asymptotic Stability</u>:

The origin is an asymptotically stable equilibrium point if there exists a number $\delta > 0$ such that if $\|\mathbf{a}(0)\| < \delta$, then the resulting motion, $\mathbf{a}(t)$, satisfies $\|\mathbf{a}(t)\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

پایداری مجانبی

Asymptotic Stability

سیستم دینامیکی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

پایداری مجانبی یک تعریف قوی‌تر از پایداری است:
تا زمانی که خروجی سیستم مبدأ در فاصله‌ی δ از نقطه‌ی پایدار باشد، خروجی همواره به نقطه‌ی پایدار همگرا خواهد شد.

Asymptotic Stability:
The origin is an asymptotically stable equilibrium point if there exists a number $\delta > 0$ such that if $\|\mathbf{a}(0)\| < \delta$, then the resulting motion, $\mathbf{a}(t)$, satisfies $\|\mathbf{a}(t)\| \to 0$ as $t \to \infty$.

- پایدار مجانبی (در صورت وجود اصطکاک)
- پایدار لیاپانوف (در صورت عدم وجود اصطکاک)

در صورتی که مبدأ نقطه‌ی تعادل پایدار باشد، می‌توان فاصله‌ی δ را طوری یافت که
اگر خروجی سیستم در زمان $t = 0$ در فاصله‌ی δ از مبدأ باشد، آن‌گاه خروجی حاصل در بی‌نهایت صفر شود.

Definite Functions

Positive Definite:

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is positive definite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) > 0$ for $\mathbf{a} \neq 0$.

Positive Semidefinite:

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is positive semidefinite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) \geq 0$ for all $\mathbf{a}$.

توابع معین

معین مثبت و نیمه معین مثبت

DEFINITE FUNCTIONS

Positive Definite: معین مثبت

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is positive definite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) > 0$ for $\mathbf{a} \neq 0$.

Positive Semidefinite: نیمه معین مثبت

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is positive semidefinite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) \geq 0$ for all $\mathbf{a}$.

توابع معین

معین منفی و نیمه معین منفی

DEFINITE FUNCTIONS

Negative Definite: معین منفی

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is negative definite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) < 0$ for $\mathbf{a} \neq 0$.

Negative Semidefinite: نیمه معین منفی

A scalar function $V(\mathbf{a})$ is negative semidefinite if $V(\mathbf{0}) = 0$ and $V(\mathbf{a}) \leq 0$ for all $\mathbf{a}$.

Lyapunov Stability Theorem

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$$

Theorem 1: Lyapunov Stability Theorem

If a positive definite function $V(\mathbf{a})$ can be found such that $dV(\mathbf{a})/dt$ is negative semidefinite, then the origin $(\mathbf{a}=\mathbf{0})$ is stable for the above system. If a positive definite function $V(\mathbf{a})$ can be found such that $dV(\mathbf{a})/dt$ is negative definite, then the origin $(\mathbf{a}=\mathbf{0})$ is asymptotically stable. In each case, $V(\mathbf{a})$ is called a Lyapunov function of the system.

قضیه‌ی پایداری لیاپانوف

LYAPUNOV STABILITY THEOREM

یک روش مهم در بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی: قضیه‌ی لیاپانوف روسی (۱۸۹۲م)

سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$$

Theorem 1: Lyapunov Stability Theorem

If a positive definite function $V(\mathbf{a})$ can be found such that $dV(\mathbf{a})/dt$ is negative semidefinite, then the origin ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) is stable for the above system. If a positive definite function $V(\mathbf{a})$ can be found such that $dV(\mathbf{a})/dt$ is negative definite, then the origin ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) is asymptotically stable. In each case, $V(\mathbf{a})$ is called a Lyapunov function of the system.

(**تابع لیاپانوف**) می‌توان $V(\mathbf{a})$ را به‌عنوان **تابع انرژی** سیستم در نظر گرفت:
انرژی سیستم به‌صورت پیوسته کاهش می‌یابد (زیرا $dV(\mathbf{a})/dt$ منفی است)
و نهایتاً در یک حالت انرژی می‌نیمم متوقف می‌شود.

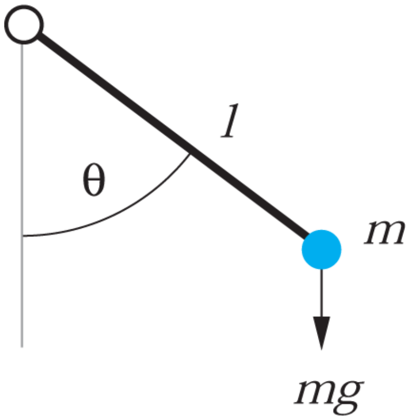
شبکه‌های عصبی مصنوعی

پایداری

۴

مثال
آونگ

Pendulum Example



$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + mg\sin(\theta) = 0$$

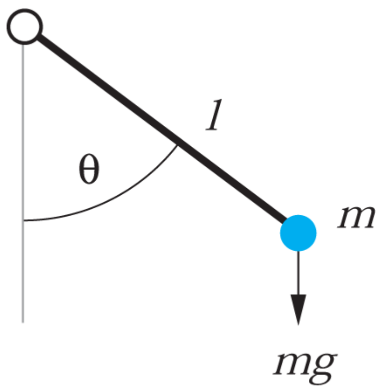
State Variable Model

$$a_1 = \theta \qquad \frac{da_1}{dt} = a_2$$

$$a_2 = \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{da_2}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2$$

مثال آونگ

PENDULUM EXAMPLE



سیستم آونگ ساده (به‌عنوان یک سیستم مکانیکی)

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + mg\sin(\theta) = 0$$

c: ضریب میرایی

State Variable Model

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \theta \qquad \frac{da_1}{dt} = a_2$$

$$a_2 = \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{da_2}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2$$

Equilibrium Point

Check: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\frac{da_1}{dt} = a_2 = 0$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2 = -\frac{g}{l}\sin(0) - \frac{c}{ml}(0) = 0$$

Therefore the origin is an equilibrium point.

مثال آونگ

نقطه‌ی تعادل

EQUILIBRIUM POINT

Check: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

آیا سیستم در مبدأ پایدار است؟
(مبدأ: متناظر با زاویه و سرعت صفر)

$$\frac{da_1}{dt} = a_2 = 0$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2 = -\frac{g}{l}\sin(0) - \frac{c}{ml}(0) = 0$$

Therefore the origin is an equilibrium point.

چون مشتقات صفر هستند، پس مبدأ یک نقطه‌ی تعادل است.

