شبکه‌های عصبی مصنوعی

درس ۵

فضاهای برداری وزن و سیگنال

Signal and Weight Vector Spaces

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/nn

Signal & Weight Vector Spaces

شبکه‌های عصبی مصنوعی

فضاهای برداری وزن و سیگنال

۱

فضاهای برداری خطی

5

Notation

Vectors in $\Re^n$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Generalized Vectors.

$$x$$

نمادگذاری

NOTATION

بردارها در $\mathbb{R}^n$

Vectors in $\Re^n$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بردارهای تعمیم‌یافته

Generalized Vectors.

$$x$$

5

Vector Space

1. An operation called vector addition is defined such that if $x \in X$ and $y \in X$ then $x+y \in X$.
2. $x+y=y+x$
3. $(x+y)+z=x+(y+z)$
4. There is a unique vector $0 \in X$, called the zero vector, such that $x+0=x$ for all $x \in X$.
5. For each vector there is a unique vector in X, to be called $(-x)$, such that $x+(-x)=0$.

فضای برداری

تعریف (۱ از ۲)

Vector Space

فضای برداری
Vector Space

فضای برداری، X، مجموعه‌ی عناصر (بردارهای) تعریف شده بر روی میدان اسکالر F است که قیدهای زیر را ارضا می‌کند:

1. An operation called vector addition is defined such that if $x \in X$ and $y \in X$ then $x+y \in X$.
2. $x+y=y+x$
3. $(x+y)+z=x+(y+z)$
4. There is a unique vector $0 \in X$, called the zero vector, such that $x+0=x$ for all $x \in X$.
5. For each vector there is a unique vector in X, to be called $(-x)$, such that $x+(-x)=0$.

Vector Space (Cont.)

6. An operation, called multiplication, is defined such that for all scalars $a \in F$, and all vectors $x \in X$, $a\,x \in X$.
7. For any $x \in X$, $1x = x$ (for scalar 1).
8. For any two scalars $a \in F$ and $b \in F$, and any $x \in X$, $a(bx) = (a\,b)\,x$.
9. $(a+b)\,x = a\,x + b\,x$.
10. $a\,(x+y) = a\,x + a\,y$

فضای برداری

تعریف (۲ از ۲)

VECTOR SPACE

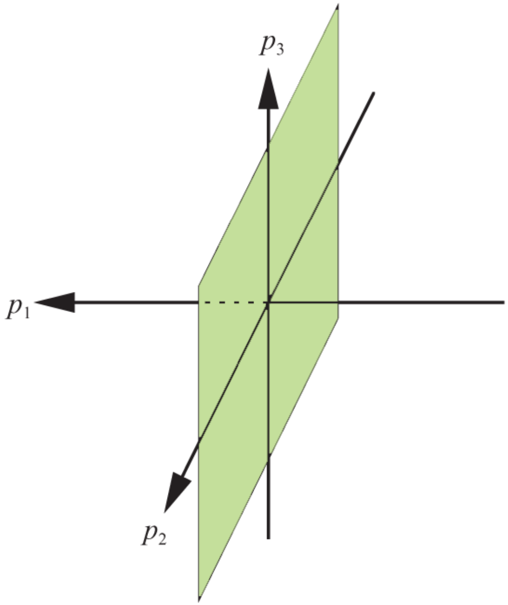
فضای برداری *Vector Space*	فضای برداری، X، مجموعه‌ی عناصر (بردارهای) تعریف شده بر روی میدان اسکالر F است که قیدهای زیر را ارضا می‌کند:

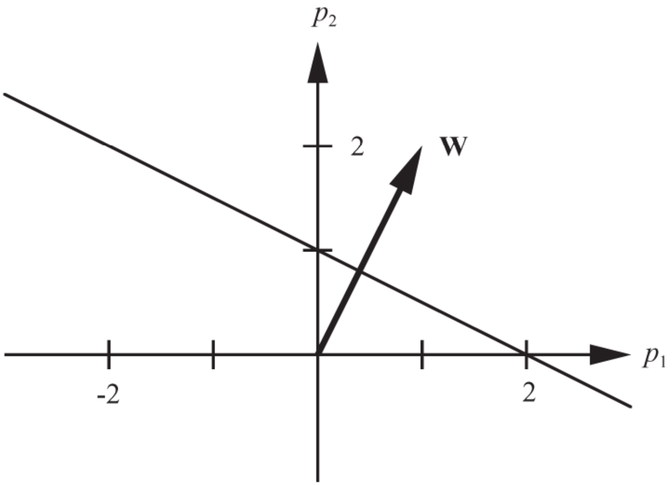
6. An operation, called multiplication, is defined such that for all scalars $a \in F$, and all vectors $x \in X$, $a\,x \in X$.
7. For any $x \in X$, $1x = x$ (for scalar 1).
8. For any two scalars $a \in F$ and $b \in F$, and any $x \in X$, $a(bx) = (ab)\,x$.
9. $(a+b)\,x = a\,x + b\,x$.
10. $a(x+y) = a\,x + a\,y$

Examples (Decision Boundaries)

Is the p_2, p_3 plane a vector space?

Is the line $p_1 + 2p_2 - 2 = 0$ a vector space?





فضای برداری

مثال: مرزهای تصمیم

Examples (Decision Boundaries)

$\mathbb{R}^2$ یک فضای برداری است.

