



راه حل تکلیف شماره‌ی ۷

پخش هفتم

حراج

AUCTION

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

۱) یک حراج برای یک قلم کالا با ارزش خصوصی حاوی چهار عامل پیشنهاددهنده (bidder) (۱، ۲، ۳، ۴) است. ارزش‌گذاری این عامل‌ها برای این کالا به ترتیب به صورت $r_1 = 1^\circ$ ، $r_2 = 3^\circ$ ، $r_3 = 2^\circ$ و $r_4 = 15^\circ$ است (در این مورد، ارزش‌گذاری‌ها با قیمت‌های رزرو تلافی کرده است).

(الف) فرض کنید عامل‌ها ارزش‌گذاری سایر عامل‌ها را نمی‌دانند. با داشتن اطلاعات موجود، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که کدام عامل با هر یک از روش‌های حراج استاندارد زیر می‌برد و باید با هر کدام چه میزان پرداخت کند؟

- حراج انگلیسی (English Auction)

- حراج هلندی (Dutch Auction)

- حراج نخستین قیمت، ارزش مخفی (First-Price Sealed-Bid)

- حراج ویکری (Vickrey Auction)

(ب) فرض می‌کنیم عامل ۲ (و فقط همان) ارزش‌گذاری سایر عامل‌ها را بداند. عامل ۲ در هر یک از حراج‌های استاندارد فوق چگونه باید بازی کند؟

پاسخ

(الف) حراج انگلیسی (English Auction)

برنده عامل ۲ خواهد بود و مقدار 2° یا چیزی بیشتر از 2° را خواهد پرداخت.

(Dutch Auction) حراج هلندی

بدون دانستن استراتژی‌های عامل‌ها، نمی‌توان برنده را پیش‌بینی کرد.

(First-Price Sealed-Bid) حراج نخستین قیمت، ارزش مخفی

بدون دانستن استراتژی‌های عامل‌ها، نمی‌توان برنده را پیش‌بینی کرد.

(Vickrey Auction) حراج ویکری

برنده عامل ۲ خواهد بود و دقیقاً مقدار 2° (دومین پیشنهاد بهتر) را خواهد پرداخت.

(ب) حراج انگلیسی (English Auction)

اگر با توجه به قواعد حراج ممکن باشد، عامل ۲ باید بلافاصله مقدار 2° را پیشنهاد بدهد که منجر به برنده شدن عامل ۲ و پرداخت مقدار 2° می‌شود. در غیر این صورت، عامل ۲ برنده می‌شود اما مشابه مورد قبلی، باید مقدار 2° یا چیزی بیشتر از 2° را بپردازد.

(Dutch Auction) حراج هلندی

عامل ۲ باید صبر کند تا قیمت اندکی بیشتر از 2° شود و سپس حراج را متوقف کند، که منجر به برنده شدن عامل ۲ و پرداخت چیزی بیشتر از 2° می‌شود.

(First-Price Sealed-Bid) حراج نخستین قیمت، ارزش مخفی

عامل ۲ باید قیمتی را پیشنهاد بدهد که کمی بزرگ‌تر از 2° باشد، که منجر به برنده شدن عامل ۲ و پرداخت چیزی بیشتر از 2° می‌شود.

• حراج ویکری

(Vickrey Auction)

عامل ۲ باید مانند مورد قبلی مقدار ۳۰ را پیشنهاد بدهد که منجر می‌شود به اینکه عامل ۲ برنده شود و دقیقاً مقدار ۲۰ (دومین پیشنهاد بهتر) را بردارد.

۲) فرض می‌کنیم دو عامل (۱ و ۲) وجود دارد که ارزش‌گذاری آنها برای یک کالا در حراج v_1, v_2 از یک توزیع یکنواخت از بازه $[0, 1]$ بیرون کشیده می‌شود. سودمندی عامل i اگر b_i را پیشنهاد بدهد و ببرد، $u_i = v_i - b_i$ است. فرض کنید استراتژی پیشنهاد عامل ۲، $b_2(v_2) = v_2/2$ باشد. عامل ۱ چگونه باید پیشنهاد بدهد؟ (یعنی $b_1(v_1) = z$ چه باید باشد؟)