20

Lyapunov Function (Energy)

$$V(\mathbf{a}) = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2(a_2)^2}_{\text{Kinetic Energy}} + \underbrace{mgl(1-\cos(a_1))}_{\text{Potential Energy}} \qquad \text{(Positive Definite)}$$

Check the derivative of the Lyapunov function:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = [\nabla V(\mathbf{a})]^T g(\mathbf{a}) = \frac{\partial V}{\partial a_1}\left(\frac{da_1}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial a_2}\left(\frac{da_2}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = (mgl\sin(a_1))a_2 + (ml^2 a_2)\left(-\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -cl(a_2)^2 \le 0$$

The derivative is negative semidefinite, which proves that the origin is stable in the sense of Lyapunov (at least).

مثال آونگ

تابع لیاپانوف (تابع انرژی)

LYAPUNOV FUNCTION (ENERGY)

تابع لیاپانوف (انرژی)
برای آونگ

$$V(\mathbf{a}) = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2(a_2)^2}_{\text{Kinetic Energy}} + \underbrace{mgl(1-\cos(a_1))}_{\text{Potential Energy}} \qquad \text{(Positive Definite)}$$

Check the derivative of the Lyapunov function:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = [\nabla V(\mathbf{a})]^T g(\mathbf{a}) = \frac{\partial V}{\partial a_1}\left(\frac{da_1}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial a_2}\left(\frac{da_2}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = (mgl\sin(a_1))a_2 + (ml^2a_2)\left(-\frac{g}{l}\sin(a_1) - \frac{c}{ml}a_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{a}) = -cl(a_2)^2 \le 0$$

The derivative is negative semidefinite, which proves that the origin is stable in the sense of Lyapunov (at least).

با توجه به قضیه‌ی لیاپانوف، مبدأ (حداقل) پایدار لیاپانوف است، اما نمی‌توانیم بگوییم پایدار مجانبی است.

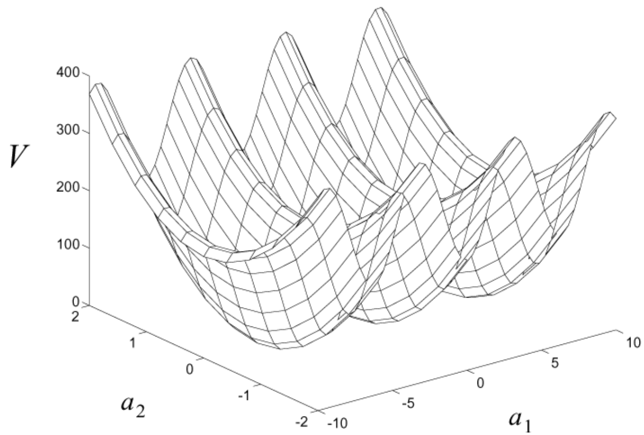
[اما از فیزیک می‌دانیم که در حضور اصطکاک، آونگ پس از مدتی در نهایت به‌صورت عمودی ثابت می‌ماند،
یعنی منطقاً مبدأ باید یک نقطه‌ی پایدار مجانبی باشد ← اثبات با **قضیه‌ی لاسال**]

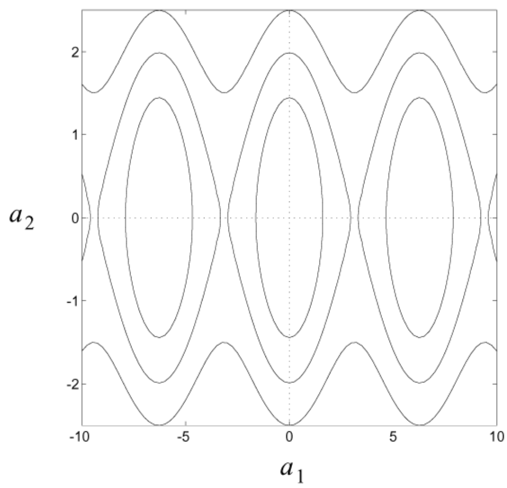
Numerical Example

$$g = 9.8, \quad m = 1, \quad l = 9.8, \quad c = 1.96$$

$$\frac{da_1}{dt} = a_2 \qquad \frac{da_2}{dt} = -\sin(a_1) - 0.2a_2$$

$$V = (9.8)^2\left[\frac{1}{2}(a_2)^2 + (1 - \cos(a_1))\right] \qquad \frac{dV}{dt} = -(19.208)(a_2)^2$$





مثال آونگ

مثال عددی

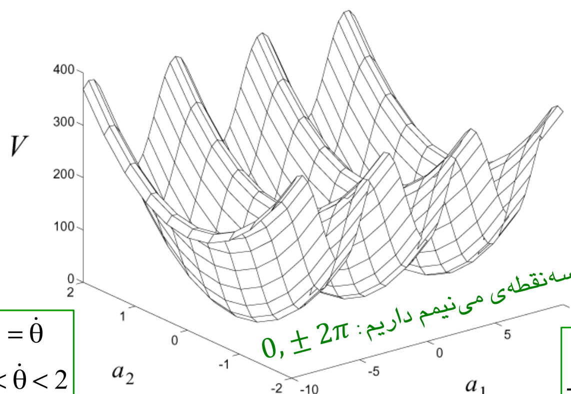
NUMERICAL EXAMPLE

$$g = 9.8, \quad m = 1, \quad l = 9.8, \quad c = 1.96$$

$$\frac{da_1}{dt} = a_2 \qquad \frac{da_2}{dt} = -\sin(a_1) - 0.2a_2$$

$$V = (9.8)^2\left[\frac{1}{2}(a_2)^2 + (1 - \cos(a_1))\right] \qquad \frac{dV}{dt} = -(19.208)(a_2)^2$$

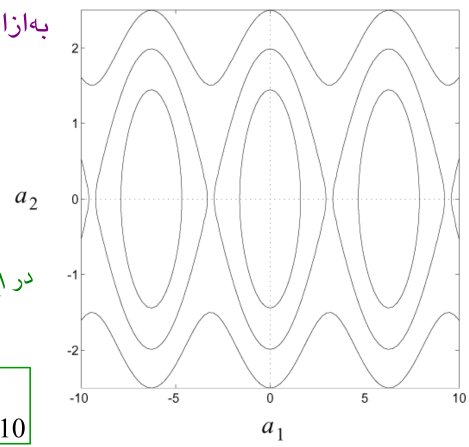
به‌ازای همه‌ی مقادیر، a_1 در $a_2 = 0$ صفر خواهد بود.



