

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



مبانی بینایی کامپیوتری

درس ۶

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

Filtering in the Frequency Domain

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

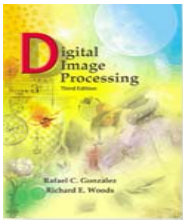
<http://courses.fouladi.ir/fcvision>

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۱

پیش زمینه:

حوزه‌ی
فرکانس



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

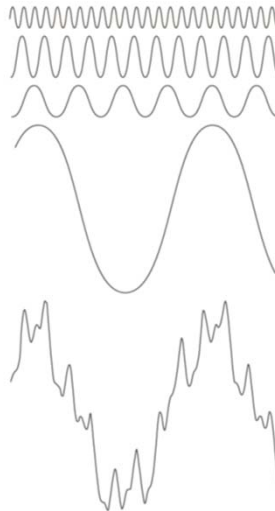


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

تحلیل فوریه

FOURIER ANALYSIS

سری فوریه

Fourier Series

هر تابعی که خودش را به صورت **متناوب** تکرار کند،
می تواند به صورت به صورت
مجموع سینوس ها / کسینوس ها در فرکانس های مختلف
نوشته شود که هر یک در یک ضریب متفاوت ضرب می شود.

تبدیل فوریه

Fourier Transform

هر تابعی که **متناوب نباشد**
(اما مساحت زیر منحنی آن متناهی باشد)،
می تواند به صورت به صورت
انتگرال سینوس ها / کسینوس ها در فرکانس های مختلف
نوشته شود که هر یک در یک تابع وزن ضرب می شود.

حوزه‌ی فرکانس

پیش‌زمینه

حوزه‌ی فرکانس

Frequency Domain

حوزه‌ی فرکانس

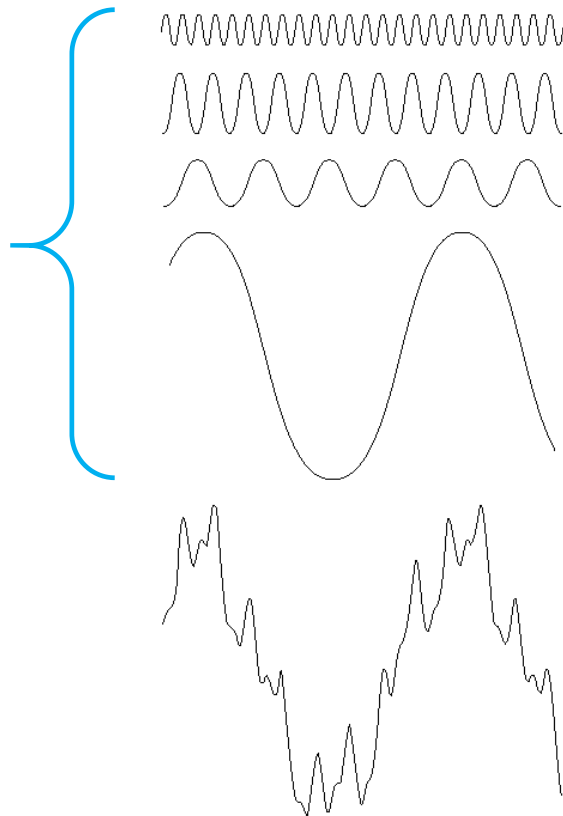
به صفحه‌ی دوبعدی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی
یک تصویر اشاره می‌کند.

هدف از تبدیل فوریه،

بازنمایی یک سیگنال به صورت ترکیبی خطی از

سیگنال‌های سینوسی

در فرکانس‌های مختلف است.



فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۲

مفاهیم
ابتدائی

COMPLEX NUMBERS

$$C = R + jI$$

عدد مختلط

Complex Number

$$C^* = R - jI$$

مزدوج

Conjugate

$$j = \sqrt{-1}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\begin{aligned} C &= |C|(\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= |C|e^{j\theta} \end{aligned}$$

$$|C| = \sqrt{R^2 + I^2} \quad \theta = \arctan_2(I, R)$$

سری فوریه

FOURIER SERIES

تابع $f(t)$ از متغیر پیوسته t با دوره‌ی تناوب T می‌تواند به صورت ترکیبی خطی از سینوسی‌ها و کسینوسی‌ها (یا نمایی مختلط) با فرکانس‌های مختلف نوشته شود.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \quad \text{for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ضربه‌ی واحد

UNIT IMPULSE

نمونه‌ی واحد (گسسته)

Unit Sample

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) = f(0)$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

ضربه‌ی واحد (پیوسته)

Unit Impulse

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

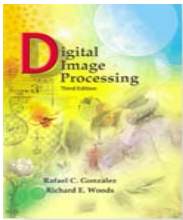
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

خاصیت غربالی

Sifting Property



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

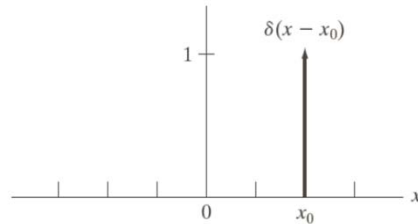


FIGURE 4.2

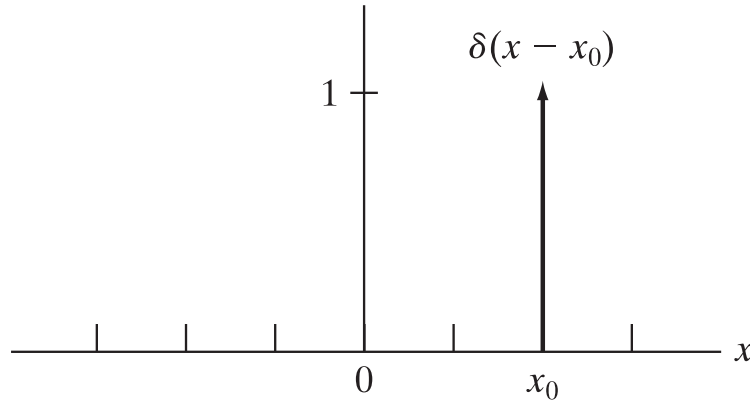
A unit discrete impulse located at $x = x_0$. Variable x is discrete, and δ is 0 everywhere except at $x = x_0$.

ضربه‌ی واحد گسسته

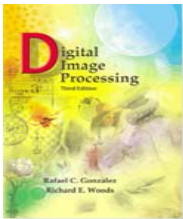
تابع نمونه‌ی واحد

UNIT DISCRETE IMPULSE

ضربه‌ی واحد گسسته در نقطه‌ی $x = x_0$ متغیر x گسسته است و تابع δ همه‌جا صفر است غیر از $x = x_0$ که در آنجا یک است.



$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

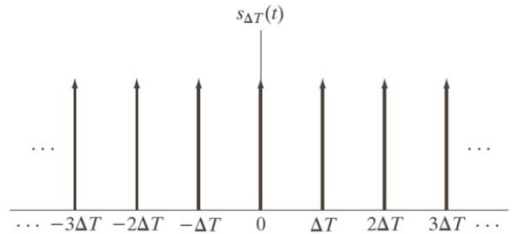


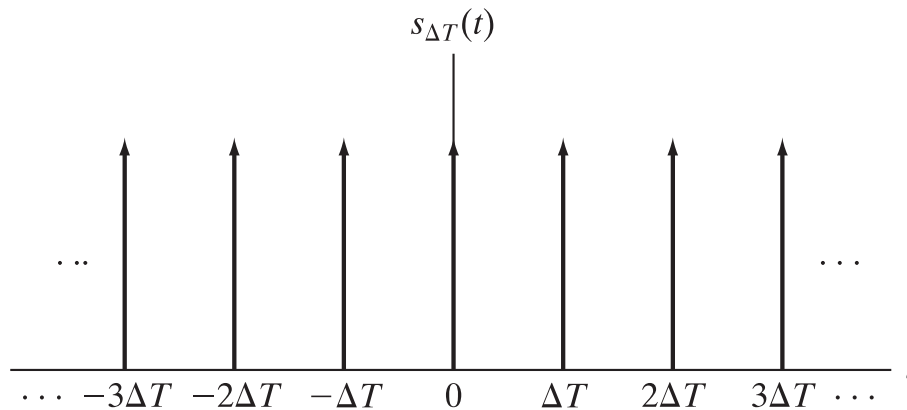
FIGURE 4.3 An impulse train.

قطار ضربه

IMPULSE TRAIN

قطار ضربه، تکرار متناوب تابع ضربه‌ی واحد با دوره‌ی تناوب اصلی Δt است.

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۳

نمونه برداری
و تبدیل
فوریه‌ی
توابع
نمونه برداری
شده

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه پیوسته

THE FOURIER TRANSFORM

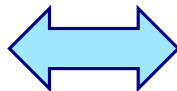
حالت پیوسته

Continuous Case

تبدیل معکوس فوریه ی یک-بعدی

One-dimensional Inverse Fourier Transform

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$



تبدیل فوریه ی یک-بعدی

One-dimensional Fourier Transform

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

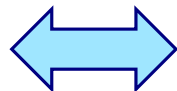
$$j = \sqrt{-1}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

تبدیل معکوس فوریه ی دو-بعدی

Two-dimensional Inverse Fourier Transform

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv$$



تبدیل فوریه ی دو-بعدی

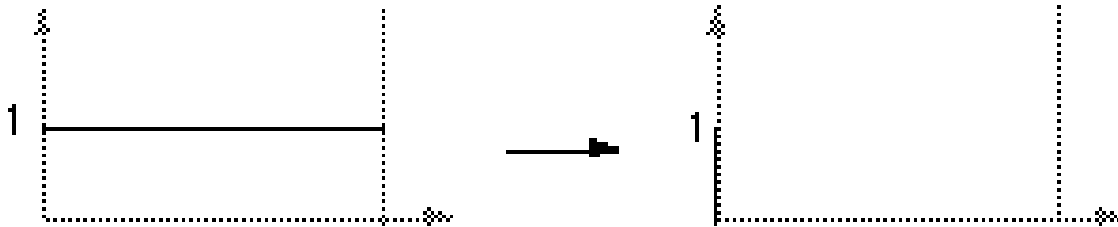
Two-dimensional Fourier Transform

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

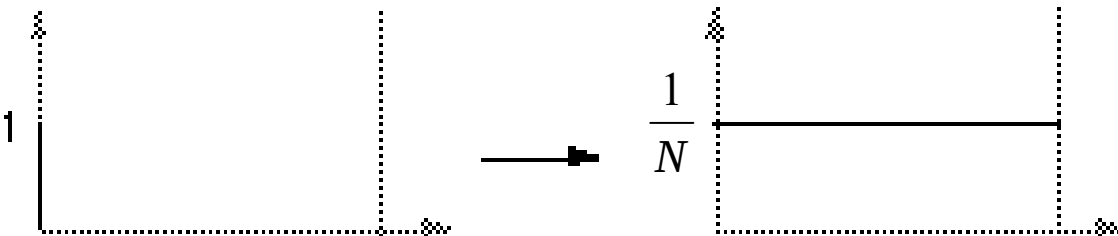
تبدیل فوریه‌ی یک بعدی

مثال

تبدیل فوریه‌ی یک تابع ثابت، فقط مؤلفه‌ی DC را دارد (فرکانس صفر): ضربه



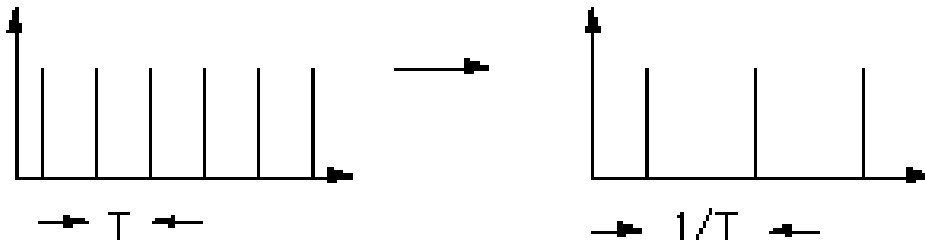
تبدیل فوریه‌ی تابع ضربه، یک مقدار ثابت است.



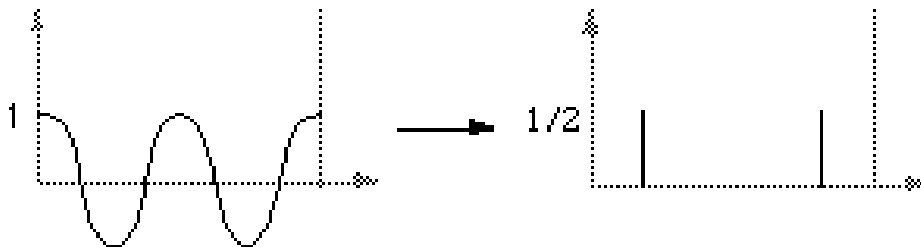
تبدیل فوریه‌ی یک بعدی

مثال

تبدیل فوریه‌ی یک قطار ضربه با دوره‌ی تناوب T
 یک قطار ضربه با دوره‌ی تناوب $1/T$ است.



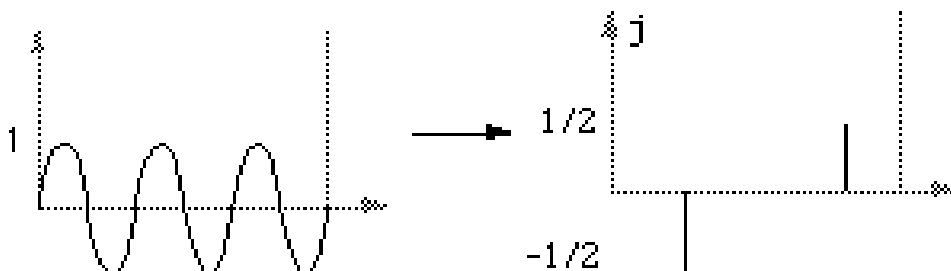
تبدیل فوریه‌ی یک تابع کسینوسی،
 یک تابع ضربه‌ی مثبت متقارن در فرکانس مناسب (مثبت و منفی) است.