پاسخ

وقتی داریم $b_2(v_2) = v_2/2$ عامل ۱ در صورتی برنده می‌شود که $v_2 < 2z$ پس

$$u_1 = \int_{z'=0}^{2z} (v_1 - z') dz' = \left(v_1 z' - \frac{1}{2} z'^2 \right) \Big|_{z'=0}^{2z} = 2zv_1 - 2z^2$$

هدف ماکزیم‌سازی سودمندی عامل ۱، یعنی u_1 است:

$$\arg \max_z [2zv_1 - 2z^2]$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial}{\partial z} (2zv_1 - 2z^2) = 0 \Rightarrow 2v_1 - 4z = 0 \Rightarrow z = \frac{v_1}{2}$$

پس

$$\arg \max_z [2zv_1 - 2z^2] = \frac{v_1}{2}$$

پس عامل ۱ باید نصف ارزش‌گذاری واقعی خودش پیشنهاد بدهد (مانند عامل ۲).

۳) یک حراج ترکیبیاتی را با پنج قلم کالای $\{A, B, C, D, E\}$ در نظر بگیرید که در آن برگزارکننده‌ی حراج پیشنهادهای زیر را دریافت می‌کند:

items	bid
{C}	۳
{D}	۴
{B, D}	۵
{B, E}	۷
{A, B, C}	۵
{A, C, D}	۷
{A, B, C, E}	۹

هدف تخصیص بهینه‌ی کالاها به عامل‌هاست. برای هر حالت، مقدار هیوریستیک مورد استفاده در الگوریتم جستجوی شاخه و کران (Branch-and-Bound Search) را محاسبه کنید. این الگوریتم را اجرا کنید و درخت جستجو را رسم کنید. مشخص کنید که کدام بخش‌های درخت جستجو هرس می‌شود. اگر در مرحله‌ای از جستجو همه چیز یکسان بود، ترتیب الفبایی پیشنهادها را انتخاب کنید.

پاسخ

مقادیر تابع هیوریستیک برای هر یک از کالاها عبارت است از:

$$h_A = \max \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4} \right\} = \frac{7}{3}$$

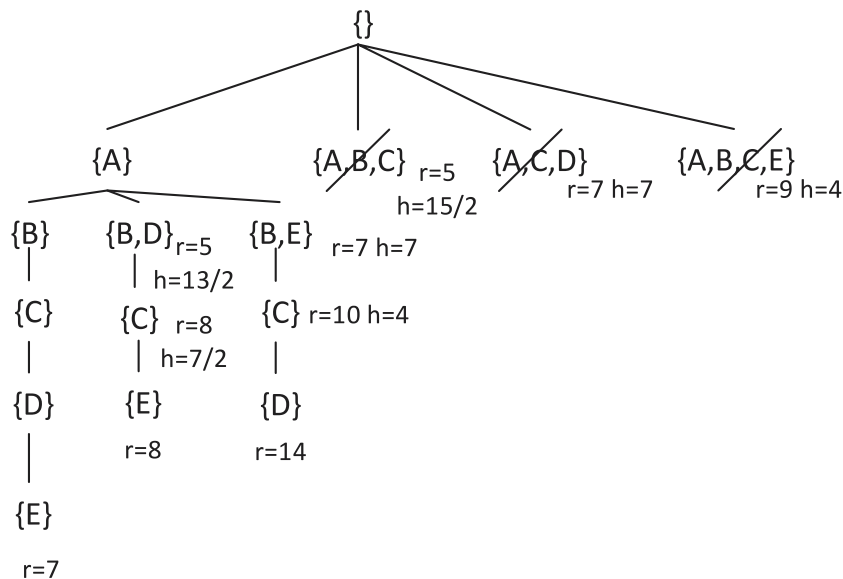
$$h_B = \max \left\{ \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4} \right\} = \frac{7}{2}$$

$$h_C = \max \left\{ \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4} \right\} = 3$$

$$h_D = \max \left\{ \frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3} \right\} = 4$$

$$h_E = \max \left\{ \frac{7}{2}, \frac{9}{4} \right\} = \frac{7}{2}$$

درخت جستجوی حاصل از روش شاخه و کران به صورت زیر است:



بنابراین، مجموعه‌ی بهینه‌ی پیشنهادها عبارت است از:

$$\{A\}, \{B, E\}, \{C\}, \{D\}.$$