در این محدوده سه‌نقطه‌ی می‌نیمم داریم: $0, \pm 2\pi$

$a_2 = \dot{\theta}$
$-2 < \dot{\theta} < 2$

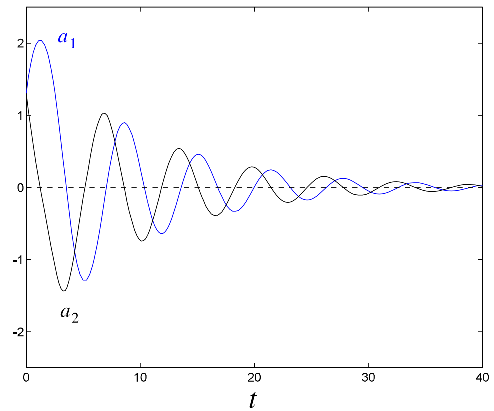
$a_1 = \theta$
$-10 < \theta < 10$

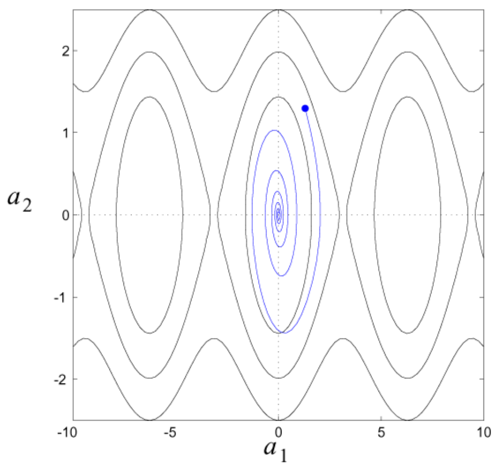


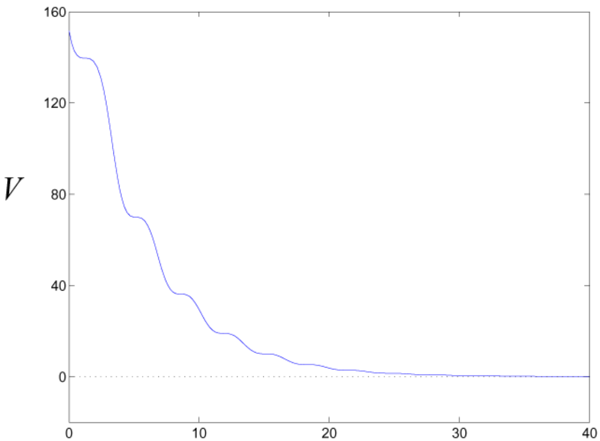
نقاط می‌نیمم تابع لیاپانوف متناظر با الگوهای پروتوتایپ در شبکه‌های عصبی انجمنی است.

Pendulum Response

$$\mathbf{a}(0) = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$







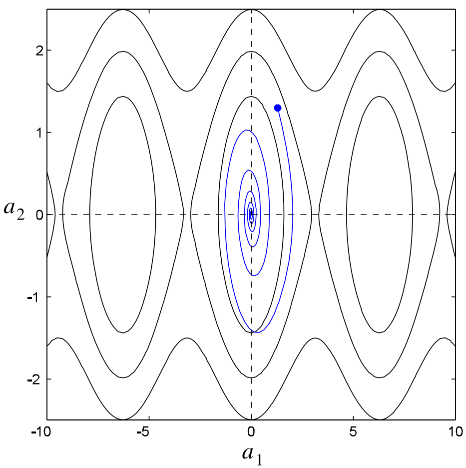
مثال آونگ

پاسخ سیستم آونگ

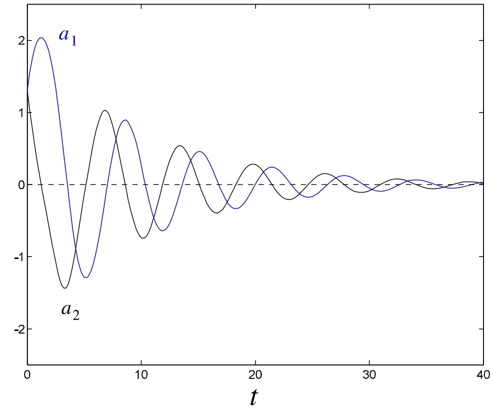
PENDULUM RESPONSE

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}(0) = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

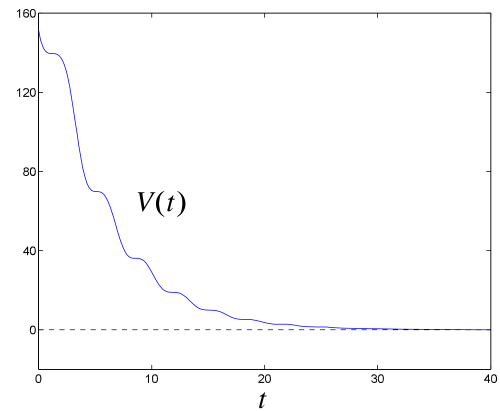
تراجکتوری (خط سیر) با این نقطه‌ی شروع
به نقطه‌ی تعادل $\mathbf{a} = 0$ همگرا شده است:



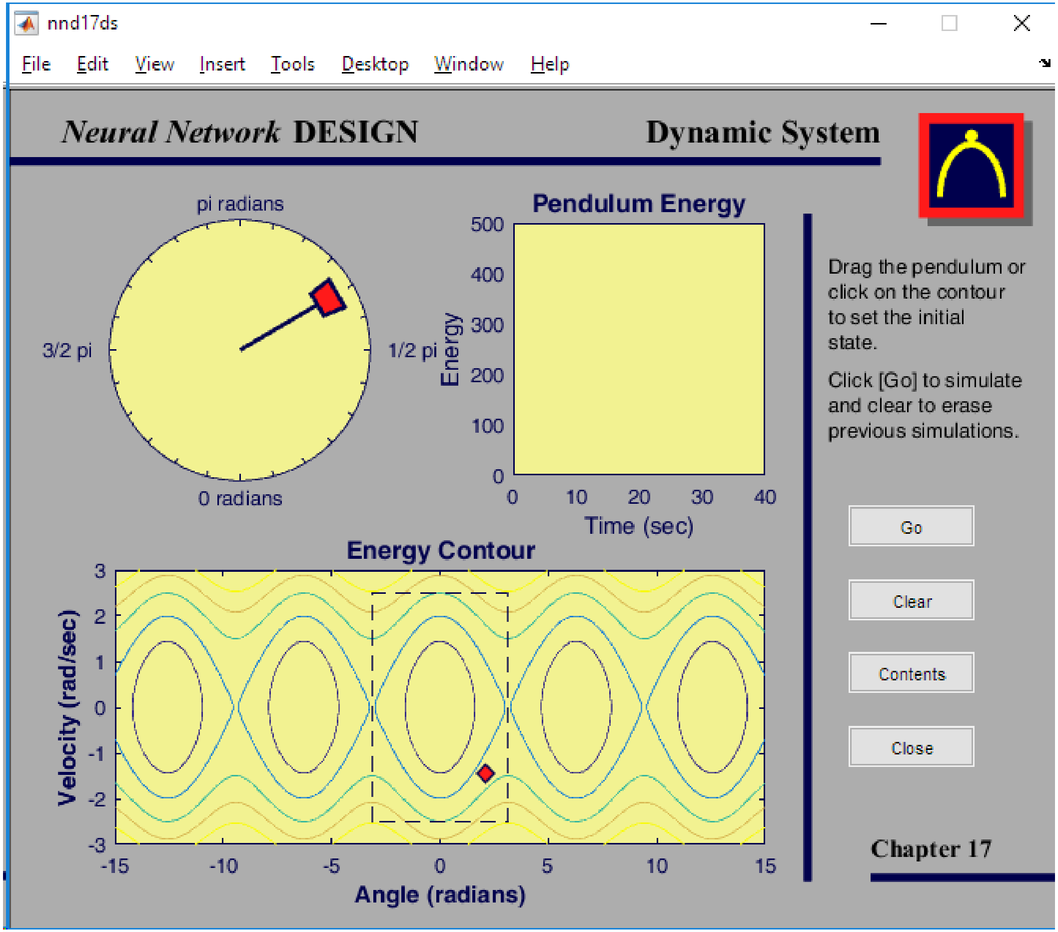
نمودار مکان–زمان



نمودار انرژی–زمان
(انرژی هرگز افزایش پیدا نمی‌کند.)



اگرچه نقاطی وجود دارند که مشتق منحنی انرژی در آنها صفر است،
اما مشتق تا زمانی که انرژی به صفر نرسد، در صفر باقی نمی‌ماند.



MATLAB

```
>> nnd17ds
```

پایداری

۵

قضیه‌ی ناوردایی لاسال

Definitions (Lasalle's Theorem)

Lyapunov Function

Let $V(\mathbf{a})$ be a continuously differentiable function from $\Re^n$ to $\Re$. If G is any subset of $\Re^n$, we say that V is a Lyapunov function on G for the system $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ if

$$\frac{dV(\mathbf{a})}{dt} = (\nabla V(\mathbf{a}))^T \mathbf{g}(\mathbf{a})$$

does not change sign on G.

Set Z

$$Z = \{\mathbf{a}: dV(\mathbf{a})/dt = 0,\ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

تعریف‌ها

DEFINITIONS (LASALLE'S THEOREM)

تابع لیاپانوف G بر روی زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^n$

Lyapunov Function

Let $V(\mathbf{a})$ be a continuously differentiable function from $\Re^n$ to $\Re$. If G is any subset of $\Re^n$, we say that V is a Lyapunov function on G for the system $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ if

$$\frac{dV(\mathbf{a})}{dt} = (\nabla V(\mathbf{a}))^T \mathbf{g}(\mathbf{a})$$

does not change sign on G.

عدم تغییر علامت مشتق بر روی G
(نیازی به معین مثبت بودن تابع وجود ندارد.)

Set Z

$$Z = \{\mathbf{a}: dV(\mathbf{a})/dt = 0, \ \ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$

نقاط مرزی و داخلی G

همه‌ی نقاطی که مشتق تابع لیاپانوف در آنها صفر است.

Definitions

Invariant Set

A set of points in $\Re^n$ is invariant with respect to $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ if every solution of $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ starting in that set remains in the set for all time.

Set L

L is defined as the largest invariant set in Z.

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

تعریف‌ها: مجموعه‌ی تغییرناپذیر

DEFINITIONS (LASALLE'S THEOREM)

Invariant Set مجموعه‌ی تغییرناپذیر

A set of points in $\Re^n$ is invariant with respect to $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ if every solution of $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ starting in that set remains in the set for all time.

Set L

L is defined as the largest invariant set in Z.

L به‌عنوان بزرگ‌ترین مجموعه‌ی تغییرناپذیر در Z تعریف می‌شود.
L حاوی همه‌ی نقاط ممکن است که امکان همگرایی راه‌حل در آنها وجود دارد.

تابع لیاپانوف در L تغییر نمی‌کند (مشتق مساوی صفر) و خط سیر در L به دام می‌افتد (مجموعه‌ی تغییر ناپذیر).
$\Leftarrow$ اگر مجموعه‌ی L فقط یک نقطه‌ی پایدار داشته باشد، آن‌گاه آن نقطه **پایدار مجانبی** خواهد بود.

Lasalle's Invariance Theorem

Theorem 2: Lasalle's Invariance Theorem

If V is a Lyapunov function on G for $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$, then each solution $\mathbf{a}(t)$ that remains in G for all $t > 0$ approaches $L^\circ = L \cup \{\infty\}$ as $t \to \infty$. (G is a basin of attraction for L, which has all of the stable points.) If all trajectories are bounded, then $\mathbf{a}(t) \to L$ as $t \to \infty$.

Corollary 1: Lasalle's Corollary

Let G be a component (one connected subset) of

$$\Omega_\eta = \{\mathbf{a}\colon V(\mathbf{a}) < \eta\}.$$

Assume that G is bounded, $dV(\mathbf{a})/dt \le 0$ on the set G, and let the set $L^\circ = \text{closure}(L \cup G)$ be a subset of G. Then L° is an attractor, and G is in its region of attraction.

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

قضیه

LASALLE'S INVARIANCE THEOREM

قضیه‌ی لاسال: علاوه بر تعریف ناحیه‌هایی که مشتق تابع لیاپانوف در آنها صفر است،
بخش‌هایی از ناحیه‌هایی را که قابلیت به دام انداختن خط سیر (تراجکتوری) را دارند، شناسایی می‌کند.

Theorem 2: Lasalle's Invariance Theorem

If V is a Lyapunov function on G for $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{a})$, then each solution $\mathbf{a}(t)$ that remains in G for all $t > 0$ approaches $L^{\circ} = L \cup \{\infty\}$ as $t \to \infty$. (G is a basin of attraction for L, which has all of the stable points.) If all trajectories are bounded, then $\mathbf{a}(t) \to L$ as $t \to \infty$.

در صورتی که خط سیر در G باقی بماند، آن‌گاه یا به L همگرا می‌شود و یا به سمت بی‌نهایت می‌رود.
اگر همه‌ی خط سیرها کران‌دار باشند، آن‌گاه همه‌ی آنها به L همگرا خواهند شد.