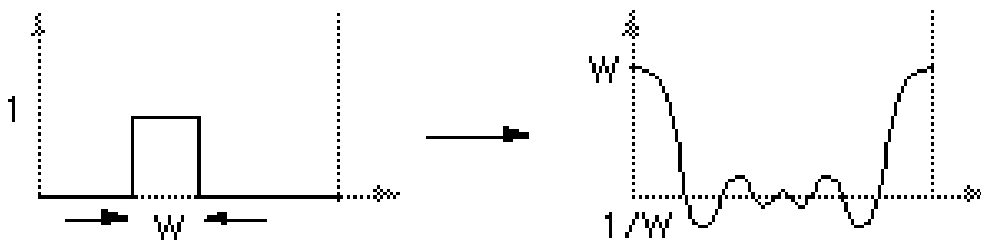
تبدیل فوریه‌ی یک بعدی

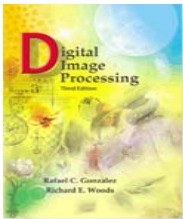
مثال

تبدیل فوریه‌ی یک تابع سینوسی،
یک تابع ضربه‌ی مثبت در یک فرکانس مثبت و یک تابع ضربه‌ی منفی در یک فرکانس منفی است.



تبدیل فوریه‌ی یک پالس مربعی،
یک تابع سینک است.





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

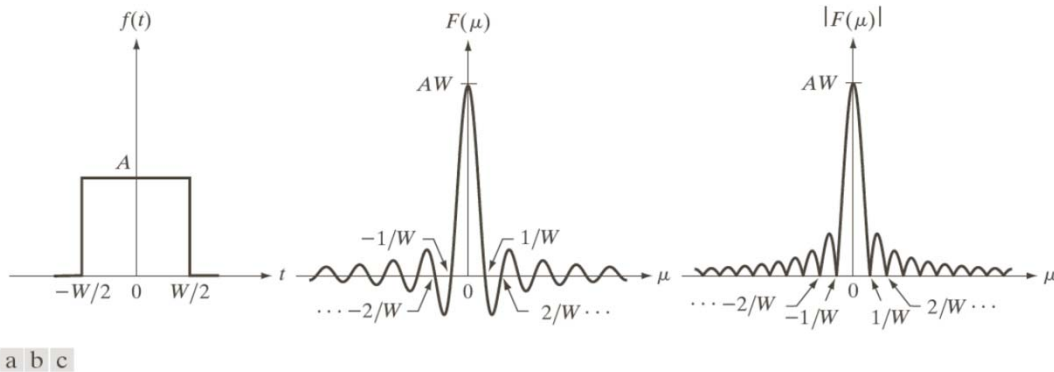


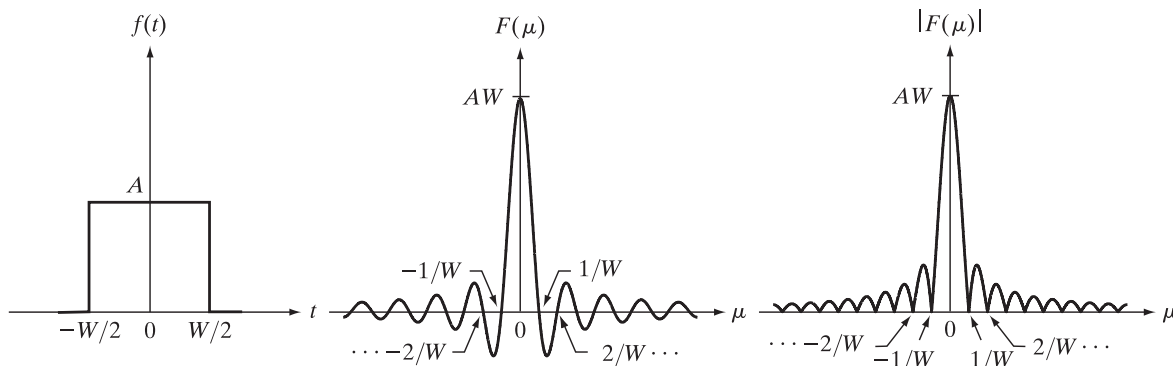
FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

تبدیل فوریه‌ی یک-بعدی

مثال: تبدیل فوریه‌ی پالس مربعی - تابع سینک

$$\begin{aligned}
 F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi\mu t} dt \\
 &= \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j2\pi\mu t} \right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W} \right] \\
 &= \frac{A}{j2\pi\mu} \left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W} \right] \\
 &= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}
 \end{aligned}$$

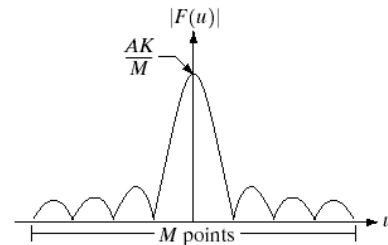
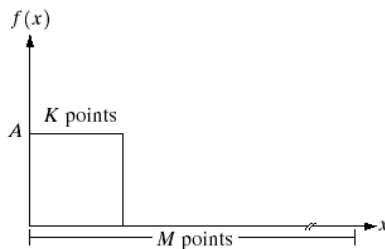
با استفاده از تعریف تبدیل فوریه پیوسته یک-بعدی:



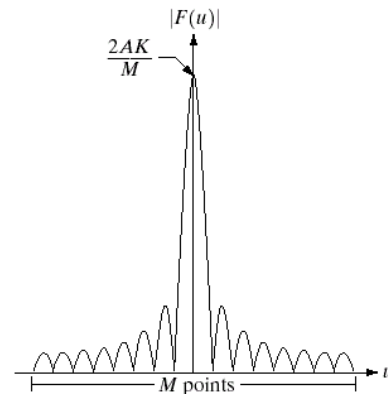
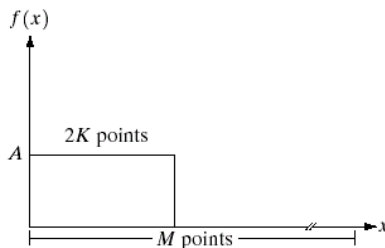
تبدیل فوریه‌ی یک-بعدی

مثال

یک تابع گسسته با M نقطه
و تبدیل فوریه‌ی آن

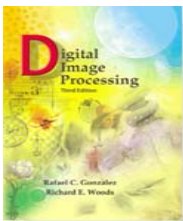


همان تابع گسسته با M نقطه
با دو برابر تعداد نقاط غیر صفر
و تبدیل فوریه‌ی آن



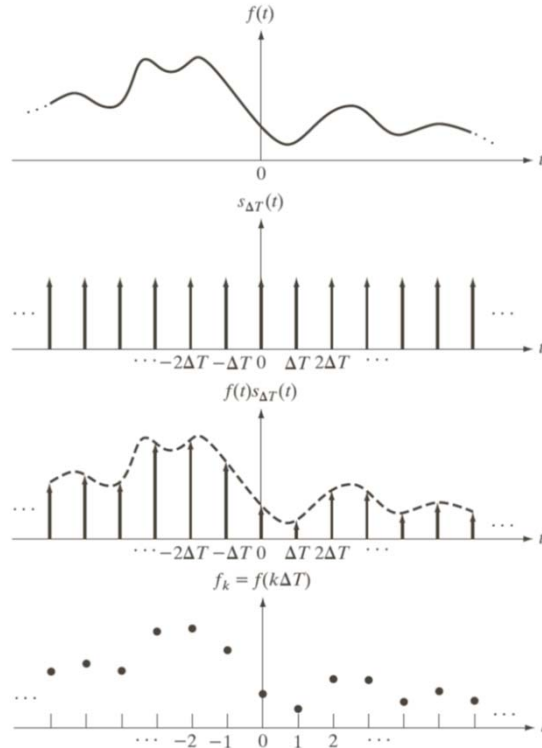
نمونه برداری و تبدیل فوری به توابع نمونه برداری شده

توابع پیوسته برای پردازش توسط کامپیوتر، باید به دنباله ای از مقادیر گسسته تبدیل شوند. این کار از طریق نمونه برداری و چندی سازی انجام می شود.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



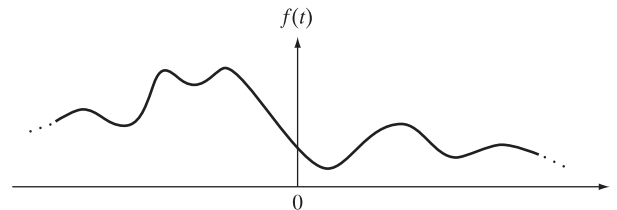
a
b
c
d

FIGURE 4.5
(a) A continuous function. (b) Train of impulses used to model the sampling process. (c) Sampled function formed as the product of (a) and (b). (d) Sample values obtained by integration and using the sifting property of the impulse. (The dashed line in (c) is shown for reference. It is not part of the data.)

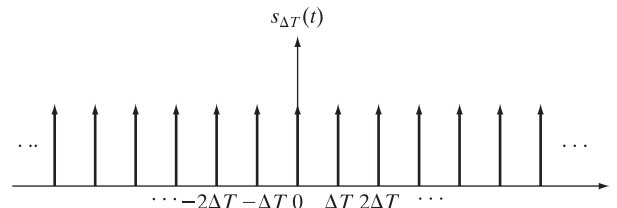
نمونه برداری

مثال

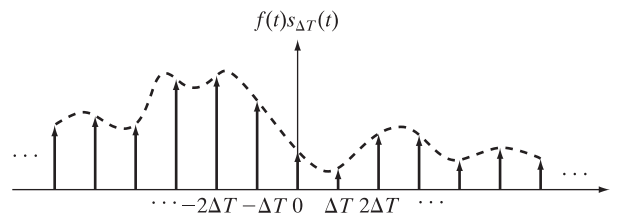
(۱) یک تابع پیوسته



(۲) قطار ضربه‌ای مورد استفاده برای
مدل‌سازی فرآیند نمونه‌برداری

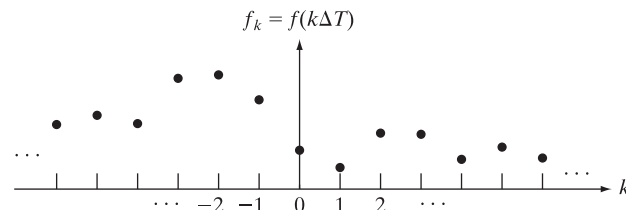


(۳) تابع نمونه‌برداری شده
متشکل از ضرب تابع پیوسته (۱) و قطار ضربه (۲)



(۴) مقادیر نمونه حاصل از انتگرال‌گیری
و استفاده از خاصیت غربالی

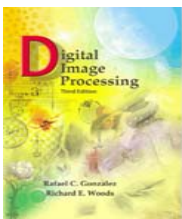
$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta t)dt = f(k\Delta t)$$



قضیه‌ی نمونه‌برداری

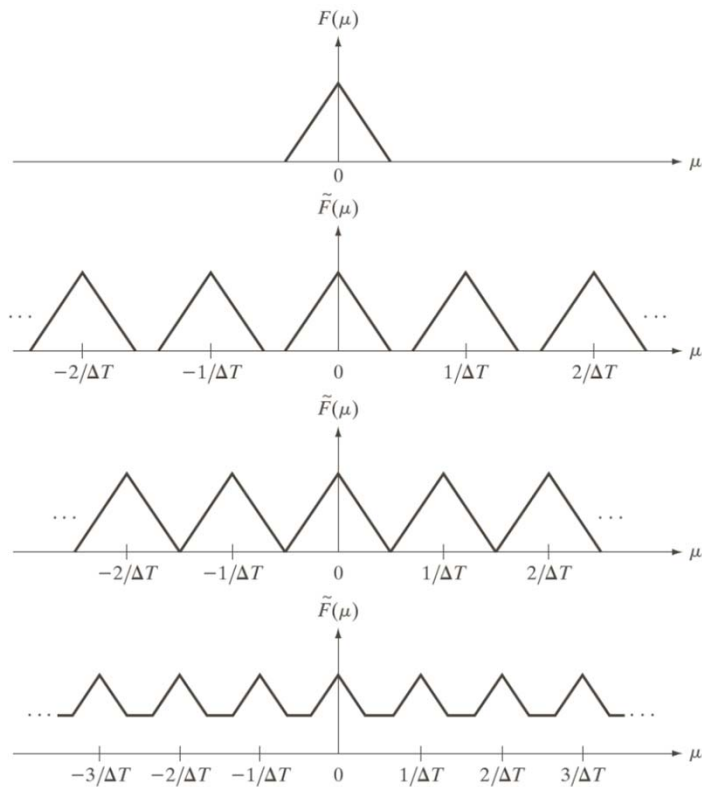
نرخ نایکوئیست

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a
b
c
d

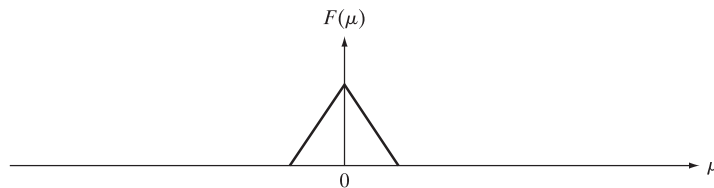
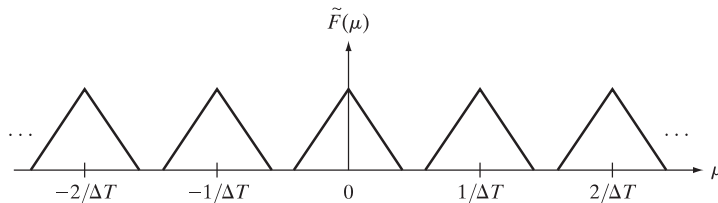
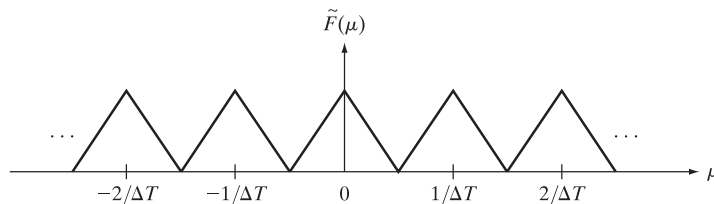
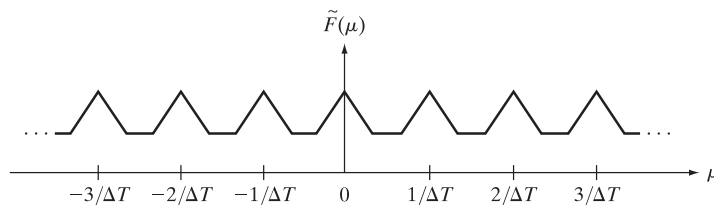
FIGURE 4.6

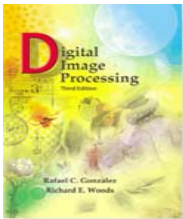
(a) Fourier transform of a band-limited function. (b)–(d) Transforms of the corresponding sampled function under the conditions of over-sampling, critically-sampling, and under-sampling, respectively.

