



## راه حل تکلیف شماره‌ی ۵

بخش پنجم

## دانایی مشترک عامل‌ها

COMMON KNOWLEDGE OF AGENTS

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

(۱) موقعیت زیر را با توجه به دانایی مشترک (common knowledge) در نظر بگیرید. دنیا می‌تواند در یکی از ۱۲ حالت  $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  قرار داشته باشد. سه عامل وجود دارد ( $Ag = \{A_1, A_2, A_3\}$ ): عامل  $A_1$  می‌تواند حالت‌های فرد را از حالت‌های زوج تمییز دهد؛ عامل  $A_2$  می‌تواند حالت‌ها را جفت تمییز دهد (۱ و ۲ می‌تواند از ۳ و ۴ متمایز شود، از ۵ و ۶، و به همین ترتیب)؛ در حالی که عامل  $A_3$  می‌تواند حالت‌ها را سه‌تا سه‌تا تمییز دهد (۱، ۲ و ۳ می‌تواند از ۴، ۵ و ۶ متمایز شود، از ۷، ۸ و ۹، و به همین ترتیب).

(الف) افرازهای که توسط توابع ادراک این سه عامل روی  $S$  القا می‌شود را بنویسید.

حال، پیشامدهای  $E_1 = \{1, 2, 3\}$  و  $E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$  را در نظر بگیرید و فرض کنید که حالت واقعی دنیا  $s = 1$  باشد.

(ب) کدام عامل‌ها پیشامدهای  $E_1$  و  $E_2$  را می‌دانند؟

(ج) آیا پیشامدهای  $E_1$  و  $E_2$  برای همه‌ی عامل‌ها خودگواه (self-evident) هستند؟

(د) کوچک‌ترین پیشامد (یعنی، پیشامد با می‌نیم‌کاردینالیت) که دانایی مشترک میان  $A_2$  و  $A_3$  است، چیست؟ میان هر سه عامل، چه‌طور؟

پاسخ

(الف) داریم

$$P_{A_1} = \{\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}\}$$

$$P_{A_2} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{11, 12\}\}$$

$$P_{A_3} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}\}$$

(ب) هیچ‌یک از پیشامدهای  $E_1$  یا  $E_2$  برای عامل  $A_1$  معلوم نیستند.

هر دو پیشامدهای  $E_1$  و  $E_2$  برای عامل  $A_2$  معلوم هستند، زیرا

$$\{1, 2\} \subseteq E_1, \quad \{1, 2\} \subseteq E_2.$$

هر دو پیشامدهای  $E_1$  و  $E_2$  برای عامل  $A_3$  معلوم هستند، زیرا

$$\{1, 2, 3\} \subseteq E_1, \quad \{1, 2, 3\} \subseteq E_2.$$

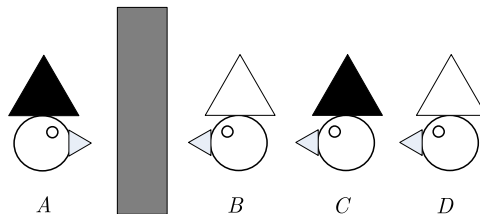
(ج) هیچ‌یک از پیشامدهای  $E_1$  یا  $E_2$  برای عامل  $A_1$  خودگواه نیستند.

تنها پیشامد  $E_2$  برای عامل  $A_2$  خودگواه است، زیرا  $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = E_2$ .

تنها پیشامد  $E_1$  برای عامل  $A_3$  خودگواه است، زیرا  $\{1, 2, 3\} = E_1$ .

(د) پیشامد  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  دانایی مشترک بین  $A_2$  و  $A_3$  است و کوچک‌ترین پیشامدی است که چنین خاصیتی دارد.  
پیشامد  $E' = \{1, 2, 3, \dots, 12\} = S$  دانایی مشترک بین سه عامل است و کوچک‌ترین پیشامدی است که چنین خاصیتی دارد.

(۲) موقعیت زیر را برای چهار عامل  $A, B, C, D$  در نظر بگیرید.



این عامل‌ها کلاه‌هایی را بر سر دارند (که می‌تواند سیاه یا سفید باشد). هر عامل رنگ کلاه خودش را نمی‌داند، اما می‌تواند با نگاه کردن به روبه‌رو، رنگ کلاه عامل‌هایی که آنها را می‌بیند را مشاهده کند. برای مثال، عامل  $D$  می‌تواند رنگ کلاه عامل‌های  $B$  و  $C$  را ببیند. عامل‌ها نمی‌توانند پشت دیوار را ببینند. برای مثال، عامل  $A$  نمی‌تواند رنگ کلاه سایر عامل‌ها را مشاهده کند. این یک دانایی مشترک است که (۱) چهار عامل وجود دارد، (۲) کلاه‌ها سفید یا سیاه هستند، (۳) عامل‌ها به ترتیب نشان داده شده در شکل فوق قرار گرفته‌اند (شامل دیوار)، و (۴) دو کلاه سیاه و دو کلاه سفید است.

