دانشگاه تهران
پردیس فارابی
دانشکده‌ی مهندسی

راه‌حل تکلیف شماره‌ی ۸

بخش هشتم

مذاکره و چانه‌زنی

NEGOTIATION AND BARGAINING

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

---

۱) موقعیت **مذاکره** زیر را بین دو عامل ۱ و ۲ در نظر بگیرید که بر روی یک مورد حقیقی-مقدار $x \in [۰, ۱]$ با توابع سودمندی

$$u_۱(x) = \frac{۱}{۲}x + ۵, \qquad u_۲(x) = ۱ - x$$

مذاکره می‌کنند.

(الف) از **پروتکل اعطای یکنوا (monotonic concession protocol)** با $\epsilon = ۰/۵$ استفاده کنید و توافق حاصل را محاسبه کنید. در حالتی که هر دو عامل در یک دور یکسان پذیرش پیشنهاد را انجام می‌دهند، توافق به‌صورت متوسط پیشنهادهای پذیرفته‌شده محاسبه می‌شود.

(ب) با استفاده از **استراتژی زئوثن (Zeuthen strategy)** کدام عامل باید در دور دوم بخشش (اعطا) کند؟ چرا؟ پیشنهاد جدید آن عامل چیست؟ چرا؟

پاسخ

(الف) مراحل را در جدول زیر نشان می‌دهیم:

round	Agent 1	Agent 2
1	Best offer $x = 1$, providing $u_1(1) = \frac{11}{2}$ and $u_2(1) = 0$ Send offer $x = 1$ to agent 2	Best offer $x = 0$, providing $u_2(0) = 1$ and $u_1(0) = 5$ Send offer $x = 0$ to agent 1
2	Receive offer $x = 0$, for which $u_1(0) = 5$ Reject the offer New offer x such that $u_2(x) = u_2(1) + \epsilon$, namely $x = \frac{1}{2}$ Send offer $x = 1/2$ to agent 2	Receive offer $x = 1$, for which $u_2(1) = 0$ Reject the offer New offer x such that $u_1(x) = u_1(0) + \epsilon$, namely $x = 1$ Send offer $x = 1$ to agent 1
3	Receive offer $x = 1$, for which $u_1(1) = \frac{11}{2}$ Accept the offer	Receive offer $x = \frac{1}{2}$, for which $u_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ Accept the offer

بنابراین، توافق بین ۱ و $\frac{۱}{۲}$ مثلاً در متوسط آنها یعنی $\frac{۳}{۴}$ رخ می‌دهد.

(ب) دور اول مشابه مورد فوق است، اما دور دوم تغییر می‌کند:

round	Agent 1	Agent 2
1	Best offer $x = 1$, providing $u_1(1) = \frac{11}{2}$ and $u_2(1) = 0$ Send offer $x = 1$ to agent 2	Best offer $x = 0$, providing $u_2(0) = 1$ and $u_1(0) = 5$ Send offer $x = 0$ to agent 1
2	Receive offer $x = 0$, for which $u_1(0) = 5$ Reject the offer $risk_1 = \frac{u_1(1) - u_1(0)}{u_1(1)} = \frac{\frac{11}{2} - 5}{\frac{11}{2}} = \frac{1}{11}$ $risk_2 = \frac{u_2(0) - u_2(1)}{u_2(0)} = \frac{1-0}{1} = 1$ Concede and offer x such that $\frac{u_1(x) - u_1(0)}{u_1(x)} \geq \frac{u_2(0) - u_2(x)}{u_2(0)}$ $\frac{\frac{1}{2}x + 5 - 5}{\frac{1}{2}x + 5} \geq \frac{1 - (1-x)}{1}$ $x \leq -10 \text{ or } -9 \leq x \leq 0$ Offer $x = 0$	Receive offer $x = 1$, for which $u_2(1) = 0$ Reject the offer $risk_1 = \frac{u_1(1) - u_1(0)}{u_1(1)} = \frac{\frac{11}{2} - 5}{\frac{11}{2}} = \frac{1}{11}$ $risk_2 = \frac{u_2(0) - u_2(1)}{u_2(0)} = \frac{1-0}{1} = 1$ Do not concede

۲) مسئله‌ی چانه‌زنی برای تقسیم یک منبع پیوسته با اندازه‌ی ۱ بین دو عامل را در نظر بگیرید. عامل ۱ تابع سودمندی $u_۱(x_۱) = x_۱$ و عامل ۲ تابع سودمندی $u_۲(x_۲) = ۲x_۲ - (x_۲)^۲$ را دارد که در آن $x_۱ + x_۲ = ۱$ و $x_۱, x_۲ \in [۰, ۱]$.

(الف) راه‌حل سودگرایانه (utilitarian solution) را بیابید.