قضیه‌ی نمونه‌برداری

مثال

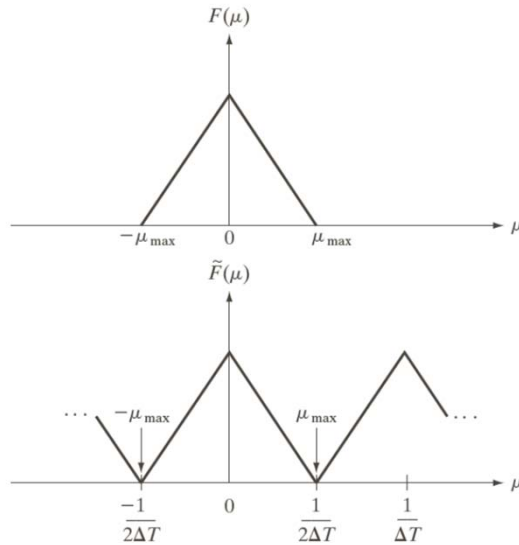
(۱) تبدیل فوریه‌ی یک تابع باند-محدود

(۲) تبدیل تابع نمونه‌برداری‌شده‌ی متناظر
در شرایط بیش-نمونه‌برداری over-sampling(۳) تبدیل تابع نمونه‌برداری‌شده‌ی متناظر در
شرایط نمونه‌برداری بحرانی critically-sampling(۴) تبدیل تابع نمونه‌برداری‌شده‌ی متناظر
در شرایط زیر-نمونه‌برداری under-sampling



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



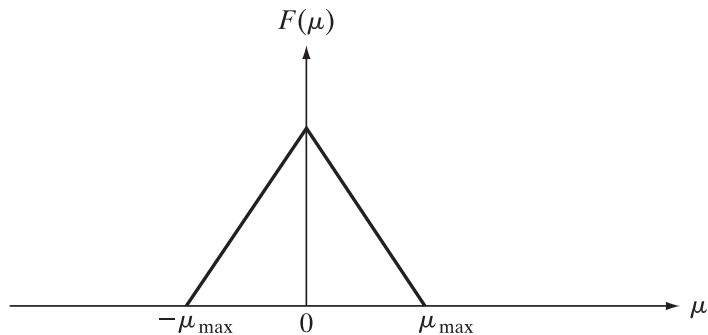
a
b

FIGURE 4.7
(a) Transform of a band-limited function.
(b) Transform resulting from critically sampling the same function.

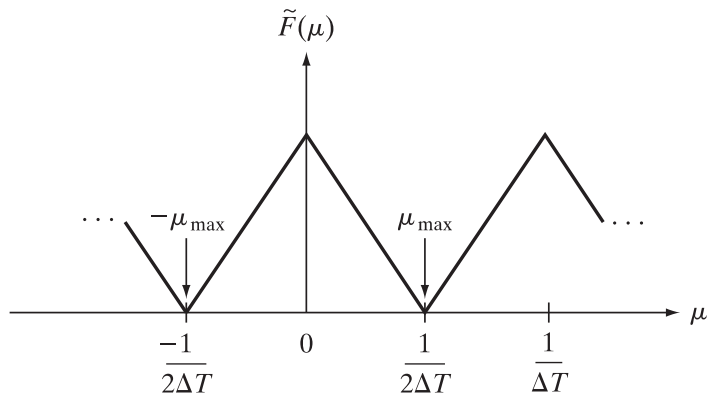
قضیه‌ی نمونه‌برداری

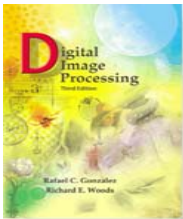
مثال

(۱) تبدیل فوریه‌ی یک تابع باند-محدود



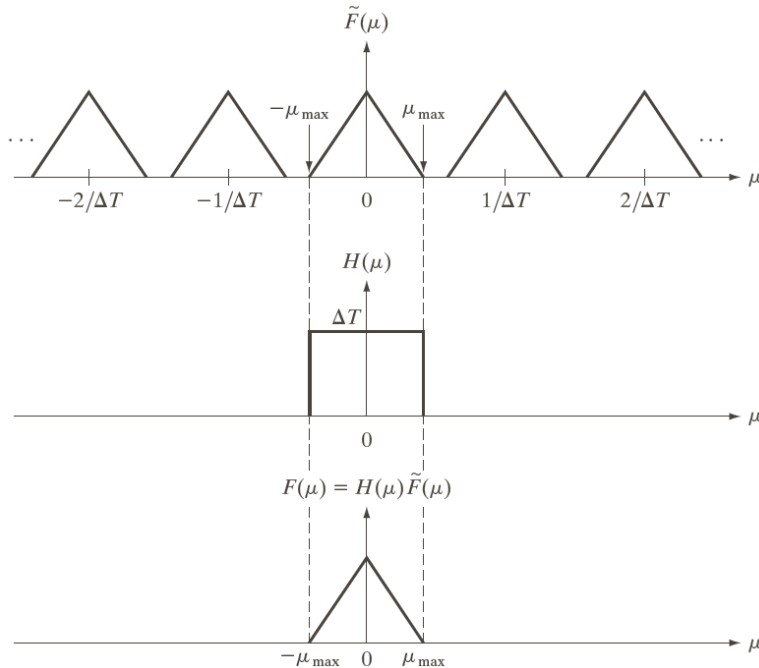
(۲) تبدیل حاصل از نمونه‌برداری بحرانی critically-sampling همان تابع است.





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



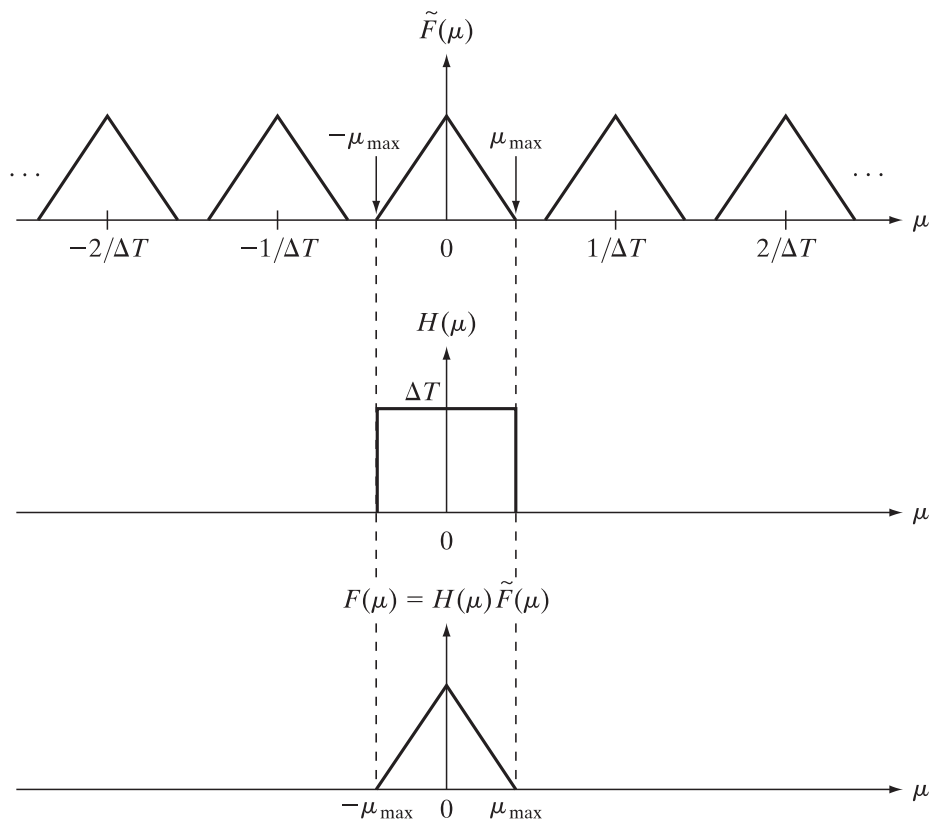
a
b
c

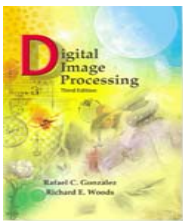
FIGURE 4.8
Extracting one period of the transform of a band-limited function using an ideal lowpass filter.

قضیه‌ی نمونه‌برداری

مثال

استخراج یک دوره‌ی تناوب
تبدیل یک تابع باند محدود
با استفاده از
فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

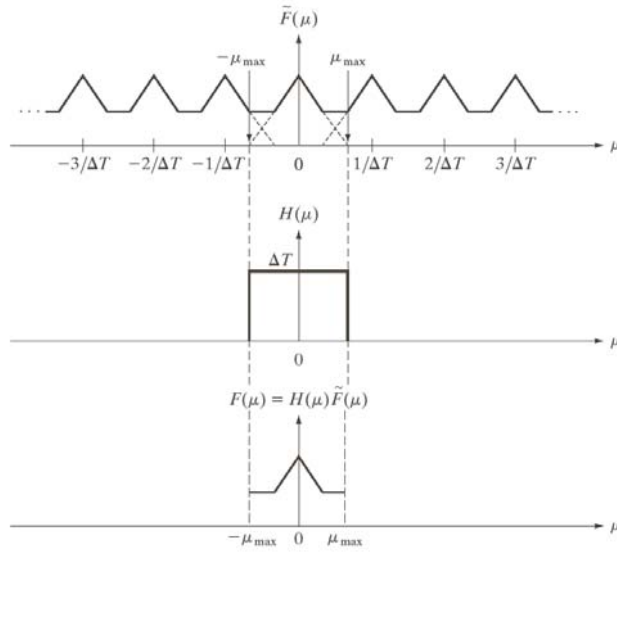


FIGURE 4.9 (a) Fourier transform of an under-sampled, band-limited function. (Interference from adjacent periods is shown dashed in this figure). (b) The same ideal lowpass filter used in Fig. 4.8(b). (c) The product of (a) and (b). The interference from adjacent periods results in aliasing that prevents perfect recovery of $F(\mu)$ and, therefore, of the original, band-limited continuous function. Compare with Fig. 4.8.

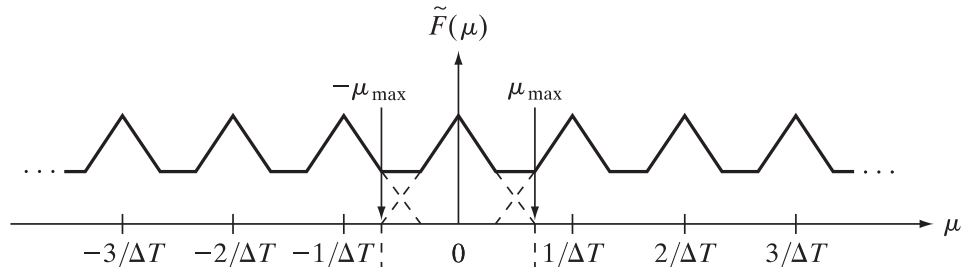
قضیه‌ی نمونه‌برداری

آلیاسینگ

ALIASING

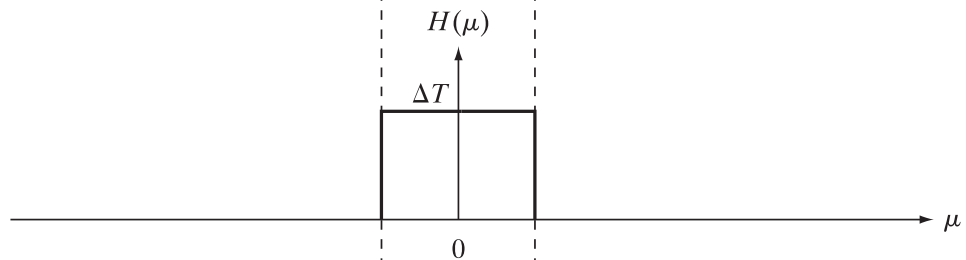
(۱)

تبدیل فوریه یک تابع باند
محدود با زیرنمونه‌برداری
(تداخل‌های دوره‌های مجاور با
خط چین نشان داده شده است).