(الف) مجموعه‌ی  $S$  از حالت‌های ممکن دنیا را بنویسید.

(ب) افزایش‌های  $\wp_A, \wp_B, \wp_C, \wp_D$  که توسط توابع ادراک این چهار عامل بر روی  $S$  القا می‌شود را بنویسید.

(ج) حال فرض کنید که یک ناظر بیرونی، از عامل  $D$  می‌پرسد که آیا او رنگ کلاهش را می‌داند یا خیر. پاسخ عامل  $D$  چیست و چرا؟

(د) پس از اینکه همه‌ی عامل‌ها پاسخ عامل  $D$  را شنیدند، ناظر از عامل  $C$  می‌پرسد که آیا او رنگ کلاهش را می‌داند یا خیر. پاسخ عامل  $C$  (که از طریق تفکر تعاملی (interactive thinking) حاصل شده است) چیست و چرا؟

### پاسخ

(الف) حالت‌های ممکن دنیا، ترکیبات ممکن رنگ‌ها برای کلاه‌های چهار عامل است:

$$S = \{(bbbb), (bbbw), (bbwb), (bwbb), (wbbb), (bbbw), (bwbw), (bwwb), (wwbb), (wbwb), (wbbw), (bwww), (wbww), (wwbw), (wwww)\}.$$

(ب) عامل  $A$  نمی‌تواند کلاه هیچ کس دیگری را ببیند، پس  $\wp_A = \{S\}$ .  
عامل  $B$  هم نمی‌تواند کلاه هیچ کس دیگری را ببیند، پس  $\wp_B = \{S\}$ .  
عامل  $C$  می‌تواند رنگ کلاه عامل  $B$  را ببیند، بنابراین

$$\wp_C = \{(bbbb), (bbbw), (bbwb), (wbbb), (bbbw), (wbwb), (wbbw), (bwbw)\}, \\ \{(bwbb), (bwbw), (bwrw), (wwbb), (bwww), (wbww), (wwbw), (wwww)\}.$$

عامل  $D$  می‌تواند رنگ کلاه عامل‌های  $B$  و  $C$  را ببیند، بنابراین

$$\wp_D = \{(bbbb), (bbbw), (wbbb), (wbbw)\}, \{(bbwb), (bbww), (wbwb), (wbww)\}, \\ \{(bwbb), (bwbw), (wbbw), (wbbw)\}, \{(bwbb), (bwww), (wwbw), (wwww)\}.$$

(ج) عامل  $D$  پاسخ «خیر» می‌دهد، زیرا ترکیب آنچه می‌بیند (حالت‌های ممکن دنیا به صورت سیاه نوشته شده‌اند) و آنچه این عامل به عنوان «دانایی مشترک» می‌داند (حالت‌های ممکن دنیا به صورت زیرخط‌دار نوشته شده‌اند)، عبارت است از:

$$\wp_D = \{ \{ (bbbb), (bbbw), (wbbb), (wbbw) \}, \{ (bbwb), (\underline{bbww}), (wbwb), (wbww) \}, \\ \{ (\underline{bwbb}), (\underline{bwbw}), (\underline{wwbb}), (wwbw) \}, \{ (\underline{bwwb}), (bwww), (wwwb), (wwww) \} \}.$$

عامل  $D$  نمی‌تواند بین حالت‌های  $(wbwb)$  و  $(wbbb)$  تمایز قائل شود.

(د) عامل  $C$  پاسخ «بله» می‌دهد، زیرا با توجه به آنچه می‌بیند (حالت‌های ممکن دنیا به صورت سیاه نوشته شده‌اند)، آنچه به عنوان دانایی مشترک اولیه می‌داند (حالت‌های ممکن دنیا به صورت زیرخط‌دار نوشته شده‌اند) و آنچه پس از پاسخ عامل  $D$  دانسته است (حالت‌های ممکن دنیا داخل چهارگوش نوشته شده‌اند)، نمی‌تواند بین حالت‌های واقعی دنیا تمایز قائل شود، اما در هر دو حالتی که فکر می‌کند ممکن هستند، یعنی

$$((bwbw), (wbbb))$$

رنگ کلاه او سیاه است:

$$\wp_C = \{ \{ (bbbb), (bbbw), (bbwb), (wbbb), (bbww), (wbwb), (wbbw), (wbww) \}, \\ \{ (\underline{bwbb}), (\underline{bwbw}), (\underline{bwwb}), (\underline{wwbb}), (\underline{bwww}), (\underline{wwwb}), (\underline{wwwb}), (\underline{wwww}) \} \}.$$