نتیجه

Corollary 1: Lasalle's Corollary

Let G be a component (one connected subset) of

یک مجموعه‌ی همبند

$$\Omega_{\eta} = \{\mathbf{a}: V(\mathbf{a}) < \eta\}.$$

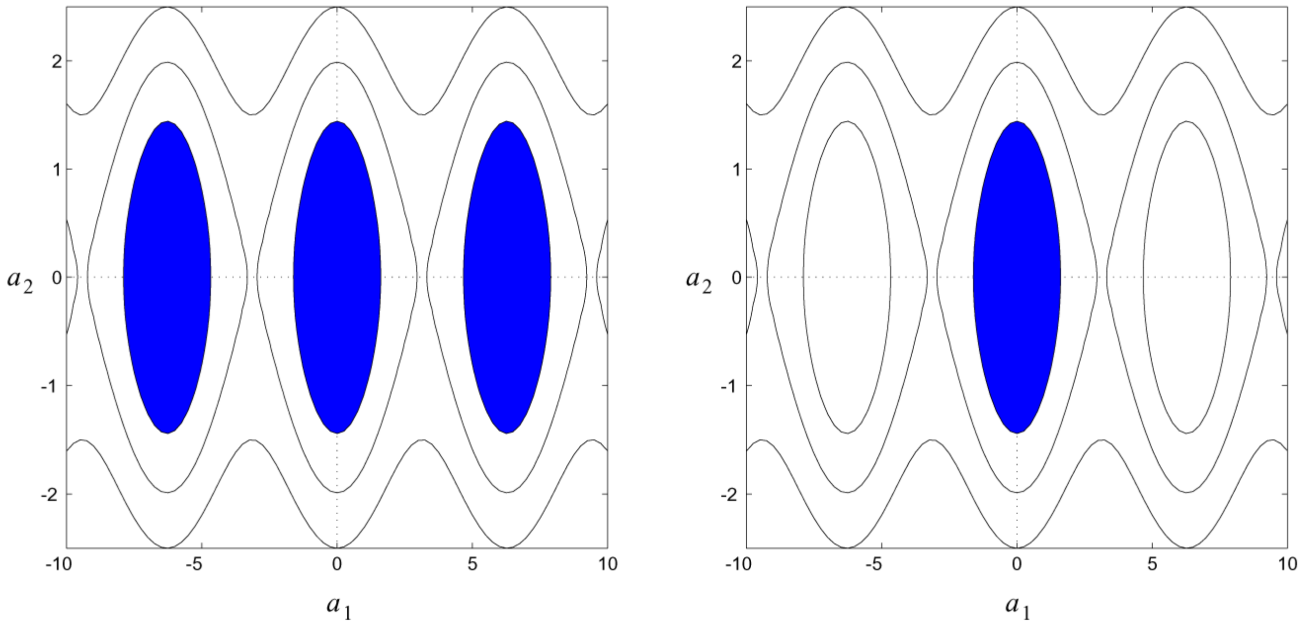
Assume that G is bounded, $dV(\mathbf{a})/dt \le 0$ on the set G, and let the set $L^{\circ} = \text{closure}(L \cup G)$ be a subset of G. Then L° is an attractor, and G is in its region of attraction.

جذب‌کننده

ناحیه‌ی جذب

Pendulum Example

$\Omega_{100} = \{\mathbf{a}\colon V(\mathbf{a}) \leq 100\}$ G = One component of Ω_{100}.



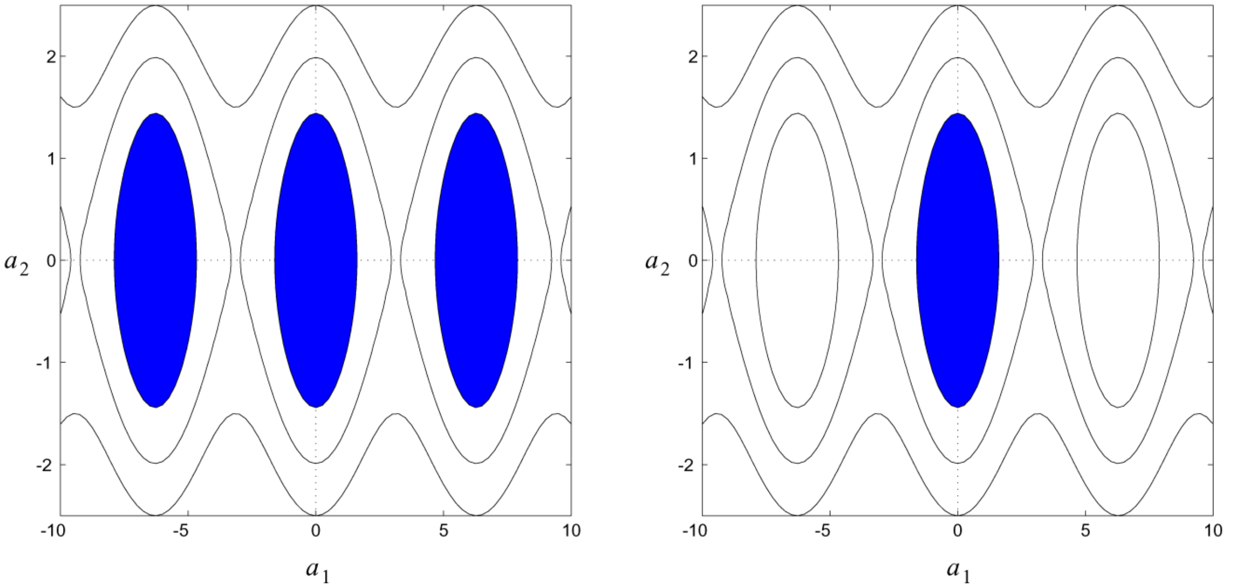
قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

مثال آونگ

Pendulum Example

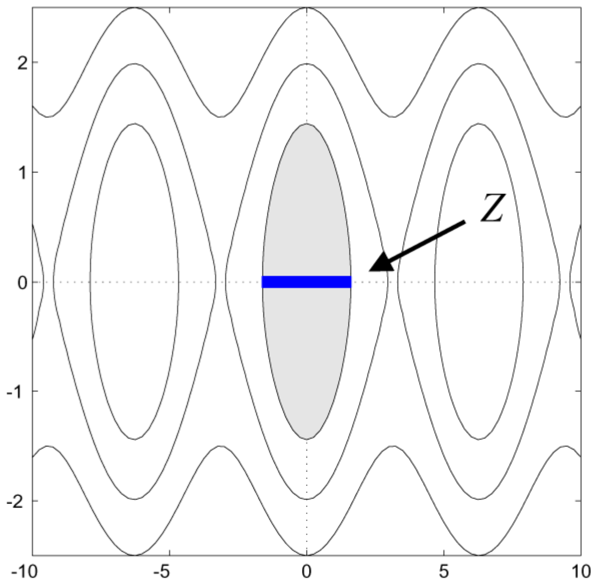
$$\eta = 100$$

$$\Omega_{100} = \{\mathbf{a}: V(\mathbf{a}) \le 100\} \qquad G = \text{One component of } \Omega_{100}.$$