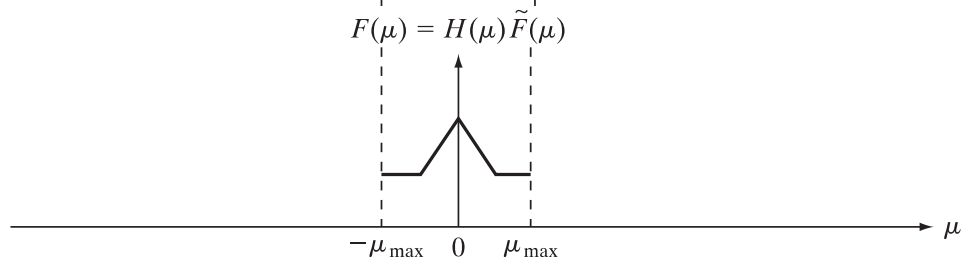
(۲)

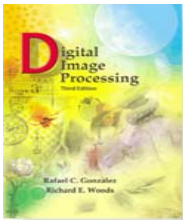
فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل



(۳)

ضرب (۱) و (۲):
تداخل دوره‌های مجاور منجر
به آلیاسینگ شده و از
بازسازی کامل تابع اصلی
جلوگیری کرده است.





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

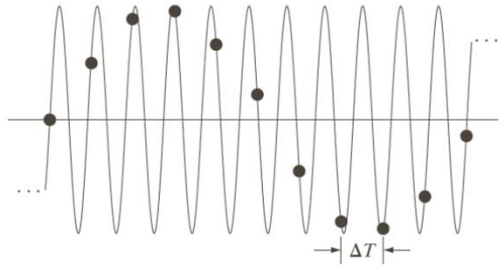
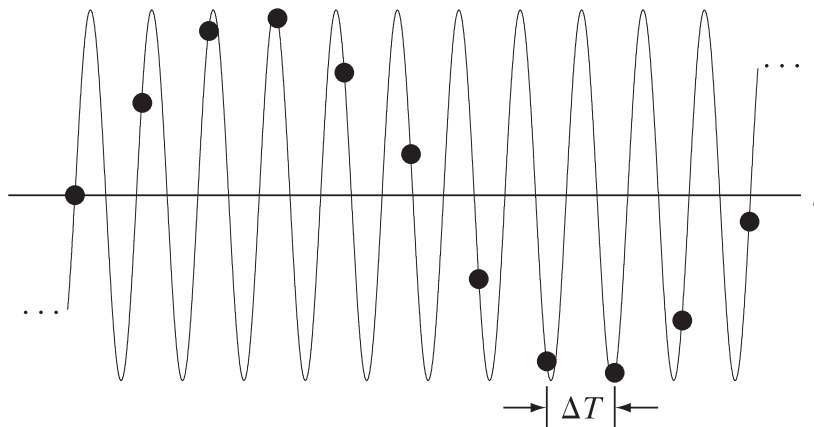


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

قضیه‌ی نمونه‌برداری

آلیاسینگ

ALIASING

نمایشی از آلیاسینگ:

تابع زیرنمونه‌برداری‌شده (نقاط سیاه) به نظر شبیه یک موج سینوسی دارای فرکانسی بسیار پایین‌تر از فرکانس سیگنال پیوسته می‌رسد.

دوره‌ی تناوب سیگنال سینوسی ۲ است، پس محل برخورد با صفر محور افقی، ثانیه‌ای یک بار رخ می‌دهد. فاصله‌ی بین نمونه‌ها، Δt است.

قضیه‌ی نمونه‌برداری

بازسازی تابع اصلی از روی داده‌های نمونه‌برداری شده

FUNCTION RECONSTRUCTION (RECOVERY) FROM SAMPLED DATA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \operatorname{sinc}[(t - n\Delta t) / n\Delta t]$$

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۴

تبدیل
فوری‌ه‌ی
گسسته
(DFT)
یک متغیره

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه گسسته

THE FOURIER TRANSFORM

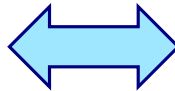
حالت گسسته

Discrete Case

تبدیل معکوس فوریه ی یک-بعدی

One-dimensional Inverse Fourier Transform

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$

for $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 

$$j = \sqrt{-1}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

تبدیل فوریه ی یک-بعدی

One-dimensional Fourier Transform

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$

تبدیل فوریه

بازنمایی تبدیل فوریه‌ی گسسته با سینوس و کسینوس: حوزه‌ی فرکانس و مؤلفه‌ی فرکانسی

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$



$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) [\cos 2\pi ux / M - j \sin 2\pi ux / M]$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$

دامنه (مقادیر u) که بازه‌ی مقادیر $F(u)$ را مشخص می‌کند؛
زیرا u فرکانس مؤلفه‌های تبدیل را مشخص می‌کند.

حوزه‌ی فرکانس

Frequency Domain

هر یک از M جمله‌ی $F(u)$ یک مؤلفه‌ی فرکانسی است.

مؤلفه‌ی فرکانسی

Frequency Component

تبدیل فوریه

بازنمایی تبدیل فوریه‌ی گسسته در مختصات قطبی

تبدیل فوریه را می‌توان در مختصات قطبی نیز نشان داد:

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

$$\text{where } |F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

اندازه / طیف

Magnitude / Spectrum

زاویه فاز / طیف فاز

Phase Angle / Phase Spectrum

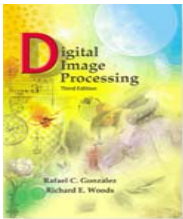
طیف توان

Power Spectrum

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

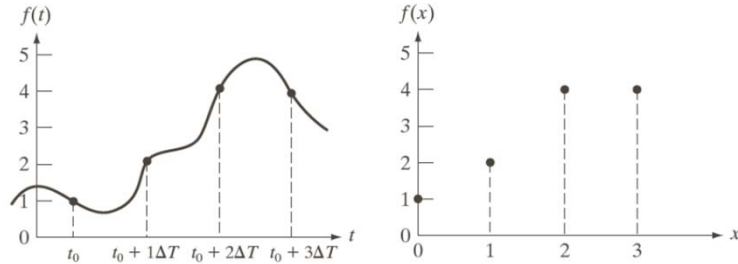
$$R(u) = \Re\{F(u)\}$$

$$I(u) = \Im\{F(u)\}$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a b

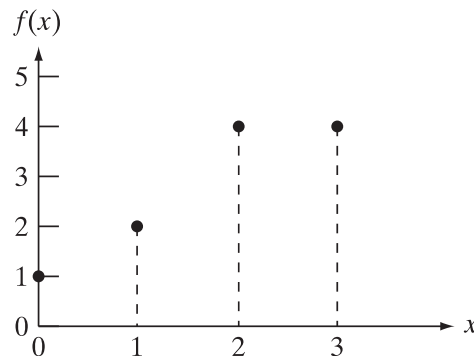
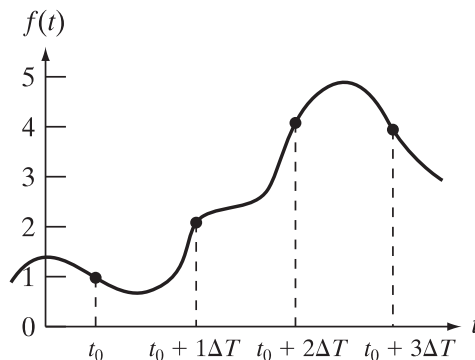
FIGURE 4.11
(a) A function, and (b) samples in the x -domain. In (a), t is a continuous variable; in (b), x represents integer values.

تبدیل فوریه ی گسسته

مثال

a b

(a) A function, and (b) samples in the x -domain. In (a), t is a continuous variable; in (b), x represents integer values.



$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$= 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4}$$

$$= 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j) \quad F(3) = -(3 + 2j).$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{j2\pi u(0)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u)$$

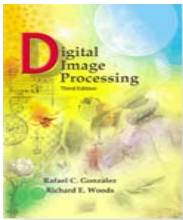
$$= \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j]$$

$$= \frac{1}{4} [4] = 1$$

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۵

تبدیل
فوری‌ی
گسسته
(DFT)
دو متغیره



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

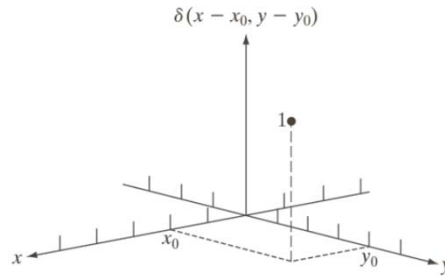
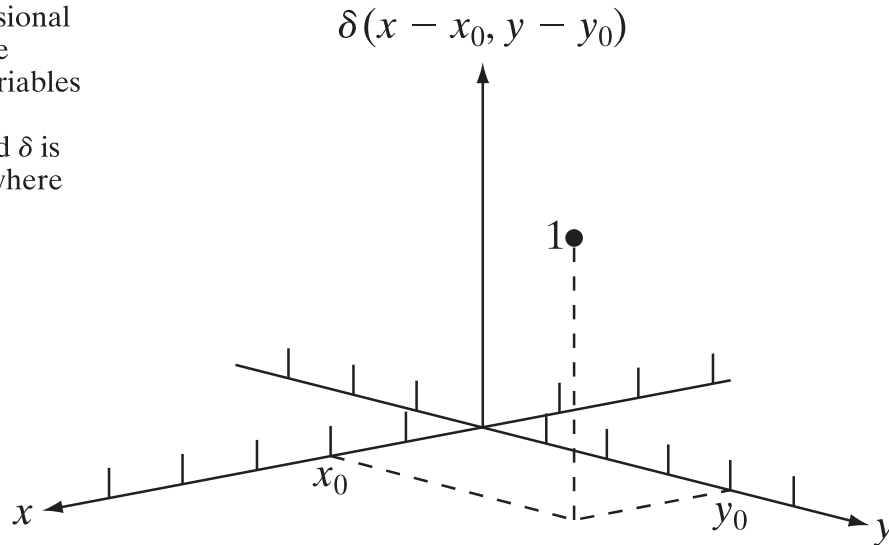


FIGURE 4.12
Two-dimensional
unit discrete
impulse. Variables
 x and y are
discrete, and δ is
zero everywhere
except at
coordinates
 (x_0, y_0) .

تابع ضربی واحد گسسته‌ی دوبعدی

Two-DIMENSIONAL UNIT DISCRETE IMPULSE

Two-dimensional unit discrete impulse. Variables x and y are discrete, and δ is zero everywhere except at coordinates (x_0, y_0) .



مقدمه‌ای بر تبدیل فوریه و حوزه‌ی فرکانس

تبدیل فوریه پیوسته

INTRODUCTION TO THE FOURIER TRANSFORM AND THE FREQUENCY DOMAIN

حالت پیوسته

Continuous Case

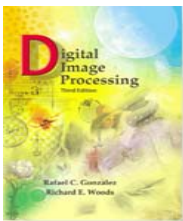
تبدیل معکوس فوریه‌ی دو-بعدی

Two-dimensional Inverse Fourier Transform

تبدیل فوریه‌ی دو-بعدی

Two-dimensional Fourier Transform

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad \longleftrightarrow \quad F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

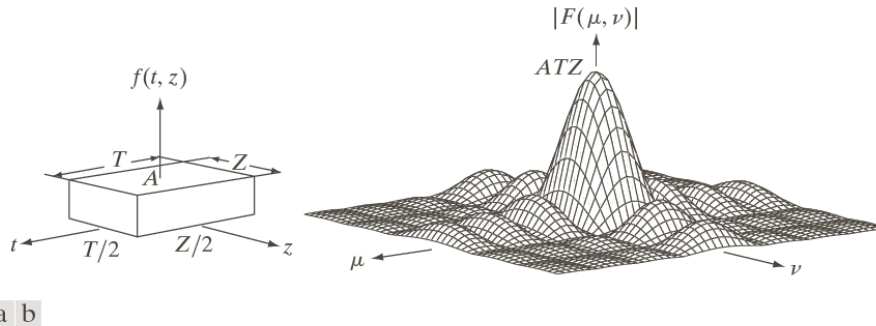
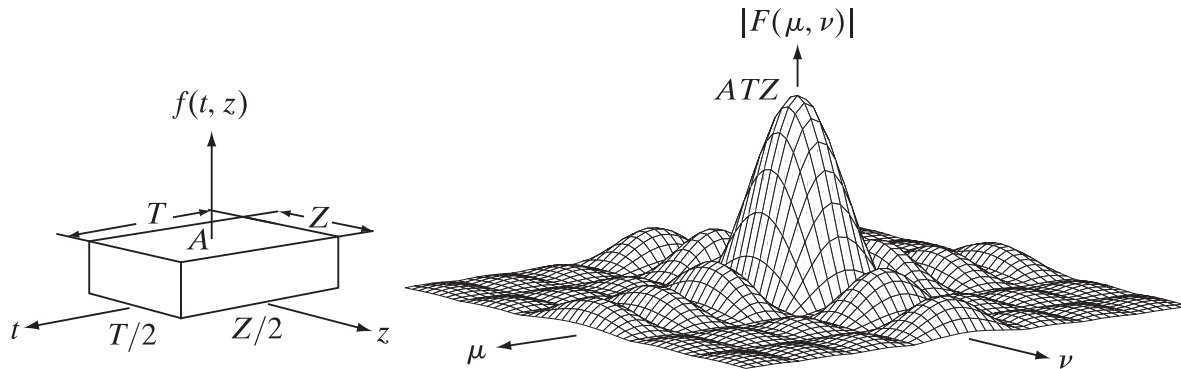


FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t -axis, so the spectrum is more “contracted” along the μ -axis. Compare with Fig. 4.4.