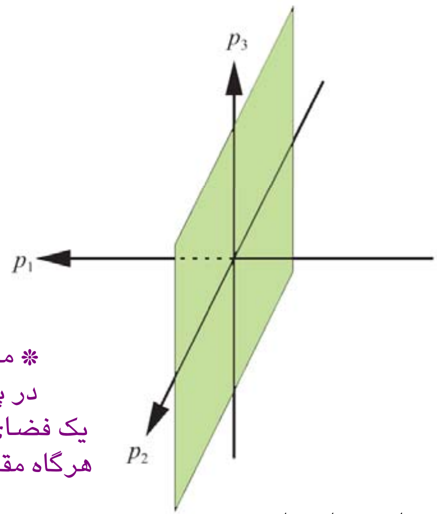
اما، هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^2$ لزوماً فضای برداری نیست.

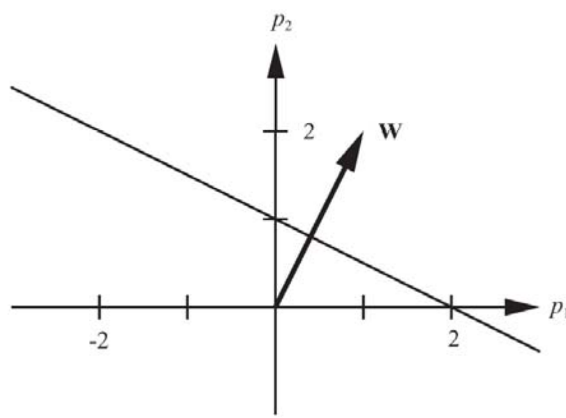
Is the p_2, p_3 plane a vector space?

این صفحه یک فضای برداری است.

این خط یک فضای برداری نیست. (نقض شرط 4)

Is the line $p_1 + 2p_2 - 2 = 0$ a vector space?





* مرز تصمیم
در پرسپترون
یک فضای برداری است
هرگاه مقدار بایاس صفر
باشد.

هر خطی که از مبدأ عبور کند، یک فضای برداری است.

* هیچ مجموعه‌ی کران‌داری نمی‌تواند فضای برداری باشد.

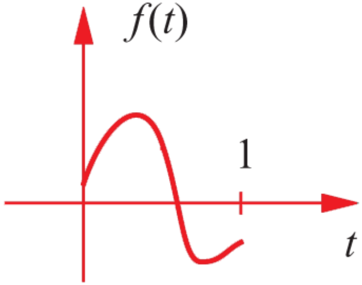
Other Vector Spaces

Polynomials of degree 2 or less.

$$x = 2 + t + 4t^2$$

$$y = 1 + 5t$$

Continuous functions in the interval [0,1].



فضای برداری

مثال: توابع

Examples (Functions)

$\mathbb{P}^2$ (مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دو به پایین) یک فضای برداری است.

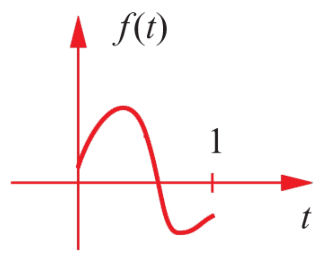
Polynomials of degree 2 or less.

$$x = 2 + t + 4t^2$$

$$y = 1 + 5t$$

$\mathbb{C}_{[0,1]}$ (مجموعه‌ی توابع پیوسته در بازه‌ی $[0,1]$) یک فضای برداری است.

Continuous functions in the interval [0,1].



$x = \sin t \qquad y = \cos t$

فضاهای برداری وزن و سیگنال

۲

استقلال خطی

5

Linear Independence

If

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = 0$$

implies that each

$$a_i = 0$$

then

$$\{X_i\}$$

is a set of linearly independent vectors.

استقلال خطی (نابستگی خطی)

LINEAR INDEPENDENCE

n بردار $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ را در نظر بگیرید.
اگر n اسکالر $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ وجود داشت که حداقل یکی از آنها غیر صفر بود و

If

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

implies that each

$$a_i = 0$$

then

$$\{x_i\}$$

is a set of linearly independent vectors.

اگر یک مجموعه از بردارها مستقل خطی باشند،
هیچ یک از آن بردارها را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی سایر بردارها نوشت.

Example (Banana and Apple)

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Let

$$a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \\ -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This can only be true if

$$a_1 = a_2 = 0$$

Therefore the vectors are independent.

استقلال خطی (نابستگی خطی)

مثال (طبقه‌بندی موز / سیب)

LINEAR INDEPENDENCE

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Let

$$a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \\ -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This can only be true if

$$a_1 = a_2 = 0$$

Therefore the vectors are independent.

استقلال خطی (نابستگی خطی)

مثال

LINEAR INDEPENDENCE

بردارهای زیر در فضای $\mathbb{P}^2$ وابسته‌ی خطی هستند:

$$x_1 = 1 + t + t^2$$

$$x_2 = 2 + 2t + t^2$$

$$x_3 = 1 + t$$

زیرا:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

فضاهای برداری وزن و سیگنال

۳

روبش یک فضا

5

Spanning a Space

A subset **spans** a space if every vector in the space can be written as a linear combination of the vectors in the subspace.

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_m \boldsymbol{u}_m$$

روبش یک فضا

مثال

SPANNING A SPACE

اگر X یک فضای برداری خطی و
$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ زیرمجموعه‌ای از بردارهای فضای X باشد
می‌گوییم
U یک فضا را **روبش** (span) می‌کند
اگر
هر بردار x در فضای X بتواند به‌صورت ترکیبی خطی از بردارها در زیرفضای U نوشته شود:

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_m u_m$$

x_iها اسکالر هستند

Basis Vectors

- A set of basis vectors for the space X is a set of vectors which spans X and is linearly independent.
- The dimension of a vector space, Dim(X), is equal to the number of vectors in the basis set.
- Let X be a finite dimensional vector space, then every basis set of X has the same number of elements.