Invariant and Attractor Sets

$$Z = \{\mathbf{a}:\ dV(\mathbf{a})/dt = 0,\ \ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\} = \{\mathbf{a}:\ a_2 = 0,\ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$



$$L = \{\mathbf{a}:\ \mathbf{a} = 0\}$$

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

مثال آونگ: مجموعه‌های تغییرناپذیر و جذب‌کننده

INVARIANT AND ATTRACTOR SETS

سرعت

$$Z = \{\mathbf{a}: dV(\mathbf{a})/dt = 0,\ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\} = \{\mathbf{a}: a_2 = 0,\ \mathbf{a} \text{ in the closure of } G\}$$
$$= \{\mathbf{a} : a_2 = 0, -1.6 \le a_1 \le 1.6\}$$

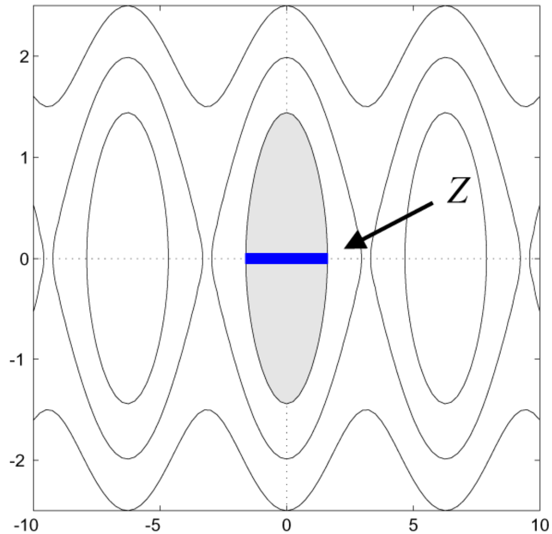
مجموعه‌ی L°
بستار اشتراک L و G است
که در این مورد داریم:

$$L^\circ = closure(L \cap G)$$
$$= L = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = 0\}$$

پس طبق قضیه‌ی لاسال،
L° یک جذب‌کننده (نقطه‌ی پایدار
مجانبی) و G ناحیه‌ی جذب آن
است.

$\Downarrow$

هر خط سیری که در G شروع
شود، حتماً به مبدأ ختم می‌شود.



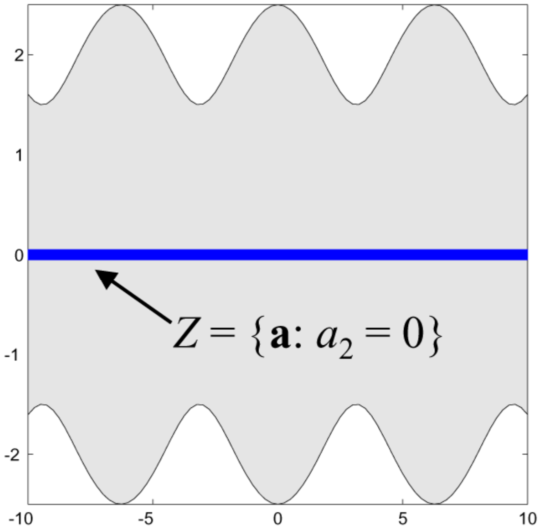
فقط با شروع از
مکان آغازین 0 رادیان،
سرعت صفر باقی خواهد ماند.

(از هر نقطه‌ی دیگری در Z
شروع کنیم، سرعت آونگ صفر
باقی نخواهد ماند و خط سیر به
خارج از Z منتقل می‌شود.)
$\Leftarrow$ L فقط حاوی مبدأ است.

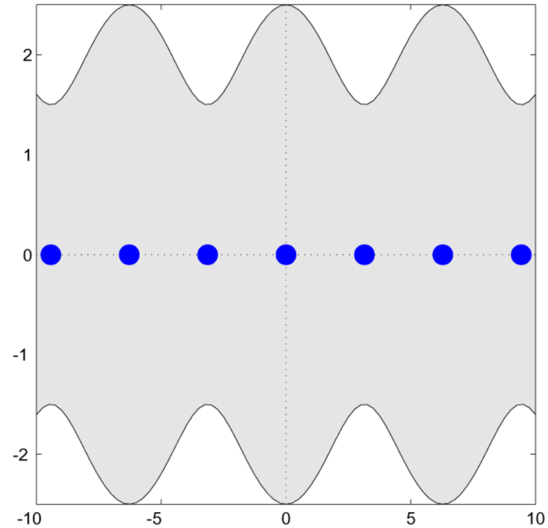
L بزرگ‌ترین مجموعه‌ی تغییرناپذیر در Z است: $L = \{\mathbf{a}: \mathbf{a} = 0\}$

Larger G Set

$G = \Omega_{300} = \{\mathbf{a}\!: V(\mathbf{a}) \le 300\}$



$L^{\circ} = L = \{\mathbf{a}\!: a_1 = \pm n\pi,\ a_2 = 0\}$



For this choice of G we can say little about where the trajectorywill converge.

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

مثال آونگ: مجموعه‌های G بزرگ‌تر

LARGER G SET

حال یک ناحیه‌ی بزرگ‌تر را به‌عنوان Ω_η در نظر می‌گیریم:

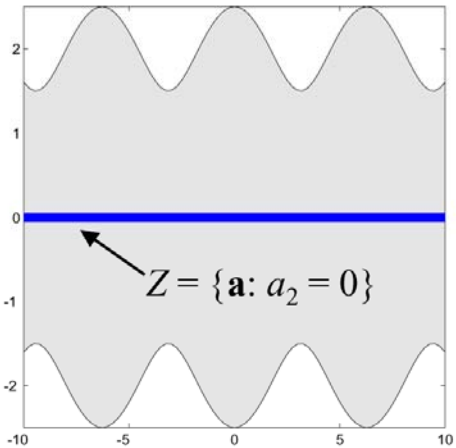
$\eta = 300$

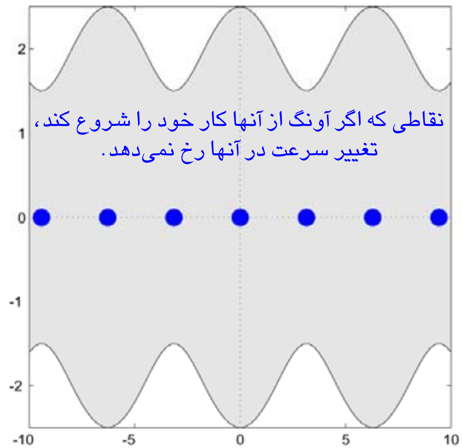
$Z = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = 0\}$

نقاط خاکستری
(کلاً یک مؤلفه‌ی همبند)