تبدیل فوریه‌ی دوبعدی

مثال



$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-Z/2}^{Z/2} A e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

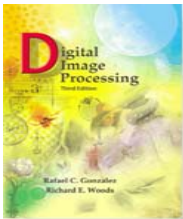
$$= ATZ \left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right] \left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right]$$

$$|F(\mu, \nu)| = ATZ \left| \frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right| \left| \frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right|$$

نمونه برداری دوبعدی و قضیه‌ی نمونه برداری دوبعدی

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

$$\frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{\max}$$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

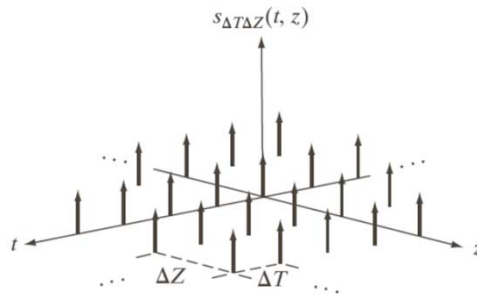
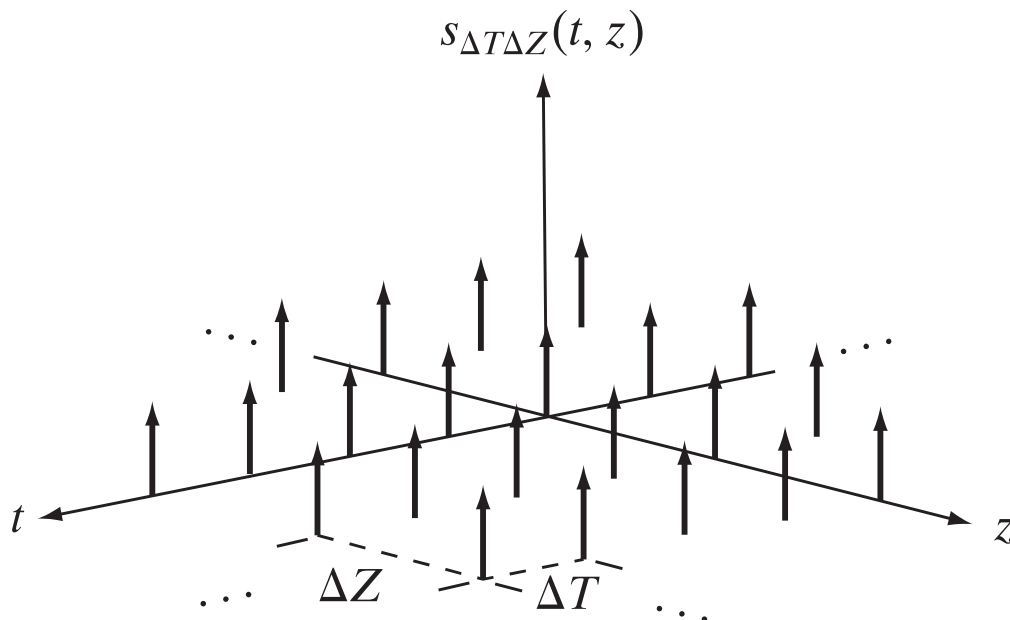
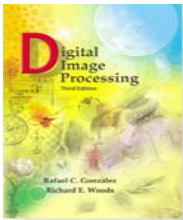


FIGURE 4.14
Two-dimensional
impulse train.

قطار ضربه‌ی دوبعدی



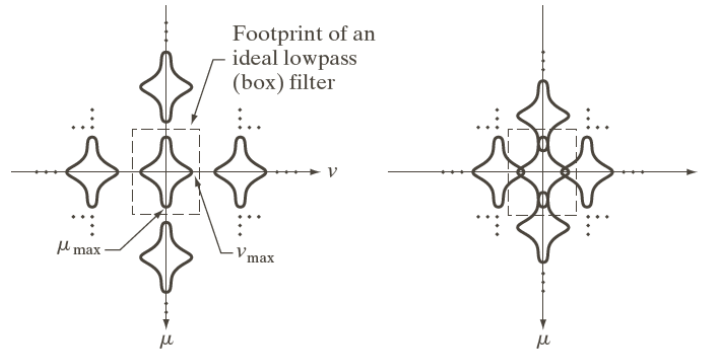


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

FIGURE 4.15

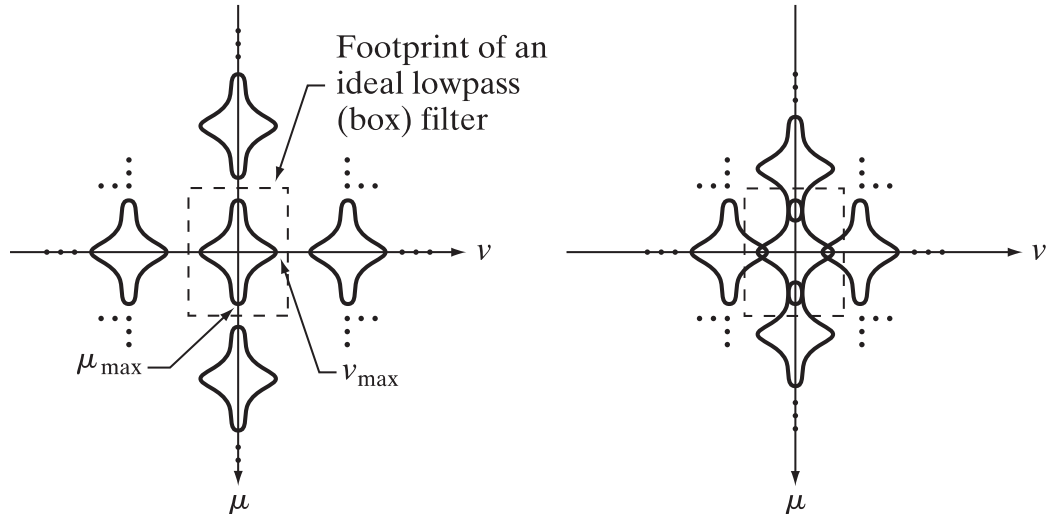
Two-dimensional Fourier transforms of (a) an over-sampled, and (b) under-sampled band-limited function.

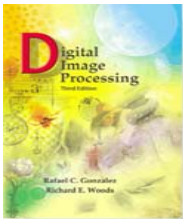
نمونه برداری دوبعدی و قضیه‌ی نمونه برداری دوبعدی

مثال

a b

Two-dimensional Fourier transforms of (a) an over-sampled, and (b) under-sampled band-limited function.





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

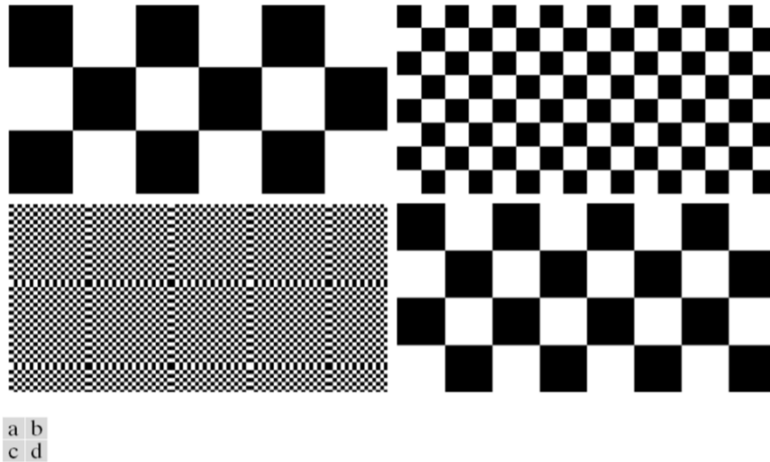


FIGURE 4.16 Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.

آلیاسینگ در تصویر

مثال

ALIASING IN IMAGES

(۲)

طول و عرض مربع‌ها = 6 پیکسل
آلیاسینگ ناچیز است و با چشم دیده نمی‌شود.



(۱)

طول و عرض مربع‌ها = 16 پیکسل
آلیاسینگ ناچیز است و با چشم دیده نمی‌شود.



(۴)

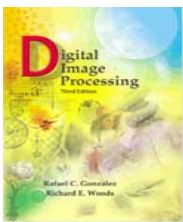
طول و عرض مربع‌ها = 0.4798 پیکسل
آلیاسینگ قابل توجه است.
این تصویر به ظاهر تصویری عادی دیده می‌شود.



(۳)

طول و عرض مربع‌ها = 0.9174 پیکسل
آلیاسینگ قابل توجه است.





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b c

FIGURE 4.17 Illustration of aliasing on resampled images. (a) A digital image with negligible visual aliasing. (b) Result of resizing the image to 50% of its original size by pixel deletion. Aliasing is clearly visible. (c) Result of blurring the image in (a) with a 3×3 averaging filter prior to resizing. The image is slightly more blurred than (b), but aliasing is no longer objectionable. (Original image courtesy of the Signal Compression Laboratory, University of California, Santa Barbara.)

آلیاسینگ در تصویر

آلیاسینگ در نمونه برداری مجدد: مثال

ALIASING IN RESAMPLED IMAGES



(۱)

یک تصویر دیجیتال با آلیاسینگ بصری ناچیز



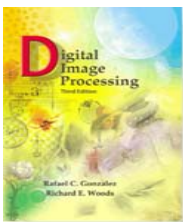
(۲)

حاصل تغییر اندازه‌ی تصویر (۱) تا ۵۰٪
با حذف پیکسل‌ها
آلیاسینگ به وضوح دیده می‌شود.



(۳)

حاصل بلارسازی تصویر (۱) با فیلتر
متوسطگیری ۳×۳ پیش از تغییر اندازه.
تصویر نسبت به (۲) مات‌تر شده است، اما
آلیاسینگ دیگر خیلی قابل توجه نیست.

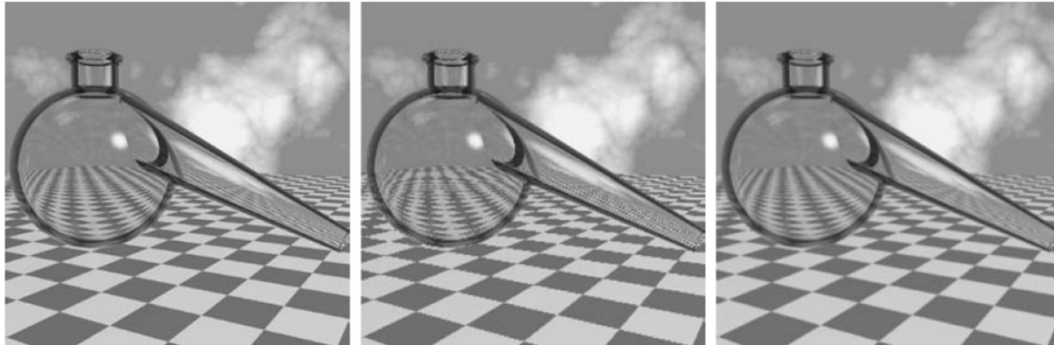


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



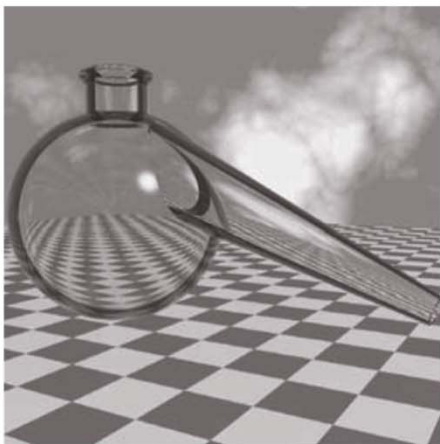
a b c

FIGURE 4.18 Illustration of jaggies. (a) A 1024×1024 digital image of a computer-generated scene with negligible visible aliasing. (b) Result of reducing (a) to 25% of its original size using bilinear interpolation. (c) Result of blurring the image in (a) with a 5×5 averaging filter prior to resizing it to 25% using bilinear interpolation. (Original image courtesy of D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

آلیاسینگ در تصویر

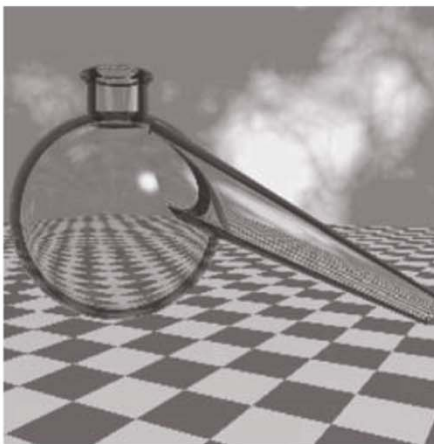
آلیاسینگ در نمونه برداری مجدد: مثال

ALIASING IN RESAMPLED IMAGES



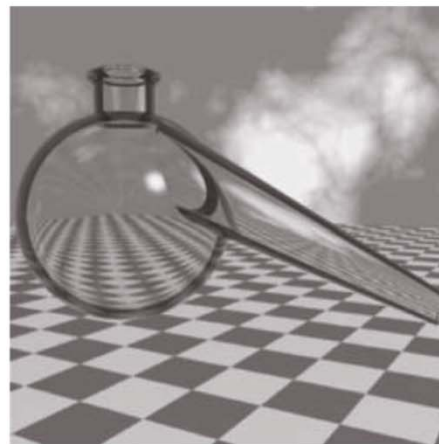
(۱)

یک تصویر دیجیتال 1024×1024
صحنه تولید شده با کامپیوتر
با آلیاسینگ بصری ناچیز



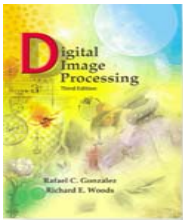
(۲)

حاصل تغییر اندازه‌ی تصویر (۱) تا ۲۵٪
با استفاده از درون‌یابی دوخطی.
آلیاسینگ تاحدی دیده می‌شود.