بردارهای پایه

BASIS VECTORS

بردارهای پایه‌ی فضای X: بردارهای مستقل خطی که فضای X را روبش می‌کنند.

A set of basis vectors for the space X is a set of vectors which spans X and is linearly independent.

بعد فضای X = تعداد بردارهای پایه

The dimension of a vector space, Dim(X), is equal to the number of vectors in the basis set.

همه‌ی مجموعه بردارهای پایه‌ی یک فضای برداری متناهی–ابعاد، تعداد عناصر مشابهی دارند.

Let X be a finite dimensional vector space, then every basis set of X has the same number of elements.

Example

Polynomials of degree 2 or less.

Basis A:

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = t \qquad u_3 = t^2$$

Basis B:

$$u_1 = 1 - t \qquad u_2 = 1 + t \qquad u_3 = 1 + t + t^2$$

(Any three linearly independent vectors in the space will work.)

How can you represent the vector $x = 1+2t$ using both basis sets?

بردارهای پایه

مثال

Basis Vectors

$\mathbb{P}^2$ (مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دو به پایین)

Polynomials of degree 2 or less.

Basis A:

$u_1 = 1 \qquad u_2 = t \qquad u_3 = t^2$

Basis B:

$u_1 = 1 - t \qquad u_2 = 1 + t \qquad u_3 = 1 + t + t^2$

(Any three linearly independent vectors in the space will work.)

(هر سه بردار مستقل خطی در این فضا قابل قبول است)

How can you represent the vector $x = 1+2t$ using both basis sets?

فضاهای برداری وزن و سیگنال

۴

ضرب داخلی و نُرم

Inner Product / Norm

A scalar function of vectors x and y can be defined as an **inner product**, (x,y), provided the following are satisfied (for real inner products):

- $(x,y) = (y,x)$.
- $(x,ay_1+by_2) = a(x,y_1) + b(x,y_2)$.
- $(x\,,\,x) \geq 0$, where equality holds iff $x = 0$.

A scalar function of a vector x is called a **norm**, $||x||$, provided the following are satisfied:

- $||x|| \geq 0$.
- $||x|| = 0$ iff $x = 0$.
- $||a\,x|| = |a|\;||x||$ for scalar a .
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

ضرب داخلی

INNER PRODUCT

A scalar function of vectors x and y can be defined as an **inner product**, (x,y), provided the following are satisfied (for real inner products):

- $(x,y) = (y,x)$.
- $(x,\mathrm{a}y_1+\mathrm{b}y_2) = \mathrm{a}(x\,,y_1) + \mathrm{b}(x\,,y_2)$.
- $(x\,,\,x) \geq 0$, where equality holds iff $x = 0$.

نُرم

NORM

A scalar function of a vector x is called a **norm**, $||x||$, provided the following are satisfied:

- $||x|| \geq 0$.
- $||x|| = 0$ iff $x = 0$.
- $||a\ x|| = |a|\ ||x||$ for scalar a .
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Example

Standard Euclidean Inner Product

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Standard Euclidean Norm

$$||x|| = (x, x)^{1/2}$$

$$||\mathbf{x}|| = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2)^{1/2}$$

Angle

$$\cos(\theta) = (x,y)/(||x||\,||y||)$$

مثال

Standard Euclidean Inner Product

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Standard Euclidean Norm

$$||x|| = (x, x)^{1/2}$$

$$||\mathbf{x}|| = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Angle

$$\cos(\theta) = (x,y)/(||x||\,||y||)$$

ضرب داخلی برای $\mathbb{C}_{[0,1]}$

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

فضاهای برداری وزن و سیگنال

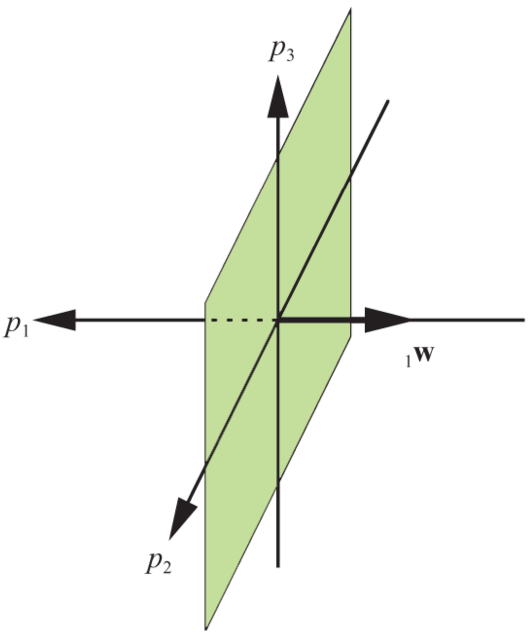
۵

تعامد

Orthogonality

Two vectors $x,y \in X$ are orthogonal if $(x,y) = 0$.

Example



Any vector in the p_2,p_3 plane is orthogonal to the weight vector.