$G = \Omega_{300} = \{\mathbf{a}\!: V(\mathbf{a}) \le 300\}$

$L^{\circ} = L = \{\mathbf{a}\!: a_1 = \pm n\pi,\ a_2 = 0\}$

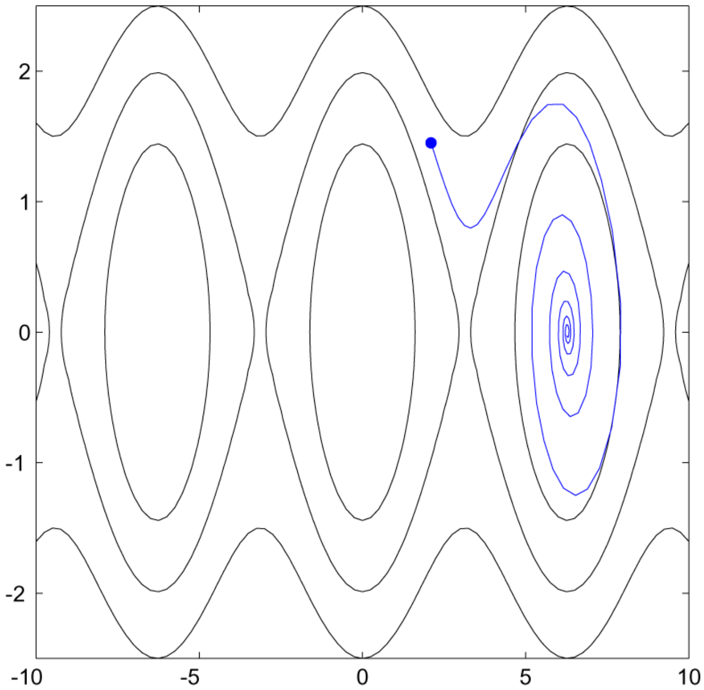




For this choice of G we can say little
about where the trajectorywill converge.

با این انتخاب از G چیز زیادی در مورد مکان همگرایی خط سیر نمی‌توانیم بگوییم.
فقط می‌توانیم بگوییم که اگر ما حرکت را از جایی در G شروع کنیم، یکی از نقاط تعادل، راه‌حل سیستم را جذب می‌کند.

Pendulum Trajectory

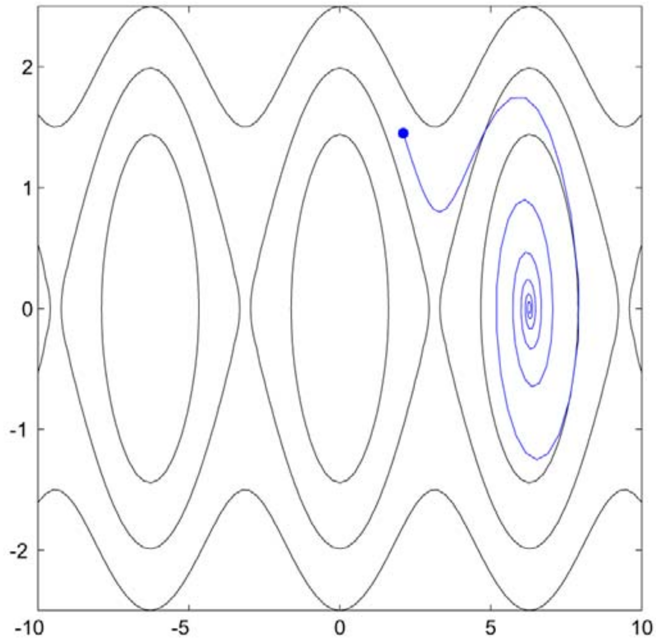


قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

مثال آونگ : خط سیر آونگ

PENDULUM TRAJECTORY

مثال :



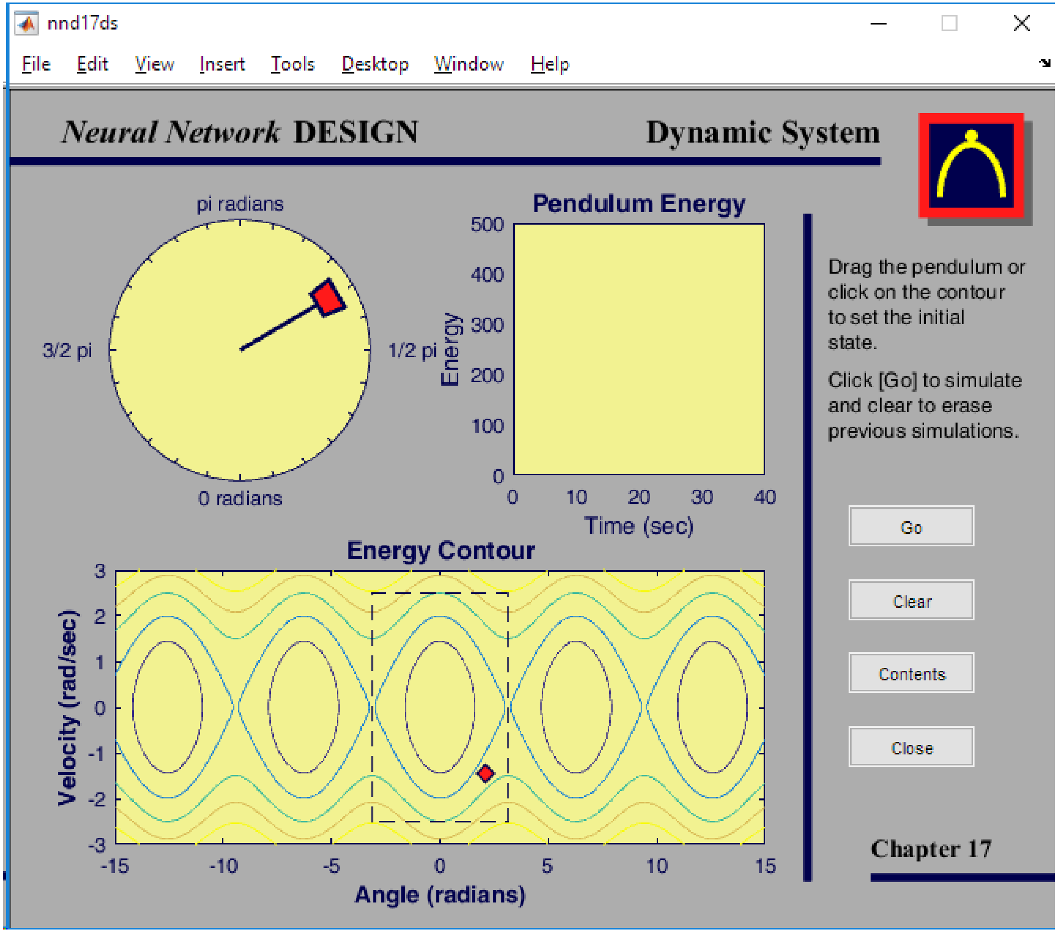
موقعیت اولیه:

$$\begin{bmatrix} 2\ \text{rad} \\ 1.5\ \text{rad/s} \end{bmatrix}$$

مکان اولیه

سرعت اولیه

در این مورد، آونگ دارای سرعت کافی برای رسیدن به نقطه‌ی اوج و همگرایی در نقطه‌ی تعادل 2π رادیان است.