(۳)

حاصل بلارسازی تصویر (۱) با فیلتر
متوسطگیری 5×5 پیش از تغییر اندازه.
تصویر نسبت به (۲) مات‌تر شده است، اما
آلیاسینگ دیگر خیلی قابل توجه نیست.

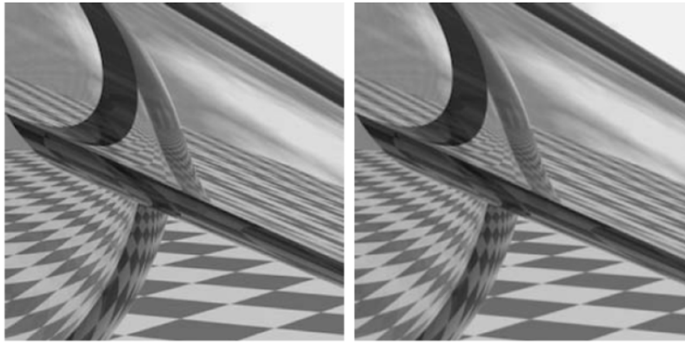


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

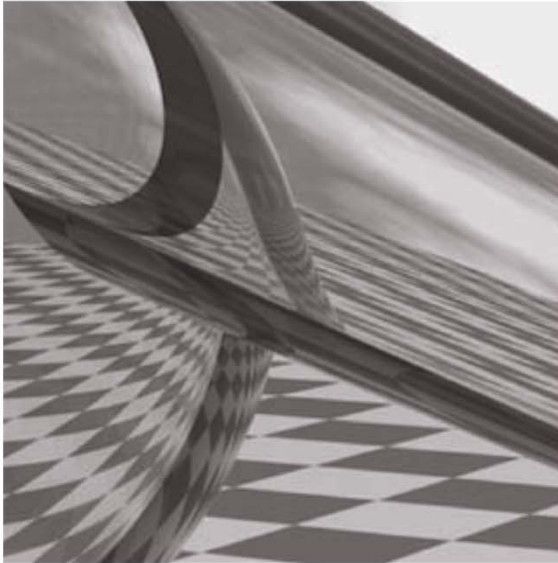


a b

FIGURE 4.19 Image zooming. (a) A 1024×1024 digital image generated by pixel replication from a 256×256 image extracted from the middle of Fig. 4.18(a). (b) Image generated using bi-linear interpolation, showing a significant reduction in jaggies.

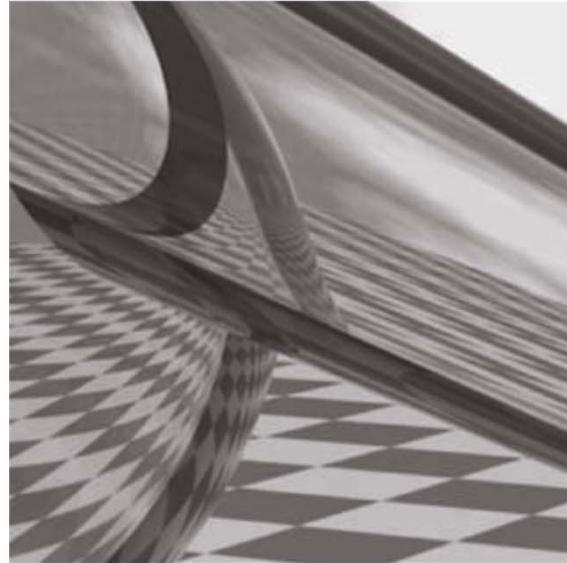
آلیاسینگ در تصویر

آلیاسینگ در بزرگ‌نمایی تصویر: مثال

ALIASING IN ZOOMING IMAGES

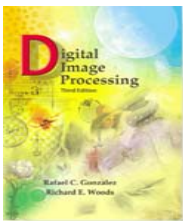
(۱)

یک تصویر دیجیتال 1024×1024
تولید شده از یک تصویر 256×256



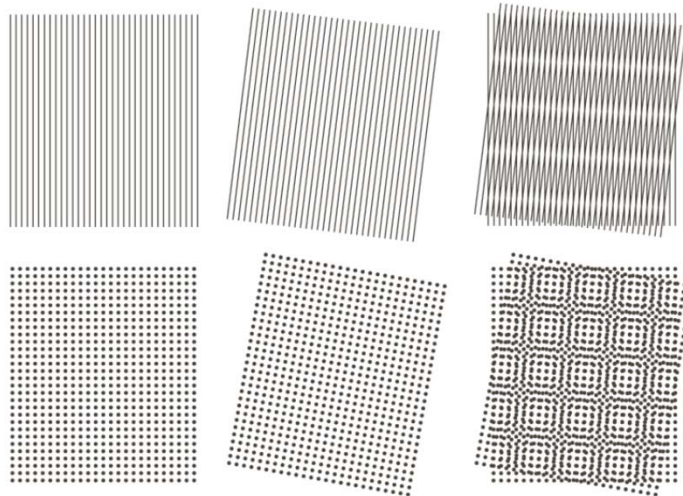
(۲)

تولید تصویر با استفاده از درونیابی دوخطی
کاهش قابل توجهی در دندانه‌ای شدن دیده می‌شود.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



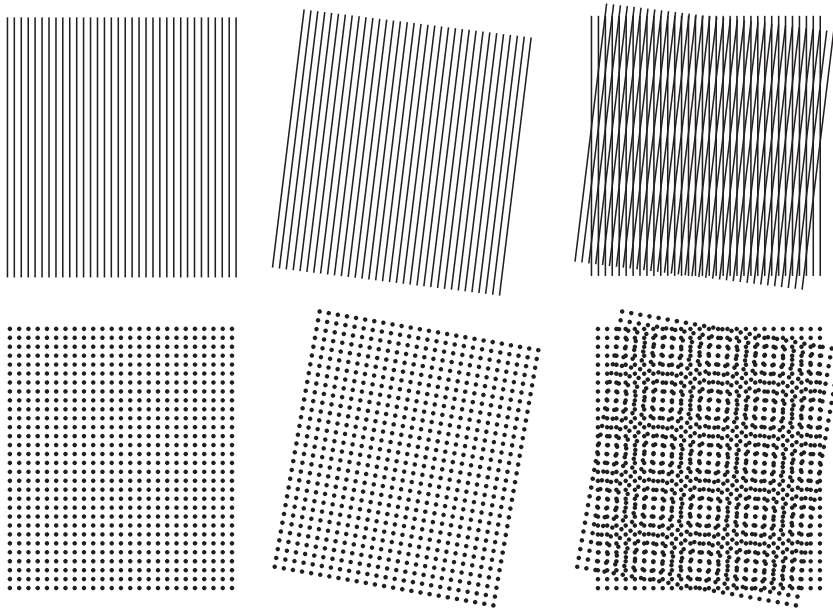
a	b	c
d	e	f

FIGURE 4.20

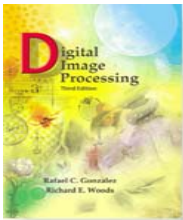
Examples of the moiré effect. These are ink drawings, not digitized patterns. Superimposing one pattern on the other is equivalent mathematically to multiplying the patterns.

اثر مویره

مثال

MOIRÉ EFFECT

نمونه‌هایی از اثر مویره:
 قرارگیری یک الگو روی الگوی دیگر،
 به لحاظ ریاضی معادل با ضرب الگوهاست.



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

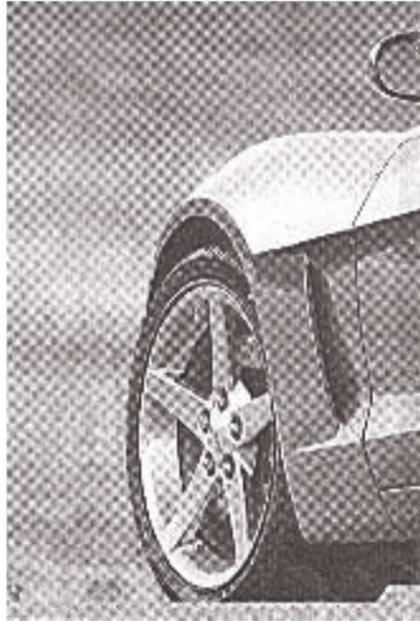


FIGURE 4.21

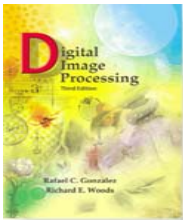
A newspaper image of size 246×168 pixels sampled at 75 dpi showing a moiré pattern. The moiré pattern in this image is the interference pattern created between the $\pm 45^\circ$ orientation of the halftone dots and the north-south orientation of the sampling grid used to digitize the image.

اثر مویره

مثال

MOIRÉ EFFECT

یک تصویر روزنامه با اندازه‌ی 246×168 پیکسل نمونه‌برداری شده در 75 dpi .
الگوی مویره در این تصویر، تداخل الگوهای ایجاد شده بین جهت‌های $\pm 45^\circ$ از نقاط هاف‌تون
و جهت شمالی-جنوبی گرید نمونه‌برداری مورد استفاده برای دیجیتال‌سازی تصویر است.



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

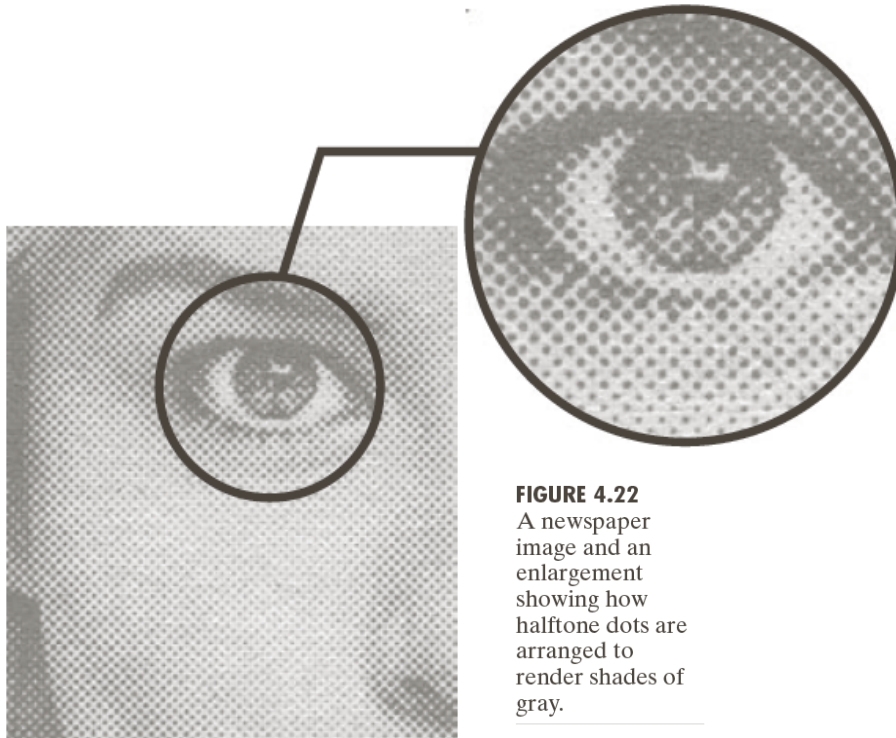
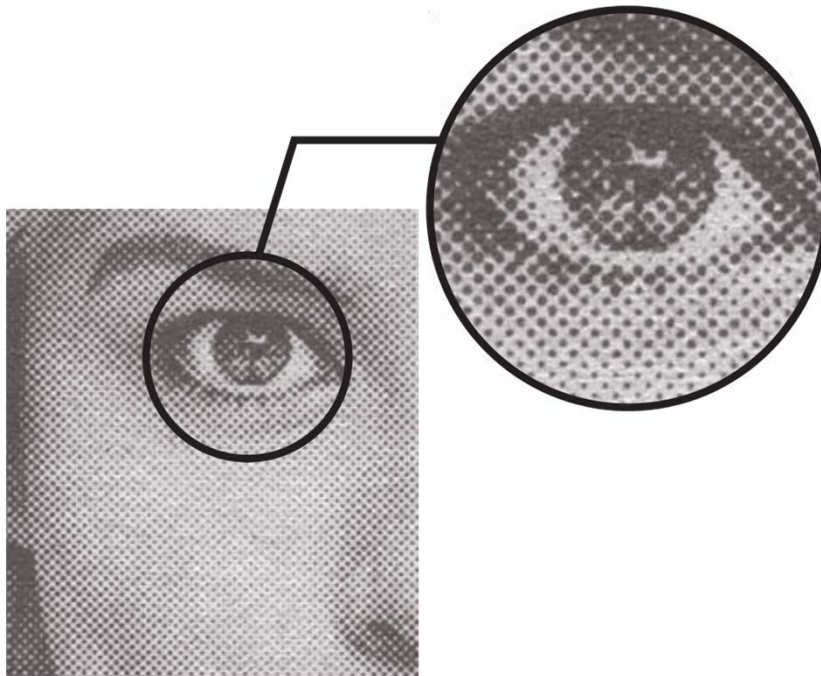


FIGURE 4.22

A newspaper image and an enlargement showing how halftone dots are arranged to render shades of gray.

