هوالحکیم

سیستم‌های چندعاملی
نیمسال اول ۹۸-۱۳۹۷
http://courses.fouladi.ir/mas

دانشگاه تهران
پردیس فارابی
دانشکده‌ی مهندسی

راه‌حل تکلیف شماره‌ی ۶
بخش ششم

رأی‌دهی
Voting

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

۱) یک سیستم رأی‌دهی (voting system) S سازگار (consistent) است هرگاه:

- مجموعه‌ی عامل‌های رأی‌دهنده Ag به‌طور دلخواه به دو زیرمجموعه‌ی مجزا تقسیم شود، و
- انتخابات‌های جداگانه انجام شده توسط S در هر زیرمجموعه، منجر به برنده‌ی یکسانی شود،

آن‌گاه انتخاب انجام‌شده توسط S روی کل Ag نیز برنده‌ی یکسانی را انتخاب کند.

(الف) آیا **پروتکل اکثریت (plurality)** سازگار است؟

(ب) آیا **پروتکل بوردا (Borda)** سازگار است؟

پاسخ خود را توجیه کنید.

پاسخ

(الف) بله. اگر مجموعه‌ی Ag به دو زیرمجموعه‌ی $Ag_۱$ و $Ag_۲$ شکسته شود که به ترتیب از $n_۱$ و $n_۲$ عامل تشکیل شده است و کاندیدای w در هر دو زیرمجموعه با $n_{۱w}$ و $n_{۲w}$ رأی برنده شود، آن‌گاه w با $n_{۱w}+n_{۲w}$ رأی در Ag برنده می‌شود (این بدیهی است زیرا رأی‌دهی اکثریت (plurality) است). هر کاندیدای دیگر c می‌تواند $n_{۱c}+n_{۲c}$ رأی در Ag کسب کند که در آن

$$n_{۱c} < n_{۱w}, \qquad n_{۲c} < n_{۲w}$$

(برای w که برنده‌ی هر دو زیرمجموعه با رأی‌دهی اکثریت (plurality) است). بنابراین c نمی‌تواند در Ag برنده شود، زیرا

$$n_{۱c}+n_{۲c} < n_{۱w}+n_{۲w}.$$

(ب) بله. استدلال مشابه مورد فوق است، فقط به‌جای تعداد رأی‌ها، نمره‌های هر کاندیدا را در نظر می‌گیریم.

■

۲) سیستم رأی‌دهی نانسون (Nanson) را در نظر بگیرید که شکل تغییریافته‌ای از پروتکل شمارش بوردا است. روش نانسون تکراری (iterative) است و در هر گام کاندیدای با کمترین امتیاز بوردا حذف می‌شود. سپس امتیازهای بوردا برای کاندیداهای باقیمانده مجدد محاسبه می‌شوند؛ و این کار تا باقی ماندن یک کاندیدا تکرار می‌شود.

(الف) سیستم رأی‌دهی نانسون را در موقعیتی که ۹ عامل و ۳ کاندیدا a, b, c با ترجیحات زیر وجود دارد، به‌کار ببرید:

- ۳ عامل با ترجیحات $a \succ b \succ b$
- ۲ عامل با ترجیحات $a \succ c \succ b$
- ۴ عامل با ترجیحات $b \succ c \succ a$

برنده کیست؟

(ب) آیا سیستم رأی‌دهی نانسون، برنده‌ی کاندورست (condorcet winner) را در مثال فوق انتخاب می‌کند؟ چرا؟

پاسخ

(الف) در گام اول، سه کاندیدای a، b و c را داریم:

$$\text{candidate } a \text{ score:} \quad ۳ \times ۳ + ۳ \times ۲ + ۱ \times ۴ = ۱۹$$
$$\text{candidate } b \text{ score:} \quad ۲ \times ۳ + ۱ \times ۲ + ۳ \times ۴ = ۲۰$$
$$\text{candidate } c \text{ score:} \quad ۱ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۲ \times ۴ = ۱۵$$

بنابراین، کاندیدای c حذف می‌شود.
در گام دوم با دو کاندیدای a و b داریم:

$$\text{candidate } a \text{ score:} \quad ۲ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۱ \times ۴ = ۱۴$$
$$\text{candidate } b \text{ score:} \quad ۱ \times ۳ + ۱ \times ۲ + ۲ \times ۴ = ۱۳$$

بنابراین، کاندیدای a برنده می‌شود.

(ب) برنده‌ی کاندورست این مثال، کاندیدای a است. زیرا a در مقابل b (۵ در برابر ۴) و در مقابل c (۵ در برابر ۴) برنده می‌شود.
بنابراین، سیستم رأی‌دهی نانسون، واقعاً برنده‌ی کاندورست را را انتخاب می‌کند.

۳) یک مکانیسم رأی‌دهی، مجموعه‌ی برآمدها Ω (کاندیداها)، مجموعه‌ای از روابط ترجیح $\succ_i$ (هر یک برای یک عامل i)، داده شده است. فرض می‌کنیم مکانیسم رأی‌دهی برآمد $\omega \in \Omega$ را به‌عنوان برنده برمی‌گرداند.
حال یک مجموعه رابطه‌ی ترجیح جدید را $\succ'_i$ را در نظر می‌گیریم که برای هر عامل i و برای هر $\omega' \in \Omega$ داریم $\omega \succ'_i \omega'$ اگر $\omega \succ_i \omega'$. اگر مکانیسم رأی‌دهی همان برآمد ω را هم توسط $\succ_i$ و هم $\succ'_i$ به‌عنوان برنده برگرداند، آنگاه گفته می‌شود که مکانیسم یکنوا (monotonic) است. آیا مکانیسم رأی‌دهی اکثریت (plurality) یکنوا است؟ اگر پاسخ مثبت است، برای آن اثبات ارائه بدهید، در غیر این صورت یک مثال نقض بزنید.

پاسخ

مکانیسم رأی‌دهی اکثریت (plurality) یکنوا نیست.
یک مثال نقض به صورت زیر است.
مجموعه‌ای از برآمدها $O = \{a, b, c\}$ و مجموعه‌ی نخست از روابط ترجیح را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

۳ عامل: $a \succ b \succ c$
۲ عامل: $b \succ c \succ a$
۲ عامل: $c \succ b \succ a$

برنده، برآمد a است.
حال دومین مجموعه از روابط ترجیح را در نظر بگیرید:

۳ عامل: $a \succ' b \succ' c$
۲ عامل: $b \succ' c \succ' a$
۲ عامل: $b \succ' a \succ' c$

(توجه کنید که برای هر عامل i و برای هر برآمد $o' \in O$ داریم $a \succ'_i o'$ اگر $a \succ_i o'$).
اکنون برنده برآمد b است.