



راه حل تکلیف شماره‌ی ۴

بخش چهارم

تشکیل ائتلاف عامل‌ها

COALITION FORMATION OF AGENTS

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

۱) یک بازی ائتلافی تعریف شده با تابع مشخصه‌ی زیر را برای $n = 3$ عامل در نظر بگیرید:

| S | $v(S)$ |
|---------------|---------|
| $\{1\}$ | ۴ |
| $\{2\}$ | ۲ |
| $\{3\}$ | ۵ |
| $\{1, 2\}$ | ۷ |
| $\{1, 3\}$ | x |
| $\{2, 3\}$ | $x + 2$ |
| $\{1, 2, 3\}$ | ۲۰ |

که در آن x یک عدد حقیقی است.(الف) بازه‌ی مقادیر x که برای آن این بازی ابرجمع‌پذیر (super-additive) باشد را بیابید. (منظور از ابرجمع‌پذیری این است کهبرای هر دو زیرمجموعه‌ی مجزای S_1 و S_2 از عامل‌ها، داشته باشیم $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$.)

(ب) فرض کنید که عامل‌ها یک ائتلاف بزرگ (grand coalition) تشکیل می‌دهند. ارزش‌های شپلی (Shapley values)

را برای عامل‌ها محاسبه کنید (وابسته به متغیر x).(ج) بازه‌ی مقادیری از x را بیابید (زیربازه‌ای از بازه‌ی پیدا شده در بخش (الف) این تمرین) که برای آن برآمد (بردار پی‌آف‌ها)

تشکیل شده توسط ارزش‌های شپلی در مغز بازی (core) باشد.

پاسخ

بر اساس تعریف بازی ابرجمع‌پذیر:

(الف) باید داشته باشیم

$$x \geq 4 + 5, \quad x + 2 \geq 2 + 5, \quad 20 \geq x + 2, \quad 20 \geq x + 2 + 4$$

که نتیجه می‌دهد

$$x \geq 9, \quad x \geq 5, \quad x \leq 18, \quad x \leq 14$$

یعنی

$$9 \leq x \leq 14.$$

(ب) ترتیب‌های

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

را از چپ به راست در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\phi_1 = \frac{(4 - 0) + (4 - 0) + (7 - 2) + (20 - x - 2) + (x - 5) + (20 - x - 2)}{6} = \frac{44 - x}{6}$$

$$\phi_2 = \frac{(7 - 4) + (20 - x) + (2 - 0) + (2 - 0) + (20 - x) + (x + 2 - 5)}{6} = \frac{44 - x}{6}$$

$$\phi_3 = \frac{(20 - 7) + (x - 4) + (20 - 7) + (x + 2 - 2) + (5 - 0) + (5 - 0)}{6} = \frac{32 + 2x}{6}.$$

(ج) برآمدهای تشکیل شده توسط ارزش‌های شپلی در مغز قرار دارد، اگر:

$$\begin{aligned} \frac{44 - x}{6} &\geq 4, & \frac{44 - x}{6} &\geq 2, & \frac{32 + 2x}{6} &\geq 5, \\ \frac{44 - x}{6} + \frac{44 - x}{6} &\geq 7, & \frac{44 - x}{6} + \frac{32 + 2x}{6} &\geq x, & \frac{44 - x}{6} + \frac{32 + 2x}{6} &\geq x + 2, \\ \frac{44 - x}{6} + \frac{44 - x}{6} + \frac{32 + 2x}{6} &\geq 20. \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} x &\leq 20, & x &\leq 32, & x &\geq -1, \\ x &\leq 23, & x &\leq \frac{76}{5}, & x &\leq \frac{64}{5}, \\ 20 &\geq 20. \end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن بازوی (الف) می‌دهد: $9 \leq x \leq \frac{64}{5}$

(۲) یک بازی ائتلافی را با چهار عامل $Ag = \{1, 2, 3, 4\}$ در نظر بگیرید که با تابع مشخصه‌ی زیر تعریف شده است:

$$v(C) = \begin{cases} |C|^2, & |C| \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) آیا این بازی ائتلافی ابرجمع‌پذیر است؟ چرا؟

(ب) از الگوریتم شه‌هوری و کراس (Shehory and Kraus algorithm) استفاده کنید و بهترین ساختار ائتلافی را بیابید. فرض کنید که اگر در یک موقعیت همه‌ی ارزش‌ها یکسان بود، عامل‌ها و ائتلاف‌ها به ترتیب الفبایی انتخاب می‌شوند.

(ج) ارزش‌های شپلی را برای عامل‌ها در بزرگ‌ترین ائتلاف C_{\max} یافت شده در بخش (ب) این تمرین، محاسبه کنید.

(د) آیا برآمدهای تشکیل شده توسط ارزش‌های شپلی برای C_{\max} در مغز (core) قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ

(الف) خیر، به‌عنوان مثال نقض داریم:

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 0 < 8 = 4 + 4 = v(\{1, 2\}) + v(\{3, 4\}).$$

(ب) همه‌ی عامل‌ها الگوریتم یکسانی را اجرا می‌کنند. فرض می‌کنیم که همگی آنها همگام (synchronized) هستند.