اثر مویره

مثال

MOIRÉ EFFECT

یک تصویر روزنامه و بزرگنمایی آن
نشان دهنده‌ی اینکه چگونه نقاط هافتون کنار هم قرار می‌گیرند تا سایه‌های خاکستری را تولید کنند.

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

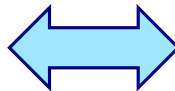
حالت گسسته

Discrete Case

تبدیل معکوس فوری‌ی دو-بعدی

Two-dimensional Inverse Fourier Transform

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

for $x = 0, 1, 2, \dots, M-1, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 

تبدیل فوری‌ی دو-بعدی

Two-dimensional Fourier Transform

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ u, v : the transform or frequency variables x, y : the spatial or image variables

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خصوصیات

$$|F(u, v)| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{\frac{1}{2}}$$

اندازه / طیف

Magnitude / Spectrum

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

زاویه فاز / طیف فاز

Phase Angle / Phase Spectrum

طیف توان

Power Spectrum

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$R(u, v) = \Re\{F(u, v)\}$$

$$I(u, v) = \Im\{F(u, v)\}$$

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خصوصیات

$$F\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right] = F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (\text{shift})$$

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \quad (\text{average})$$

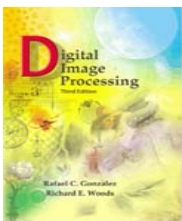
$$F(u,v) = F^*(-u,-v) \quad (\text{conjugate symmetric})$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| \quad (\text{symmetric})$$

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

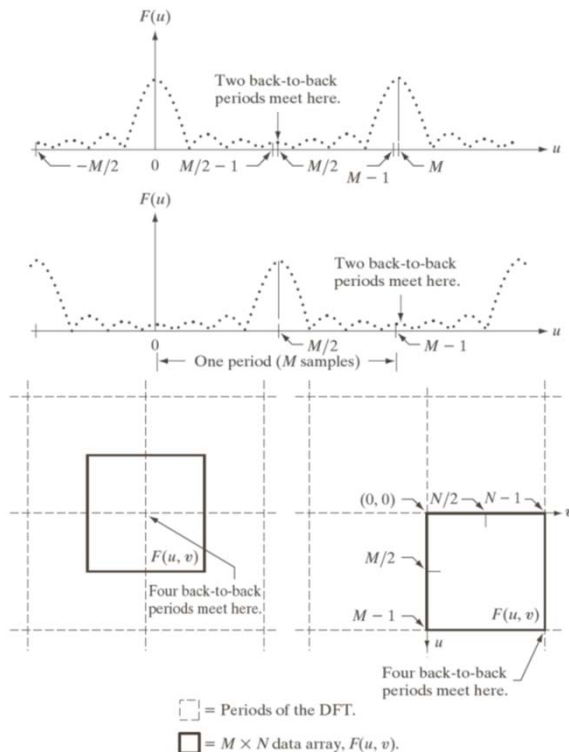
۶

برخی
خواص
تبدیل
فوریه
گسسته
دوبعدی



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a
b
c d

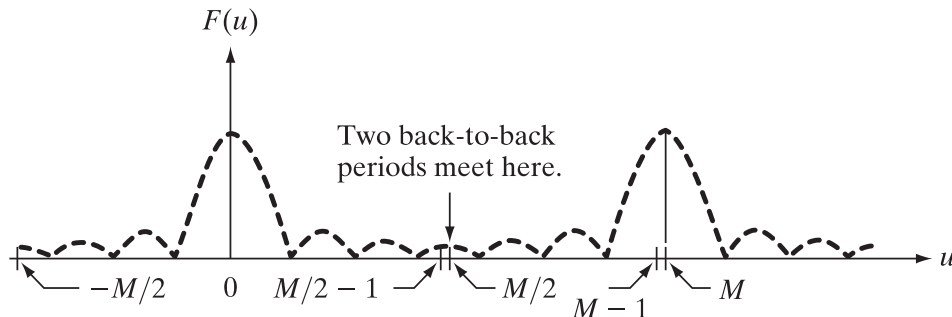
FIGURE 4.23 Centering the Fourier transform. (a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods. (b) Shifted DFT obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ before computing $F(u)$. (c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods. (d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی یک‌بعدی

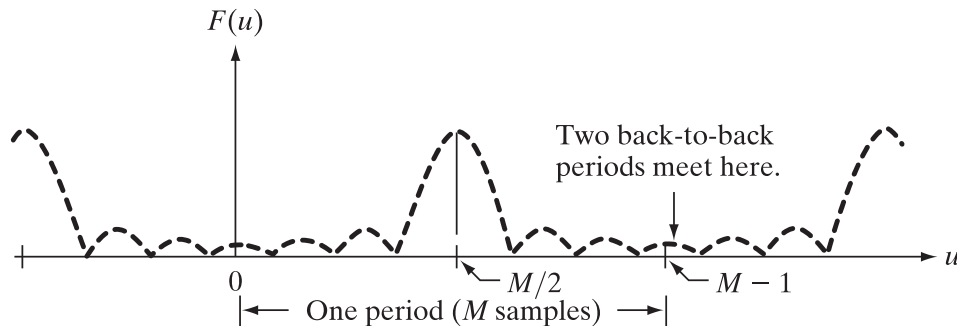
انتقال تبدیل فوریه به مرکز

CENTERING THE FOURIER TRANSFORM

(a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods.



(b) Shifted DFT obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ before computing $F(u)$.

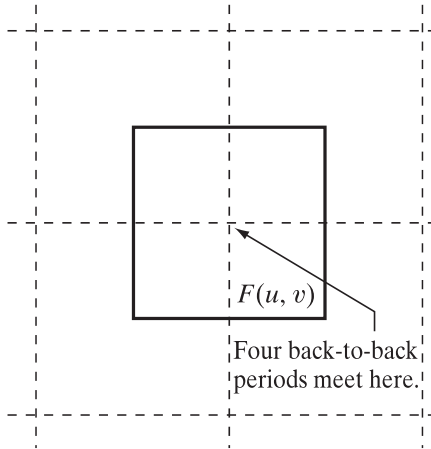


تبدیل فوریه ی گسسته ی دوبعدی

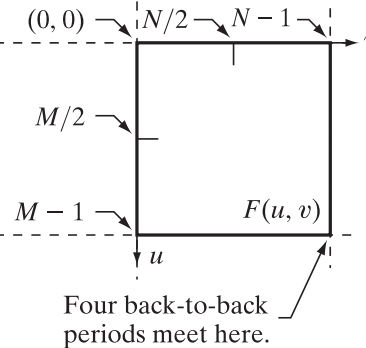
انتقال تبدیل فوریه به مرکز

CENTERING THE FOURIER TRANSFORM

(c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods.



(d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).



$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (4.5-15)$$

$\square$ = Periods of the DFT.

$\square$ = $M \times N$ data array, $F(u, v)$.

تبدیل فوریه ی گسسته

خواص تناوب، تقارن، و پشت-به-پشت

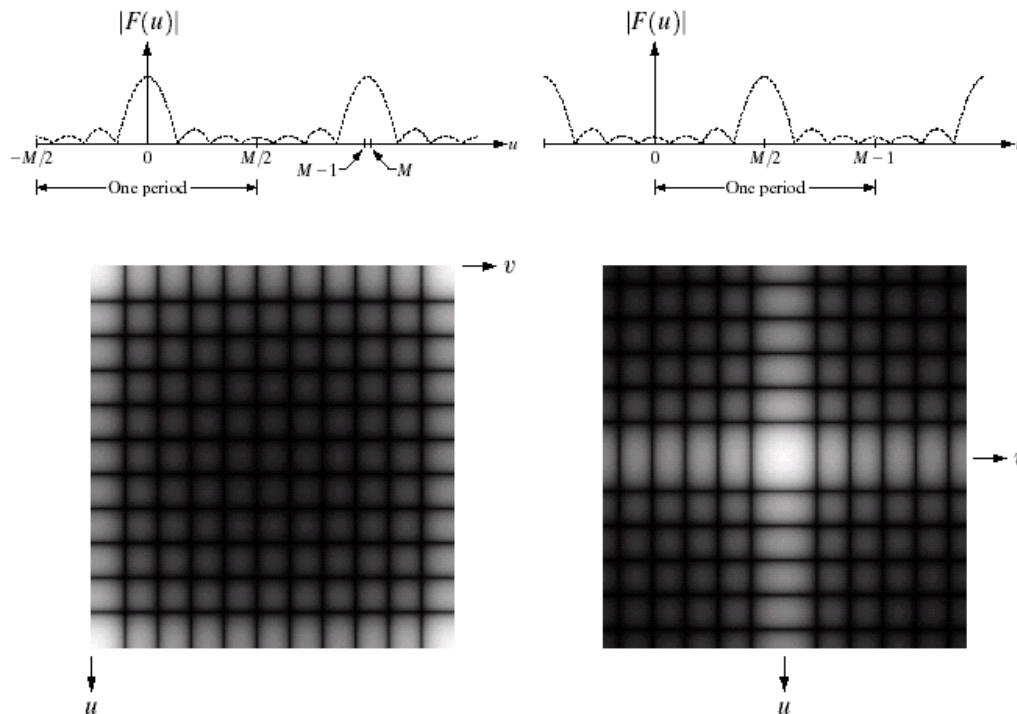
PERIODICITY, SYMMETRY, AND BACK-TO-BACK PROPERTIES

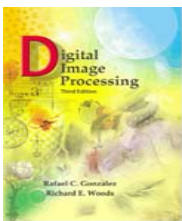
(a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M - 1]$.

(b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval.

(c) Fourier spectrum of an image, showing the same back-to-back properties as (a), but in two dimensions.

(d) Centered Fourier spectrum.





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	$\Leftrightarrow F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	$\Leftrightarrow F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and odd

TABLE 4.1 Some symmetry properties of the 2-D DFT and its inverse. $R(u, v)$ and $I(u, v)$ are the real and imaginary parts of $F(u, v)$, respectively. The term *complex* indicates that a function has nonzero real and imaginary parts.

[†]Recall that x, y, u , and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y , and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خصوصیات تقارن

Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	$\Leftrightarrow F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	$\Leftrightarrow F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and odd

2-D DFT and its inverse. $R(u, v)$ and $I(u, v)$ are the real and imaginary parts of $F(u, v)$, respectively. The term *complex* indicates that a function has nonzero real and imaginary parts.

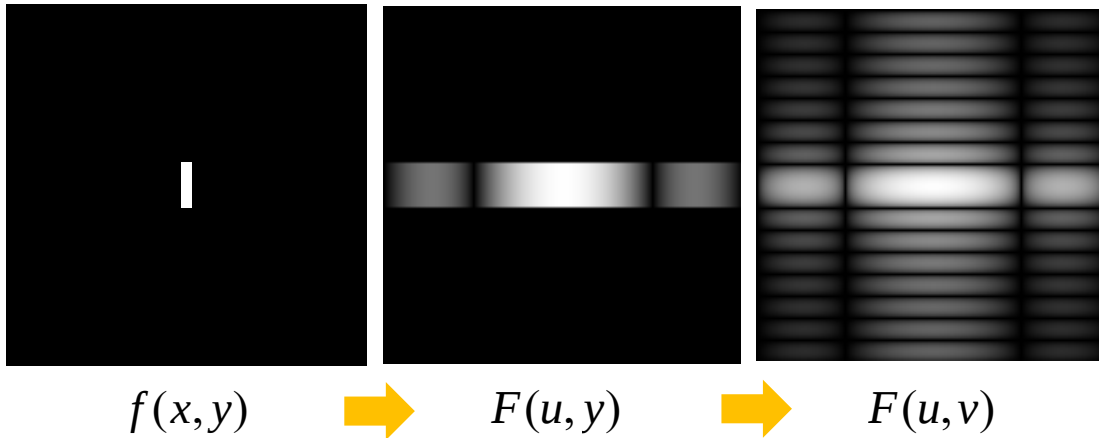
[†]Recall that x, y, u , and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y , and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

THE TWO-DIMENSIONAL DFT AND ITS INVERSE

DFT دوبعدی را می‌توان با انجام متوالی دو DFT یکبعدی محاسبه کرد:

محاسبه‌ی DFT یکبعدی هر سطر تصویر $f(x, y)$ $\leftarrow F(u, y)$
 محاسبه‌ی DFT یکبعدی هر ستون تصویر $F(u, y)$ $\leftarrow F(u, v)$

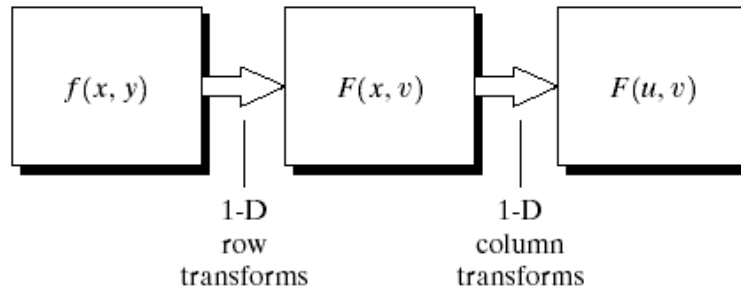


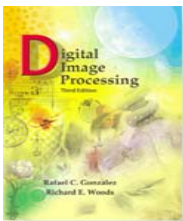
تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