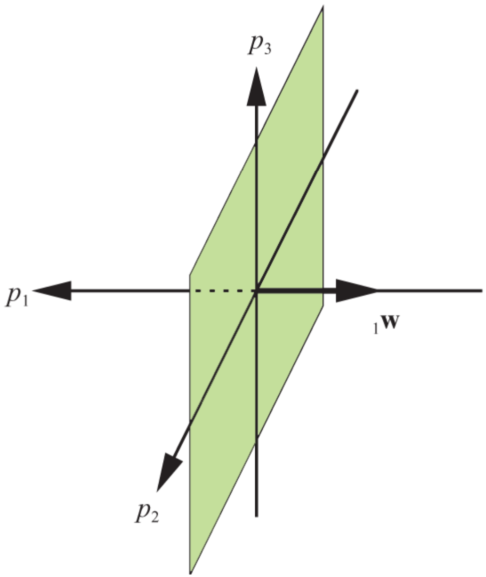
تعامد

ORTHOGONALITY

Two vectors $x, y \in X$ are orthogonal if $(x, y) = 0$.

دو بردار از یک فضا **متعامد** (عمود بر هم) هستند اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد.

Example



$${}_1\mathbf{w} \perp p_2 p_3$$

Any vector in the p_2,p_3 plane is orthogonal to the weight vector.

هر بردار در صفحه‌ی p_2p_3 بر بردار وزن عمود است.

تعامد

فضاهای متعامد

ORTHOGONAL SPACES

دو فضا متعامد هستند اگر هر بردار از فضای اول بر هر بردار از فضای دوم عمود باشد.

$$X_1 \perp X_2$$

هر بردار در X_1 بر هر بردار از X_2 عمود است.

$$x \perp X_1$$

x بر هر بردار در X_1 عمود است.

5

Gram-Schmidt Orthogonalization

Independent Vectors		Orthogonal Vectors
$y_1, y_2, \ldots, y_n$	→	$v_1, v_2, \ldots, v_n$

Step 1: Set first orthogonal vector to first independent vector.

$$v_1 = y_1$$

Step 2: Subtract the portion of y_2 that is in the direction of v_1.

$$v_2 = y_2 - a v_1$$

Where a is chosen so that v_2 is orthogonal to v_1:

$$(v_1, v_2) = (v_1, y_2 - a v_1) = (v_1, y_2) - a(v_1, v_1) = 0$$

$$a = \frac{(v_1, y_2)}{(v_1, v_1)}$$

متعامدسازی

ORTHOGONALIZATION

Independent Vectors		Orthogonal Vectors
$y_1, y_2, \dots, y_n$	$\Rightarrow$	$v_1, v_2, \dots, v_n$

هر مجموعه از بردارهای مستقل را می‌توان به مجموعه‌ای از بردارهای متعامد تبدیل کرد که همان فضای برداری را تولید کند.

الگوریتم متعامدسازی: گرام–اشمیت

متعامدسازی گرام-اشمیت

GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION

Independent Vectors	→	Orthogonal Vectors
$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$		$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$

Step 1: Set first orthogonal vector to first independent vector.

$$v_1 = y_1$$ بردار متعامد اول را مساوی با اولین بردار مستقل قرار می‌دهیم:

Step 2: Subtract the portion of y_2 that is in the direction of v_1.

$$v_2 = y_2 - a v_1$$ نسبتی از y_2 که در راستای v_1 است را از آن کم می‌کنیم:

Where a is chosen so that v_2 is orthogonal to v_1:

$$(v_1, v_2) = (v_1, y_2 - a v_1) = (v_1, y_2) - a(v_1, v_1) = 0$$

$$a = \frac{(v_1, y_2)}{(v_1, v_1)}$$ a به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که v_1 عمود بر v_2 شود:

5

Gram-Schmidt (Cont.)

Projection of y_2 on v_1:

$$\frac{(v_1, y_2)}{(v_1, v_1)} v_1$$

Step k: Subtract the portion of y_k that is in the direction of all previous v_i .

$$v_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_i, y_k)}{(v_i, v_i)} v_i$$

متعامدسازی گرام–اشمیت

Gram-Schmidt Orthogonalization

Projection of y_2 on v_1:

افکنش y_2 روی v_1 انجام می‌شود:

$$\frac{(v_1, y_2)}{(v_1, v_1)} v_1$$

Step k: Subtract the portion of y_k that is in the direction of all previous v_i.

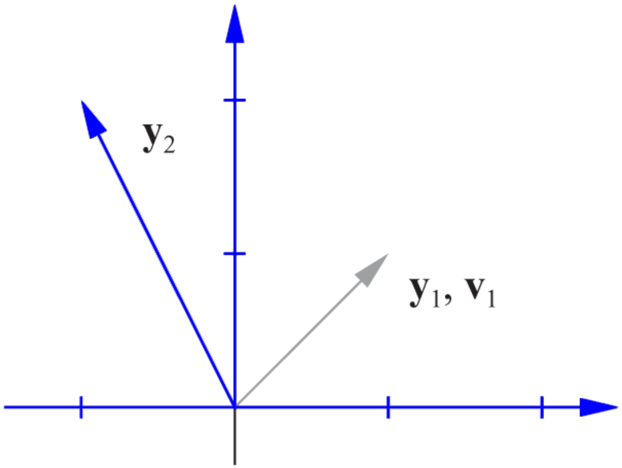
$$v_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_i, y_k)}{(v_i, v_i)} v_i$$

برای v_k هر نسبتی از y_k که در راستای همه‌ی v_i های قبلی است را کم می‌کنیم.