nnd17ds
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Neural Network DESIGN
Dynamic System
pi radians
3/2 pi
1/2 pi
0 radians
Pendulum Energy
Energy
500
400
300
200
100
0
0 10 20 30 40
Time (sec)
Drag the pendulum or click on the contour to set the initial state.
Click [Go] to simulate and clear to erase previous simulations.
Go
Clear
Contents
Close
Energy Contour
Velocity (rad/sec)
3 2 1 0 -1 -2 -3
-15 -10 -5 0 5 10 15
Angle (radians)
Chapter 17

```
>> nnd17ds
```

Comments

We want G to be as large as possible, because that will indicate the region of attraction. However, we want to choose V so that the set Z, which will contain the attractor set, is as small as possible.

$V = 0$ is a Lyapunov function for all of $\Re^n$, but it gives no information since $Z = \Re^n$.

If V_1 and V_2 are Lyapunov functions on G, and dV_1/dt and dV_2/dt have the same sign, then $V_1 + V_2$ is also a Lyapunov function, and $Z = Z_1 \cap Z_2$. If Z is smaller than Z_1 or Z_2, then V is a "better" Lyapunov function than either V_1 or V_2. V is always at least as good as either V_1 or V_2.

قضیه‌ی تغییرناپذیری لاسال

چند توضیح

COMMENTS

We want G to be as large as possible, because that will indicate the region of attraction. However, we want to choose V so that the set Z, which will contain the attractor set, is as small as possible.

Z

$V = 0$ is a Lyapunov function for all of $\Re^n$, but it gives no information since $Z = \Re^n$.

If V_1 and V_2 are Lyapunov functions on G, and dV_1/dt and dV_2/dt have the same sign, then $V_1 + V_2$ is also a Lyapunov function, and $Z = Z_1 \cap Z_2$. If Z is smaller than Z_1 or Z_2, then V is a "better" Lyapunov function than either V_1 or V_2. V is always at least as good as either V_1 or V_2.

در صورتی که دو تابع لیاپانوف با مشتقات هم‌علامت پیدا کردیم،
می‌توانیم آن دو را با هم جمع کنیم و یک تابع لیاپانوف بهتر بسازیم:

❋ بهترین تابع لیاپانوف برای یک سیستم تابعی است که
دارای کوچک‌ترین مجموعه‌ی جذب‌کننده و بزرگ‌ترین ناحیه‌ی جذب باشد.

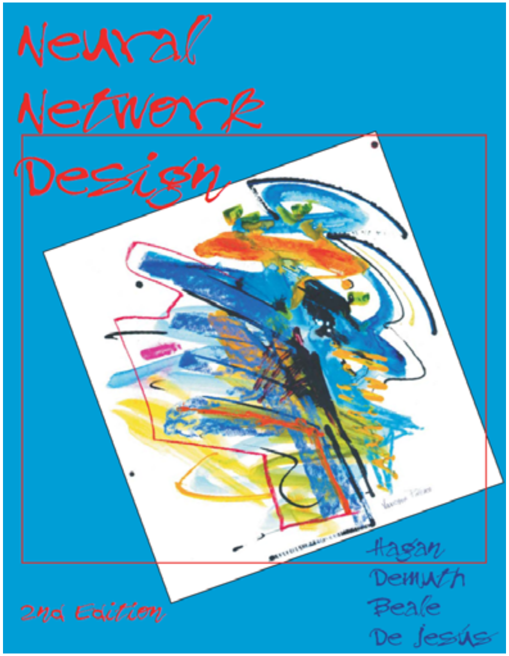
Prepared by Kazim Fouladi | Fall 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

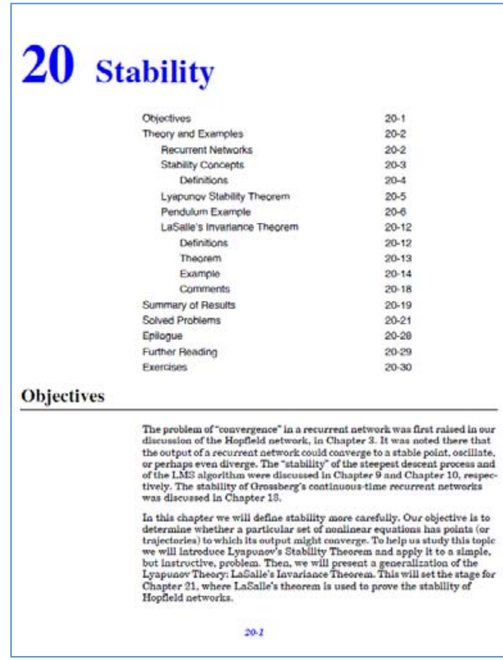
پایداری

۶

منابع

منبع اصلی





20 Stability

Objectives	20-1
Theory and Examples	20-2
Recurrent Networks	20-2
Stability Concepts	20-3
Definitions	20-4
Lyapunov Stability Theorem	20-5
Pendulum Example	20-6
LaSalle's Invariance Theorem	20-12
Definitions	20-12
Theorem	20-13
Example	20-14
Comments	20-18
Summary of Results	20-19
Solved Problems	20-21
Epilogue	20-28
Further Reading	20-29
Exercises	20-30

Objectives

The problem of "convergence" in a recurrent network was first raised in our discussion of the Hopfield network, in Chapter 3. It was noted there that the output of a recurrent network could converge to a stable point, oscillate, or perhaps even diverge. The "stability" of the steepest descent process and of the LMS algorithm were discussed in Chapter 9 and Chapter 10, respectively. The stability of Grossberg's continuous-time recurrent networks was discussed in Chapter 18.

In this chapter we will define stability more carefully. Our objective is to determine whether a particular set of nonlinear equations has points (or trajectories) to which its output might converge. To help us study this topic we will introduce Lyapunov's Stability Theorem and apply it to a simple, but instructive, problem. Then, we will present a generalization of the Lyapunov Theory: LaSalle's Invariance Theorem. This will set the stage for Chapter 21, where LaSalle's theorem is used to prove the stability of Hopfield networks.

20-1

Martin T. Hagan, Howard B. Demuth, Mark H. Beale, Orlando De Jesus,
Neural Network Design,
2nd Edition, Martin Hagan, 2014.
Chapter 20

Online version can be downloaded from: http://hagan.okstate.edu/nnd.html