(ب) با توجه به نتیجه‌ی قسمت قبل، در مورد راه‌حل مساوات‌گرا (egalitarian) چه می‌توان گفت؟

(ج) راه‌حل چانه‌زنی نش (Nash bargaining solution) را بیابید.

(د) فرض کنید که عامل‌ها از پروتکل اعطای یکنوا (monotonic concession protocol) برای یافتن یک توافق استفاده می‌کنند (با یک بخشایش کلی ϵ). دو پیشنهاد اول عامل ۱ به عامل ۲ و دو پیشنهاد اول عامل ۲ به عامل ۱ چیست؟ کدام عامل بیشتر می‌بخشاید؟ چرا؟

پاسخ

(الف) **راه‌حل سودگرایانه (utilitarian solution):**

$$\arg\max_{x_۱, x_۲}(u_۱ + u_۲), \qquad \text{subject to: } x_۱ + x_۲ = ۱$$

داریم:

$$\arg\max_{x_۲}(۱ - x_۲ + ۲x_۲ - (x_۲)^۲) = \arg\max_{x_۲}(۱ + x_۲ - (x_۲)^۲)$$
$$\frac{\partial}{\partial x_۲}(۱ + x_۲ - (x_۲)^۲) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین، راه‌حل سودگرایانه عبارت است از: $x_۱ = x_۲ = \frac{۱}{۲}$.

(ب) **راه‌حل مساوات‌گرا (egalitarian):**

$$\arg\max_{x_۱, x_۲}(u_۱ + u_۲), \qquad \text{subject to: } u_۱(x_۱) = u_۲(x_۲)$$

بر اساس راه‌حل سودگرایانه چیزی در مورد راه‌حل مساوات‌گرا چیزی نمی‌توان گفت، اما راه حل مساوات گرا را می‌توان از حل معادلات فوق به‌دست آورد.

(ج) **راه‌حل چانه‌زنی نش (Nash bargaining solution):**

$$\arg\max_{x_1,x_2}(u_1 \cdot u_2), \qquad \text{subject to: } x_1 + x_2 = 1$$

داریم:

$$\arg\max_{x_2}((1-x_2)(2x_2-(x_2)^2)) = \arg\max_{x_2}(2x_2 - 3(x_2)^2 + (x_2)^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(2x_2 - 3(x_2)^2 + (x_2)^3) = 0 \Rightarrow 2 - 6x_2 + 3(x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

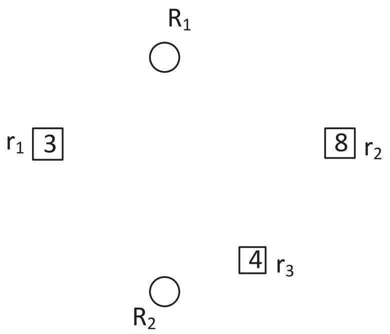
راه‌حل دیگر $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ بزرگ‌تر از ۱ است و نادیده گرفته می‌شود. پس راه‌حل چانه‌زنی نش می‌شود: $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(د) **پروتکل اعطای یکنوا (monotonic concession protocol):**

- در ابتدا عامل ۱ گزینه‌ی $x_1 = 0$ (یعنی $x_2 = 0$) را به عامل ۲ پیشنهاد می‌دهد، سپس x_1 را به‌گونه‌ای پیشنهاد می‌دهد که $2(1-x_1) - (1-x_1)^2 = \epsilon$، یعنی $x_1 = \sqrt{1-\epsilon}$ (و $x_2 = 1 - \sqrt{1-\epsilon}$).
- در ابتدا عامل ۲ گزینه‌ی $x_2 = 1$ (یعنی $x_1 = 0$) را به عامل ۱ پیشنهاد می‌دهد، سپس x_2 را به‌گونه‌ای پیشنهاد می‌دهد که $1 - x_2 = \epsilon$، یعنی $x_2 = 1 - \epsilon$ (و $x_1 = \epsilon$).
- عامل ۲ بخشایش بیشتری انجام می‌دهد، زیرا $\sqrt{1-\epsilon} > 1 - \epsilon$.

---

۳) دو مریخ‌نورد R_1 و R_2 که بر روی سطح سیاره‌ی مریخ کار می‌کنند، برای تخصیص وظیفه‌های آنالیز سنگ‌ها وارد مذاکره می‌شوند. سه نوع سنگ r_1، r_2 و r_3 وجود دارد. ربات‌ها (دایره‌ها) و سنگ‌ها (مربع‌ها) در شکل زیر ترسیم شده‌اند (اعداد داخل مربع‌ها هزینه‌ی انجام وظیفه‌های متناظر هستند.):



فرض کنید که هزینه‌ی تحلیل تعداد سنگ بیشتر، مجموع هزینه‌های آنالیز تک تک سنگ‌ها باشد. همچنین فرض کنید که همه‌ی سنگ‌ها باید آنالیز شوند و اینکه یک سنگ باید توسط یک ربات تنها آنالیز شود.