Example

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Step 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



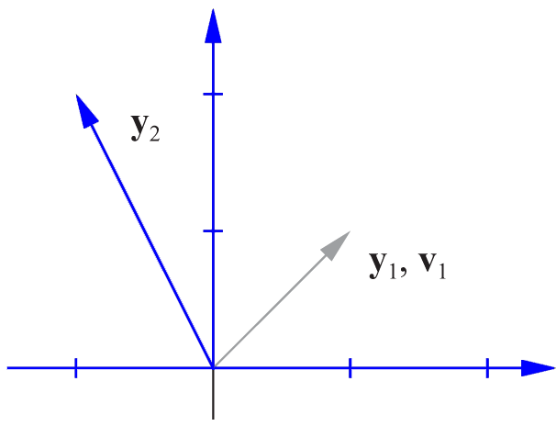
متعامدسازی گرام-اشمیت

مثال (۱ از ۲)

Gram-Schmidt Orthogonalization

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

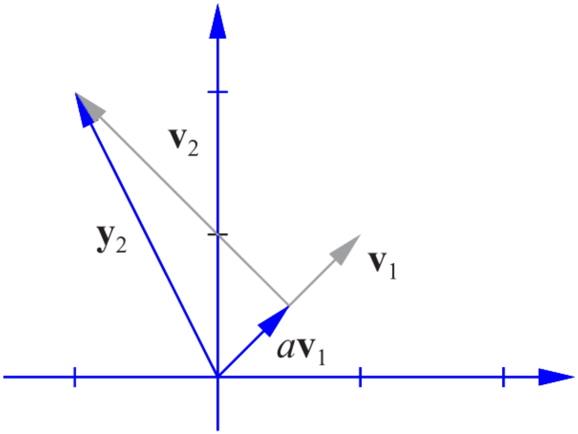
Step 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Example (Cont.)

Step 2.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}_2 - \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{y}_2}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$



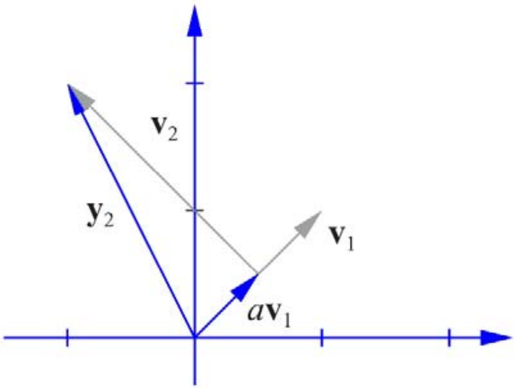
متعامدسازی گرام-اشمیت

مثال (۲ از ۲)

GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION

Step 2.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}_2 - \frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{y}_2}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1.5\\1.5\end{bmatrix}$$

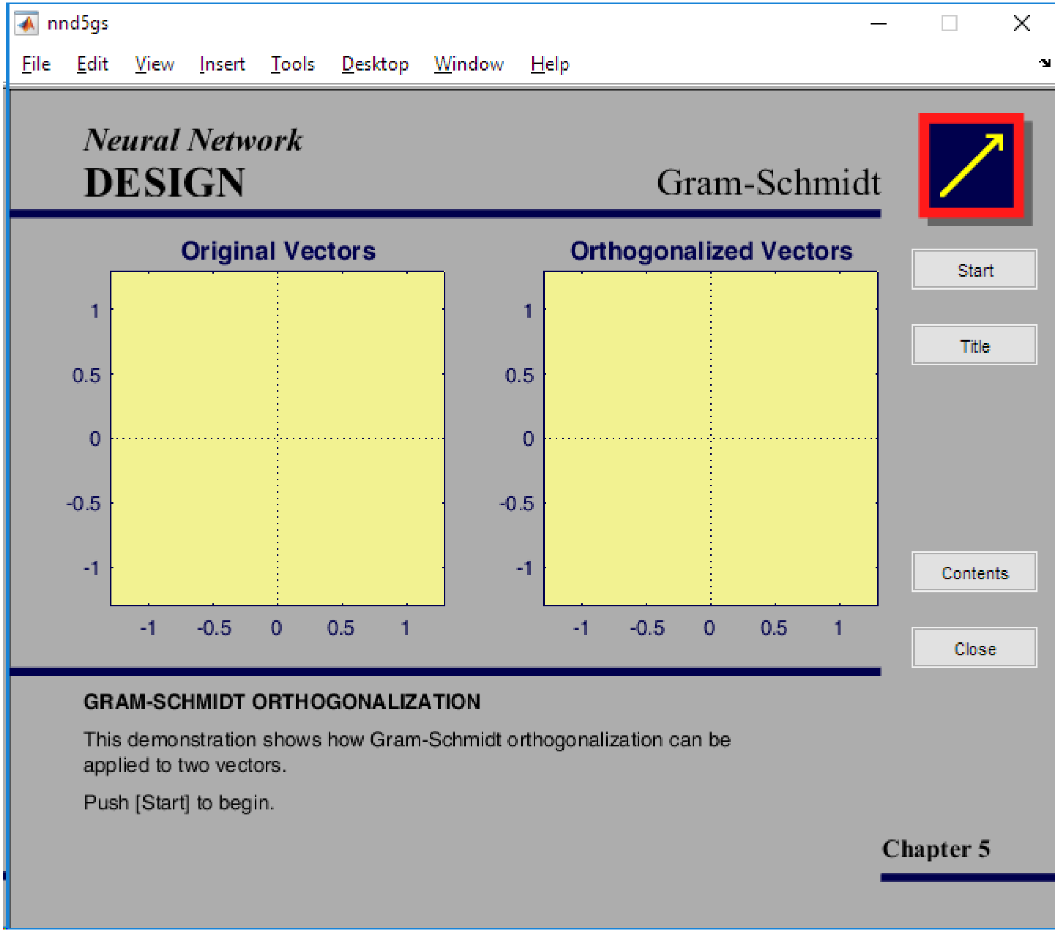


تعامد

مجموعه‌ی متعامد یکه

ORTHONORMAL SET

در یک مجموعه از بردارهای متعامد،
با تقسیم هر بردار بر نرم آن،
به یک مجموعه‌ی **متعامد یکه** می‌رسیم.



