



تکلیف شماره ۴

بخش چهارم

تشکیل ائتلاف عامل‌ها

COALITION FORMATION OF AGENTS

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

۱) یک بازی ائتلافی تعریف شده با تابع مشخصه‌ی زیر را برای $n = 3$ عامل در نظر بگیرید:

S	$v(S)$
$\{1\}$	۴
$\{2\}$	۲
$\{3\}$	۵
$\{1, 2\}$	۷
$\{1, 3\}$	x
$\{2, 3\}$	$x + 2$
$\{1, 2, 3\}$	۲۰

که در آن x یک عدد حقیقی است.(الف) بازی مقادیر x که برای آن این بازی ابرجمع‌پذیر (super-additive) باشد را بیابید. (منظور از ابرجمع‌پذیری این است کهبرای هر دو زیرمجموعه‌ی مجزای S_1 و S_2 از عامل‌ها، داشته باشیم $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$.)

(ب) فرض کنید که عامل‌ها یک ائتلاف بزرگ (grand coalition) تشکیل می‌دهند. ارزش‌های شپلی (Shapley values)

را برای عامل‌ها محاسبه کنید (وابسته به متغیر x).(ج) بازی مقادیری از x را بیابید (زیربازه‌ای از بازه‌ی پیدا شده در بخش (الف) این تمرین) که برای آن برآمد (بردار پی‌آف‌ها)

تشکیل شده توسط ارزش‌های شپلی در مغز بازی (core) باشد.

۲) یک بازی ائتلافی را با چهار عامل $Ag = \{1, 2, 3, 4\}$ در نظر بگیرید که با تابع مشخصه‌ی زیر تعریف شده است:

$$v(C) = \begin{cases} |C|^2, & |C| \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) آیا این بازی ائتلافی ابرجمع‌پذیر است؟ چرا؟

(ب) از الگوریتم شه‌هوری و کراس (Shehory and Kraus algorithm) استفاده کنید و بهترین ساختار ائتلافی را

بیابید. فرض کنید که اگر در یک موقعیت همه‌ی ارزش‌ها یکسان بود، عامل‌ها و ائتلاف‌ها به ترتیب الفبایی انتخاب می‌شوند.

(ج) ارزش‌های شپلی را برای عامل‌ها در بزرگ‌ترین ائتلاف C_{\max} یافت شده در بخش (ب) این تمرین، محاسبه کنید.(د) آیا برآمدهای تشکیل‌شده توسط ارزش‌های شپلی برای C_{\max} در مغز (core) قرار دارد؟ چرا؟

۳) چهار عامل رباتیک که توسط آژانس‌های فضائی مختلف ساخته شده‌اند، بر روی سیاره‌ی مریخ کار می‌کنند. این ربات‌های متحرک

(سیار) (mobile robots) A, B, C و D نامیده می‌شوند و به ترتیب می‌توانند وزن‌های ۱۵، ۲۵، ۴۵ و ۱۵ کیلوگرم را حمل کنند.

یک صخره ۵۱ کیلوگرم وزن دارد و لازم است توسط ربات‌ها حمل شده و به کاوشگر منتقل شود تا بررسی‌های لازم روی آن انجام

شود. ربات‌ها می‌توانند تیم‌هایی تشکیل دهند که وزنی مساوی با مجموع وزن قابل حمل توسط هر یک از اعضای تشکیل‌دهنده‌ی

تیم را حمل کنند. وقتی صخره به طور موفقیت‌آمیز در کاوشگر تحلیل و بررسی شد، آژانس‌های سازنده‌ی ربات‌های حمل‌کننده، ۱۰۰ میلیون دلار به دلیل همکاری در گردآوری داده‌های علمی دریافت می‌کنند. آژانس‌های فضایی که ربات‌هایی را ساخته‌اند که در حمل صخره کمکی نکرده‌اند، صفر دلار دریافت می‌کنند!

(الف) این مسئله را در قالب یک مسئله‌ی تشکیل ائتلاف عامل‌ها فرمول‌بندی کنید، مجموعه‌ی عامل‌ها و تابع ارزش را مشخص کنید (جدول کامل تابع لازم نیست، توصیف دقیق آن کفایت می‌کند).

(ب) ارزش‌های شپلی را برای هر چهار عامل محاسبه کنید.

(ج) آیا در مغز (core) راه‌حلی وجود دارد؟ چرا؟