(a) Agents i (where i is in $\{1, 2, 3\}$) calculate $C_i^* = \{1, 2, 3\}$ and broadcast $(i, \{1, 2, 3\})$

Agent 4 calculates $C_4^* = \{2, 3, 4\}$ and broadcasts $(4, \{1, 2, 4\})$

(b) All agents form the set $C^* = \{(\{1, \{1, 2, 3\}\}), (\{2, \{1, 2, 3\}\}), (\{3, \{1, 2, 3\}\}), (\{4, \{1, 2, 4\}\})\}$ and calculate $C_{\max} = \{1, 2, 3\}$

(c) All agents in $\{1, 2, 3\}$ join $C_{\max} = \{1, 2, 3\}$ and stop

(d) Agent 4 forms coalition {4}

(ج) برای ائتلاف {۱, ۲, ۳} داریم:

| C | $v(C)$ |
|-----------|--------|
| {۱} | ۱ |
| {۲} | ۱ |
| {۳} | ۱ |
| {۱, ۲} | ۴ |
| {۱, ۳} | ۴ |
| {۲, ۳} | ۴ |
| {۱, ۲, ۳} | ۹ |

و

$$\phi_1 = \frac{1 + 1 + 3 + 5 + 3 + 5}{6} = 3.$$

بر اساس تقارن، همچنین داریم: $\phi_2 = \phi_3 = 3$.

(د) برآمد $\langle 3, 3, 3 \rangle$ در core قرار دارد، زیرا هیچ زیرمجموعه‌ای از عامل‌ها به آن اعتراض نمی‌کند.

(۳) چهار عامل رباتیک که توسط آژانس‌های فضائی مختلف ساخته شده‌اند، بر روی سیاره‌ی مریخ کار می‌کنند. این ربات‌های متحرک (سیار) (mobile robots) A, B, C و D نامیده می‌شوند و به ترتیب می‌توانند وزن‌های ۱۵، ۲۵، ۴۵ و ۱۵ کیلوگرم را حمل کنند. یک صخره ۵۱ کیلوگرم وزن دارد و لازم است توسط ربات‌ها حمل شده و به کاوشگر منتقل شود تا بررسی‌های لازم روی آن انجام شود. ربات‌ها می‌توانند تیم‌هایی تشکیل دهند که وزنی مساوی با مجموع وزن قابل حمل توسط هر یک از اعضای تشکیل‌دهنده تیم را حمل کنند. وقتی صخره به طور موفقیت‌آمیز در کاوشگر تحلیل و بررسی شد، آژانس‌های سازنده ربات‌های حمل‌کننده، ۱۰۰ میلیون دلار به دلیل همکاری در گردآوری داده‌های علمی دریافت می‌کنند. آژانس‌های فضایی که ربات‌هایی را ساخته‌اند که در حمل صخره کمکی نکرده‌اند، صفر دلار دریافت می‌کنند!

(الف) این مسئله را در قالب یک مسئله‌ی تشکیل ائتلاف عامل‌ها فرمول‌بندی کنید، مجموعه‌ی عامل‌ها و تابع ارزش را مشخص کنید (جدول کامل تابع لازم نیست، توصیف دقیق آن کفایت می‌کند).

(ب) ارزش‌های شپلی را برای هر چهار عامل محاسبه کنید.

(ج) آیا در مغز (core) وجود دارد؟ چرا؟

پاسخ

(الف) مجموعه‌ی عامل‌ها عبارت است از: $\{A, B, C, D\}$. تابع ارزش به این صورت است که هر ائتلاف از ربات‌ها که بتواند ۵۱ کیلوگرم را حمل کند، ارزش ۱۰۰ دارد، درحالی‌که سایر ائتلاف‌ها هر یک ارزش صفر دارند. برای مثال، $v(\{A\}) = 0$ و $v(\{A, B\}) = 100$.

(ب) ارزش‌های شپلی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \frac{1}{4!} [3! \cdot 0! (100 - 100) + 3 \cdot 2! \cdot 1! (100 - 0) + 3 \cdot 1! \cdot 2! (100 - 0) + 0! \cdot 3! (0 - 0)] \\ &= \frac{1}{24} (0 + 600 + 600 + 0) = 50 \\ \phi(B) &= \phi(C) = \phi(D) \\ &= \frac{1}{4!} [3! \cdot 0! (100 - 100) + 2 \cdot 2! \cdot 1! (100 - 100) \\ &\quad + 2! \cdot 1! (100 - 0) + 1! \cdot 2! (100 - 0) + 2 \cdot 1! \cdot 2! (0 - 0) + 0! \cdot 3! (0 - 0)] \\ &= \frac{1}{24} [0 + 0 + 200 + 200 + 0 + 0] = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

(ج) core تهی است. ائتلاف‌های می‌نیمال که می‌توانند صخره را حمل کنند، عبارتند از:

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C, D\}.$$

بنابراین، اگر مجموع پی‌آف‌ها برای B ، C و D کمتر از 100 باشد، آنگاه آنها ائتلاف را ترک خواهند کرد. با این وجود، اگر آنها مجموعاً 100 امتیاز بگیرند، A صفر امتیاز دریافت می‌کند و ائتلاف جدیدی با عاملی $(B, C$ یا $D)$ تشکیل می‌دهد که کمترین پی‌آف را دریافت کرده است.