MATLAB

```
>> nnd5gs
```

فضاهای برداری وزن و سیگنال

۶

بسط برداری

Vector Expansion

If a vector space X has a basis set $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, then any $x \in X$ has a unique vector expansion:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n$$

If the basis vectors are **orthogonal**, and we take the inner product of v_j and x :

$$(V_j, X) = (V_j, \sum_{i=1}^{n} x_i V_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i (V_j, V_i) = x_j (V_j, V_j)$$

Therefore the coefficients of the expansion can be computed:

$$x_j = \frac{(V_j, X)}{(V_j, V_j)}$$

بسط برداری

VECTOR EXPANSION

با هر مجموعه‌ی پایه، هر بردار دارای یک بسط برداری یکتاست.

If a vector space X has a basis set $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, then any $x \in X$ has a unique vector expansion:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

If the basis vectors are **orthogonal**, and we take the inner product of v_j and x :

$$(v_j, x) = (v_j, \sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i (v_j, v_i) = x_j (v_j, v_j)$$

زیرا: $i \neq j \Rightarrow (v_i, v_j) = 0$

Therefore the coefficients of the expansion can be computed:

$$x_j = \frac{(v_j, x)}{(v_j, v_j)}$$

ضریب بسط برای v_j :

Column of Numbers

The vector expansion provides a meaning for writing a vector as a column of numbers.

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

To interpret **x**, we need to know what basis was used for the expansion.

نمایش بردار به‌صورت ستونی از اعداد

منطق

Column of Numbers

بسط برداری برای نوشتن بردار در قالب ستونی از اعداد معنا فراهم می‌کند.

The vector expansion provides a meaning for writing a vector as a column of numbers.

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

برای تفسیر **x** نیاز داریم بدانیم که از چه پایه‌ای برای بسط استفاده شده است.

To interpret **x**, we need to know what basis was used for the expansion.

Reciprocal Basis Vectors

Definition of reciprocal basis vectors, r_i:

$$(r_i, v_j) = 0 \qquad i \neq j$$
$$= 1 \qquad i = j$$

where the basis vectors are $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, and the reciprocal basis vectors are $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

For vectors in $\Re^n$ we can use the following inner product:

$$(r_i, v_j) = \mathbf{r}_i^T \mathbf{v}_j$$

Therefore, the equations for the reciprocal basis vectors become:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \ldots & \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

بردارهای پایه‌ی متقابل

RECIPROCAL BASIS VECTORS

هدف: بسط برداری در حالت کلی که مجموعه‌ی پایه متعامد نیست.

بردارهای پایه‌ی متقابل

Reciprocal Basis Vectors

Definition of reciprocal basis vectors, r_i:

$$(r_i, v_j) = 0 \qquad i \neq j$$
$$= 1 \qquad i = j$$

where the basis vectors are $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, and
the reciprocal basis vectors are $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. بردارهای پایه‌ی متقابل

For vectors in $\Re^n$ we can use the following inner product:

$$(r_i, v_j) = \mathbf{r}_i^T \mathbf{v}_j$$

Therefore, the equations for the reciprocal basis vectors become:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{B} = \mathbf{I} \Longrightarrow \mathbf{R}^T = \mathbf{B}^{-1}$$ نحوه‌ی محاسبه‌ی r_i ها:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \ldots & \mathbf{r}_n\end{bmatrix}$$

5

Vector Expansion

$$X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n$$

Take the inner product of the first reciprocal basis vector with the vector to be expanded:

$$(r_1, X) = x_1 (r_1, V_1) + x_2 (r_1, V_2) + \cdots + x_n (r_1, V_n)$$

By definition of the reciprocal basis vectors:

$$(r_1, V_2) = (r_1, V_3) = \cdots = (r_1, V_n) = 0$$

$$(r_1, V_1) = 1$$

Therefore, the first coefficient in the expansion is:

$$x_1 = (r_1, X)$$

In general, we then have (even for nonorthogonal basis vectors):

$$x_j = (r_j, X)$$

بسط برداری

با بردارهای پایه‌ی متقابل

Vector Expansion

$$X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n$$

Take the inner product of the first reciprocal basis vector with the vector to be expanded:

$$(r_1, X) = x_1 (r_1, V_1) + x_2 (r_1, V_2) + \cdots + x_n (r_1, V_n)$$

By definition of the reciprocal basis vectors:

$$(r_1, V_2) = (r_1, V_3) = \cdots = (r_1, V_n) = 0$$

$$(r_1, V_1) = 1$$

Therefore, the first coefficient in the expansion is:

$$x_1 = (r_1, X)$$

In general, we then have (even for nonorthogonal basis vectors):

$$x_j = (r_j, X)$$

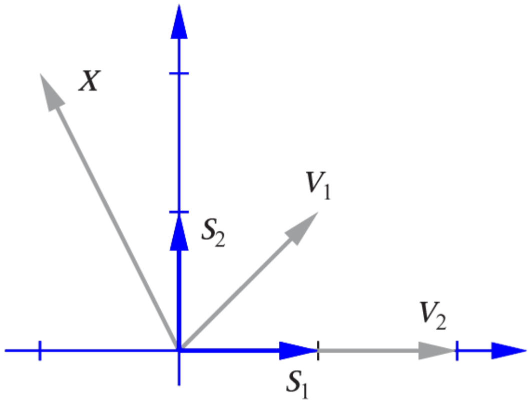
Example

Basis Vectors:

$$\mathbf{v}_1^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2^s = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector to Expand:

$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



بسط برداری

با بردارهای پایه‌ی متقابل: مثال (۱ از ۳)

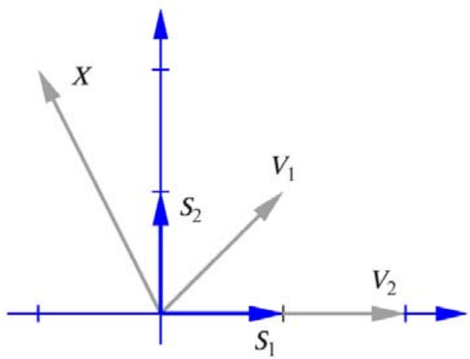
VECTOR EXPANSION

Basis Vectors:

$$\mathbf{v}_1^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2^s = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector to Expand:

$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



5

Example (Cont.)

Reciprocal Basis Vectors:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Expansion Coefficients:

$$x_1^v = \mathbf{r}_1^T \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$x_2^v = \mathbf{r}_2^T \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1.5$$

Matrix Form:

$$\mathbf{x}^v = \mathbf{R}^T \mathbf{x}^s = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

بسط برداری

با بردارهای پایه‌ی متقابل: مثال (۲ از ۳)

VECTOR EXPANSION

Reciprocal Basis Vectors:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Expansion Coefficients:

$$x_1^v = \mathbf{r}_1^T \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$x_2^v = \mathbf{r}_2^T \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1.5$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

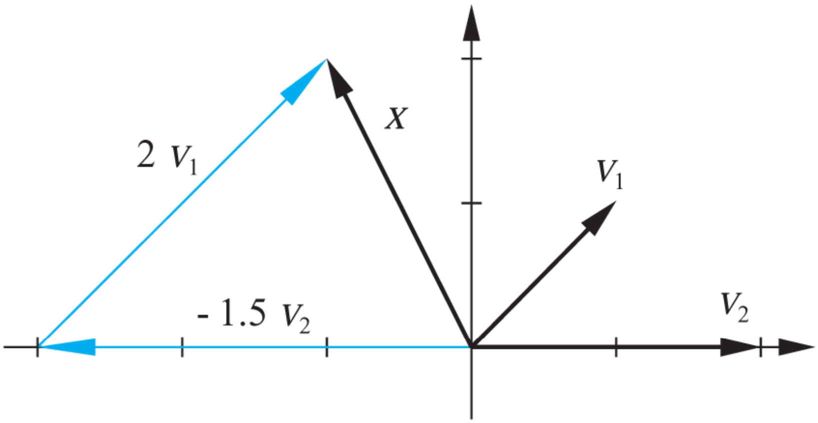
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matrix Form:

$$\mathbf{x}^v = \mathbf{R}^T \mathbf{x}^s = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Example (Cont.)

$$X = (-1)s_1 + 2s_2 = 2\ v_1 - 1.5\ v_2$$



$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

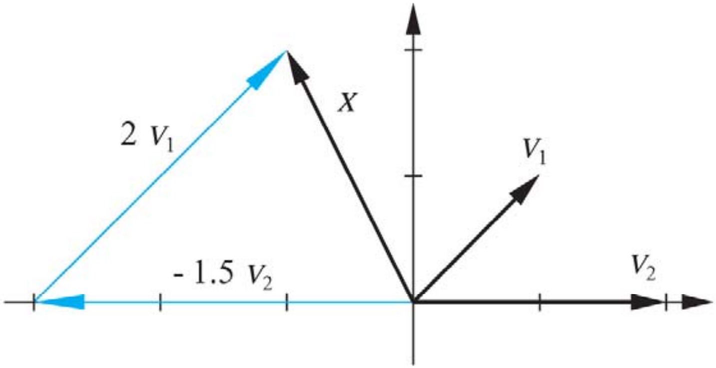
The interpretation of the column of numbers depends on the basis set used for the expansion.

بسط برداری

با بردارهای پایه‌ی متقابل: مثال (۳ از ۳)