(الف) سناریوی فوق را به‌صورت یک دامنه‌ی وظیفه‌محور (TOD) تعریف کنید و سه‌مؤلفه‌ی سازنده‌ی آن، یعنی مجموعه‌ی عامل‌ها، مجموعه‌ی وظیفه‌ها و تابع هزینه را مشخص کنید.

(ب) یک معامله (deal) برای سناریوی فوق چیست؟ مجموعه‌ی معامله‌های ممکن تا چه‌اندازه بزرگ است؟

(ج) مواجهه‌ی آغازین $d = \langle\{r_1, r_2\}, \{r_3\}\rangle$ داده شده است. سودمندی معامله‌ی $d' = \langle\{r_1\}, \{r_2, r_3\}\rangle$ برای این دو عامل چیست؟

(د) مفهوم غلبه (dominance) بین دو معامله را تعریف کنید. برای سناریوی فوق، معامله‌های مغلوب (dominated) کدام‌ها هستند؟

(هـ) برای سناریوی فوق، کدام معامله‌ها بهینه‌ی پارتو (Pareto optimal) هستند؟

(و) برای سناریوی فوق، کدام معامله‌ها «به‌طور انفرادی رسیونال» نیستند؟

پاسخ

(الف) یک دامنه‌ی وظیفه‌محور با یک سه‌تایی $d = \langle T, Ag, c\rangle$ تعریف می‌شود که در آن $T = \{r_۱, r_۲, r_۳\}$ مجموعه‌ی وظیفه‌ها، $Ag = \{R_۱, R_۲\}$ مجموعه‌ی عامل‌ها و c تابع هزینه است که به‌صورت

$$c(S) = \sum_{r\in S} cost(r)$$

محاسبه می‌شود که در آن S زیرمجموعه‌ای از T و $cost$ هزینه‌ی آنالیز سنگ r است.

(ب) یک معامله‌ی $d = \langle D_۱, D_۲\rangle$ یک تخصیص از وظیفه‌های T به دو مریخ‌نورد است. معامله‌های ممکن ۸ مورد هستند و عبارتند از:

$$\langle\{\}, \{r_۱, r_۲, r_۳\}\rangle, \langle\{r_۱\}, \{r_۲, r_۳\}\rangle, \langle\{r_۲\}, \{r_۱, r_۳\}\rangle, \langle\{r_۳\}, \{r_۱, r_۲\}\rangle,$$
$$\langle\{r_۱, r_۲\}, \{r_۳\}\rangle, \langle\{r_۱, r_۳\}, \{r_۲\}\rangle, \langle\{r_۲, r_۳\}, \{r_۱\}\rangle, \langle\{r_۱, r_۲, r_۳\}, \{\}\rangle.$$

(ج) داریم:

$$u_۱(d') = c(\{r_۱, r_۲\}) - c(\{r_۱\}) = ۱۱ - ۳ = ۸,$$
$$u_۲(d') = c(\{r_۳\}) - c(\{r_۲, r_۳\}) = ۴ - ۱۲ = -۸.$$

(د) می‌گوییم معامله‌ی $\delta_۱$ بر معامله‌ی $\delta_۲$ غلبه می‌کند و می‌نویسیم $\delta_۱ \succ \delta_۲$ اگر و فقط اگر داشته باشیم:

- معامله‌ی $\delta_۱$ برای همه‌ی عامل‌ها حداقل به‌خوبی معامله‌ی $\delta_۲$ باشد:

$$\forall i \in Ag \qquad u_i(\delta_۱) \geq u_i(\delta_۲).$$

- معامله‌ی $\delta_۱$ برای بعضی عامل‌ها بهتر از معامله‌ی $\delta_۲$ باشد:

$$\exists i \in Ag \qquad u_i(\delta_۱) > u_i(\delta_۲).$$

با این تعریف و با در نظر گرفتن تابع هزینه تعریف شده در بالا، هیچ معامله‌ی مغلوبی وجود ندارد، زیرا کاهش در $u_۱$ متناظر با افزایش در $u_۲$ است و برعکس.

(ه) معامله‌ای که توسط هیچ معامله‌ی دیگری مغلوب نشود، بهینه‌ی پارتو است. از آنجا که هیچ معامله‌ای در اینجا مغلوب نیست، مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتو همان مجموعه‌ی معامله‌های ممکن است.

(و) هیچ معامله‌ای رسیونال انفرادی نیست (غیر از مواجهه‌ی آغازین d)، زیرا کاهش در $u_۱$ متناظر با افزایش در $u_۲$ است و برعکس؛ بنابراین، جابجایی از مواجهه‌ی آغازین برای یکی از این دو عامل غیر رسیونال می‌شود.

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Fall 2018 (۱۰ دی ۱۳۹۷)