VECTOR EXPANSION

$$X = (-1)s_1 + 2s_2 = 2\ V_1 - 1.5\ V_2$$

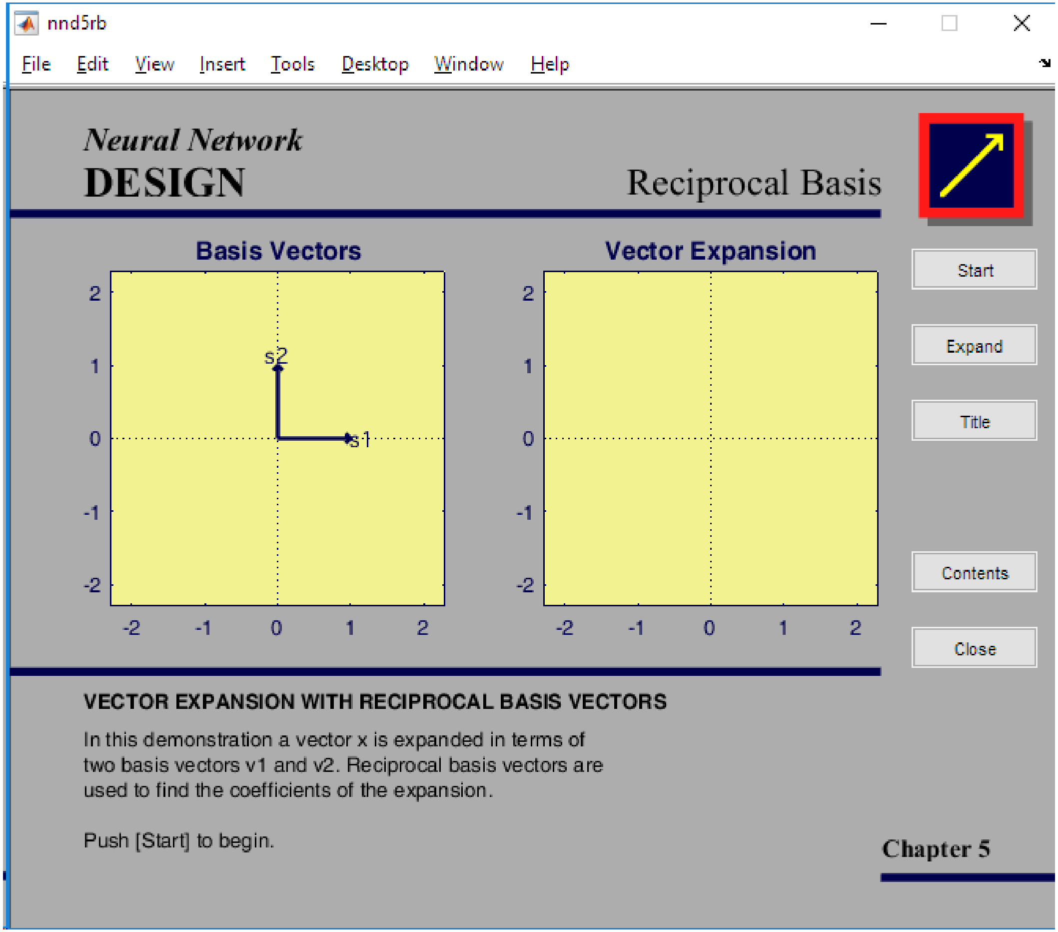


تغییر پایه:

$$\boxed{\mathbf{x}^v = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}^s}$$

$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

The interpretation of the column of numbers depends on the basis set used for the expansion.

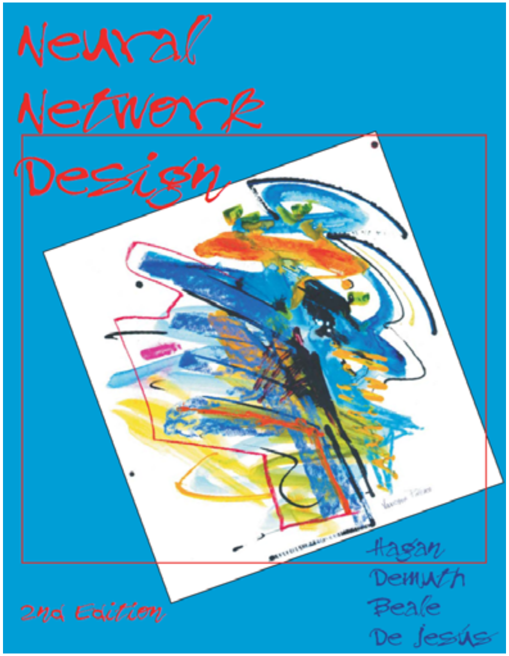

nnd5rb
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Neural Network
DESIGN
Reciprocal Basis
Basis Vectors
Vector Expansion
s2
s1
Start
Expand
Title
Contents
Close
VECTOR EXPANSION WITH RECIPROCAL BASIS VECTORS
In this demonstration a vector x is expanded in terms of two basis vectors v1 and v2. Reciprocal basis vectors are used to find the coefficients of the expansion.
Push [Start] to begin.
Chapter 5

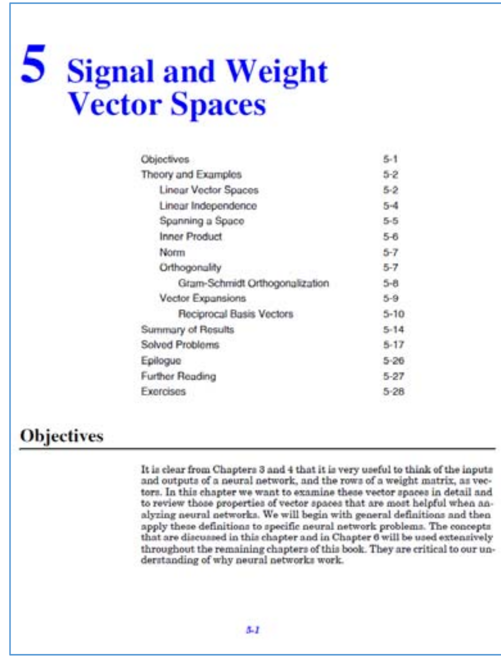
```
>> nnd5rb
```

۶

منابع

منبع اصلی





5 Signal and Weight Vector Spaces

Objectives

It is clear from Chapters 3 and 4 that it is very useful to think of the inputs and outputs of a neural network, and the rows of a weight matrix, as vectors. In this chapter we want to examine these vector spaces in detail and to review those properties of vector spaces that are most helpful when analyzing neural networks. We will begin with general definitions and then apply these definitions to specific neural network problems. The concepts that are discussed in this chapter and in Chapter 6 will be used extensively throughout the remaining chapters of this book. They are critical to our understanding of why neural networks work.

5-1

Martin T. Hagan, Howard B. Demuth, Mark H. Beale, Orlando De Jesus,
Neural Network Design,
2nd Edition, Martin Hagan, 2014.
Chapter 5

Online version can be downloaded from: http://hagan.okstate.edu/nnd.html