خاصیت جداپذیری

SEPARABILITY

DFT دو بعدی را می‌توان با انجام متوالی دو DFT یک بعدی محاسبه کرد:





Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

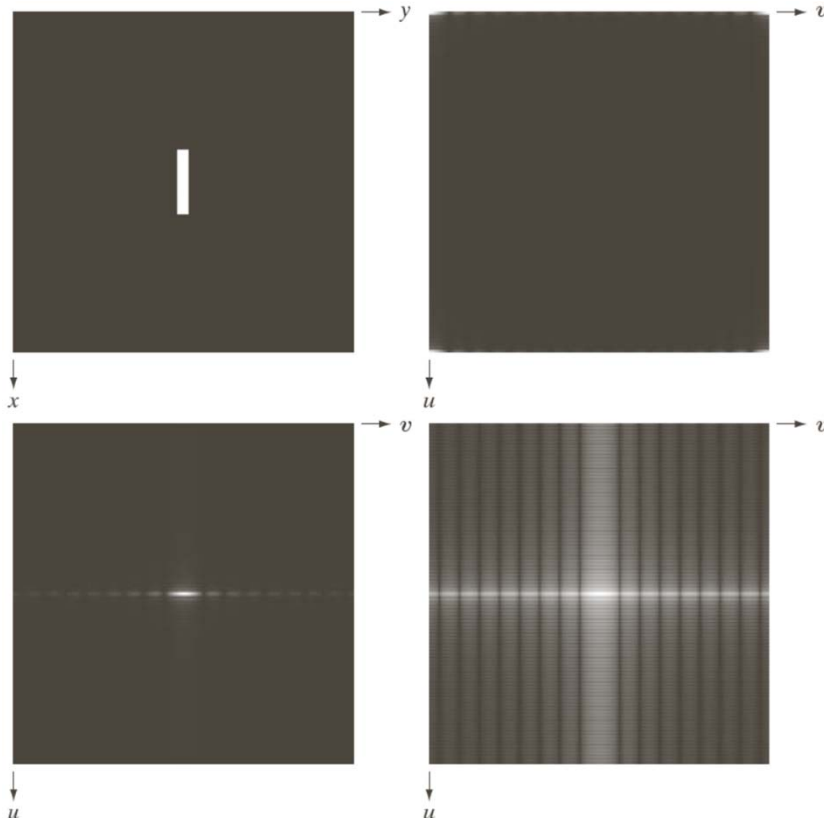
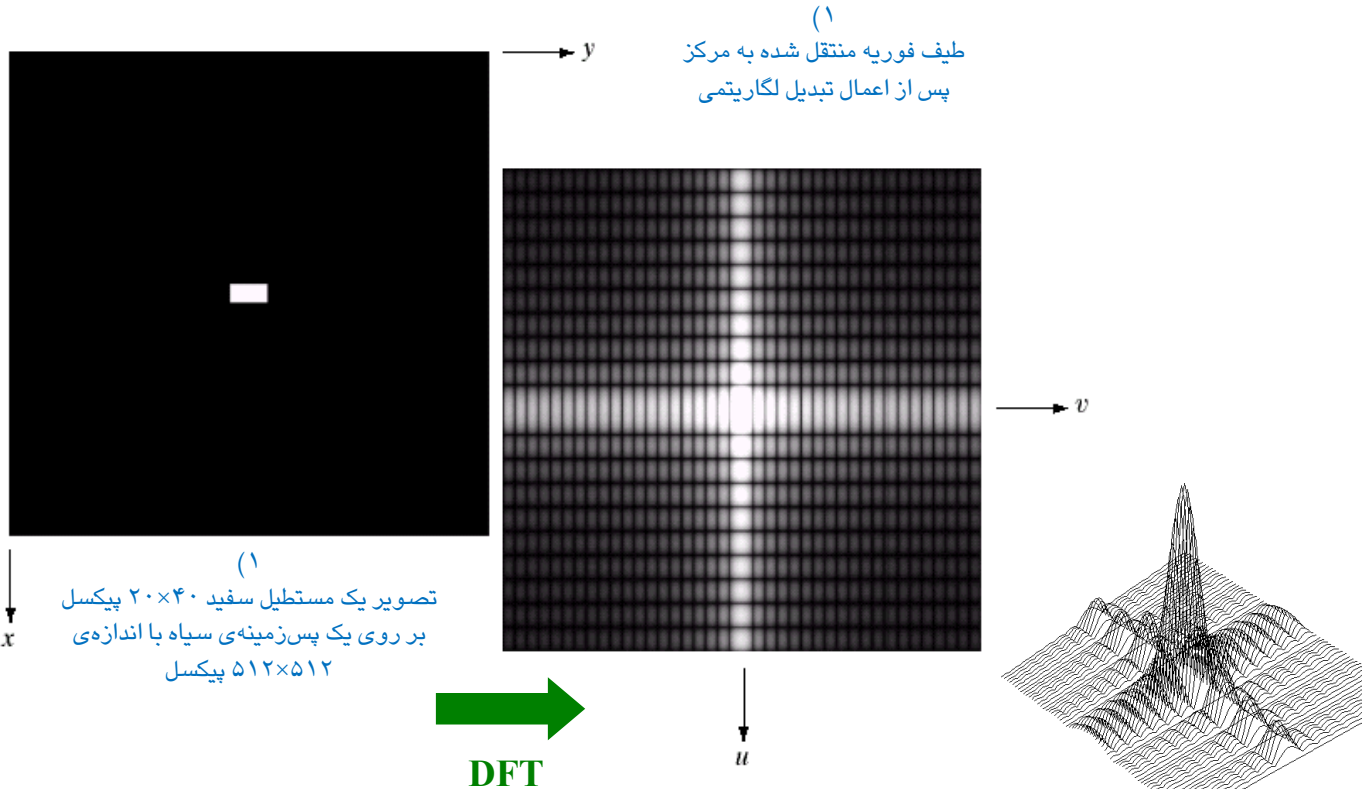


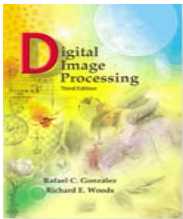
FIGURE 4.24

(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum.
(d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

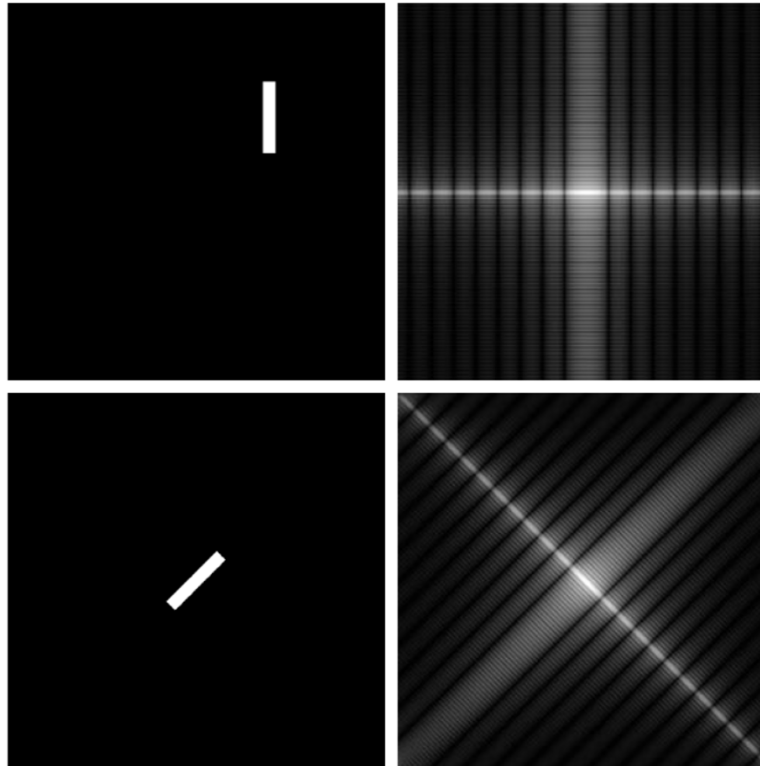
مثال

THE TWO-DIMENSIONAL DFT AND ITS INVERSE



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a	b
c	d

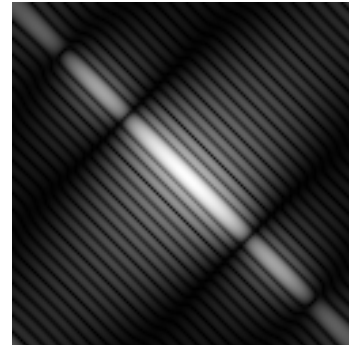
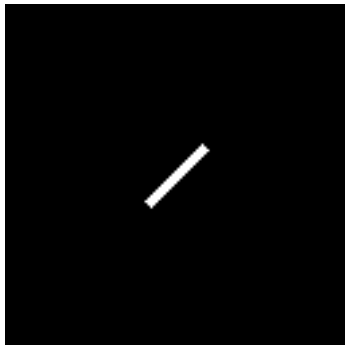
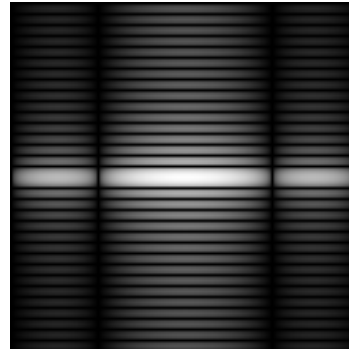
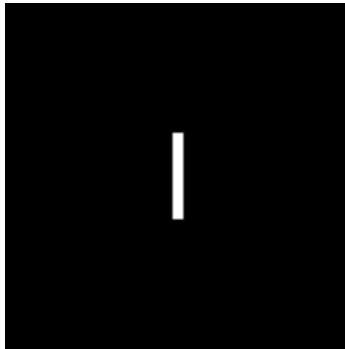
FIGURE 4.25

(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

خاصیت دوران در تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی

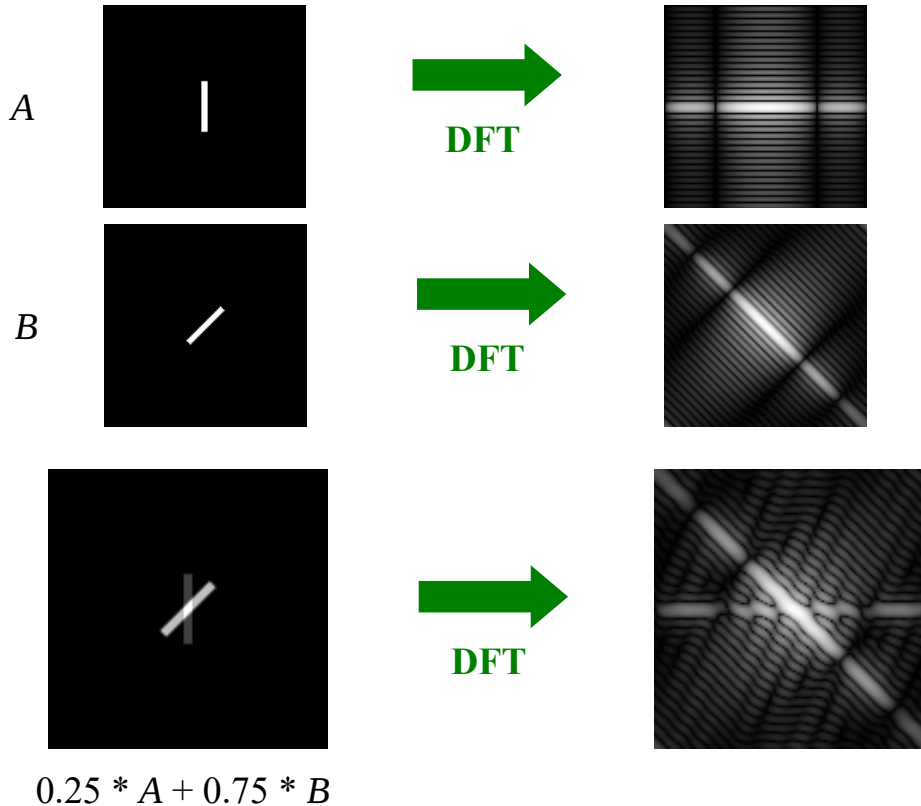
THE PROPERTY OF TWO-DIMENSIONAL DFT: ROTATION

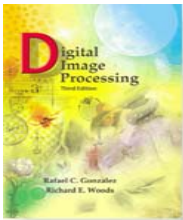


تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

خاصیت ترکیب خطی در تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی

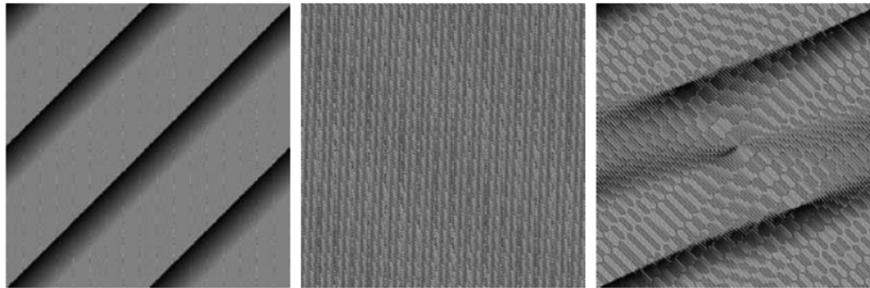
THE PROPERTY OF TWO-DIMENSIONAL DFT: LINEAR COMBINATION





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



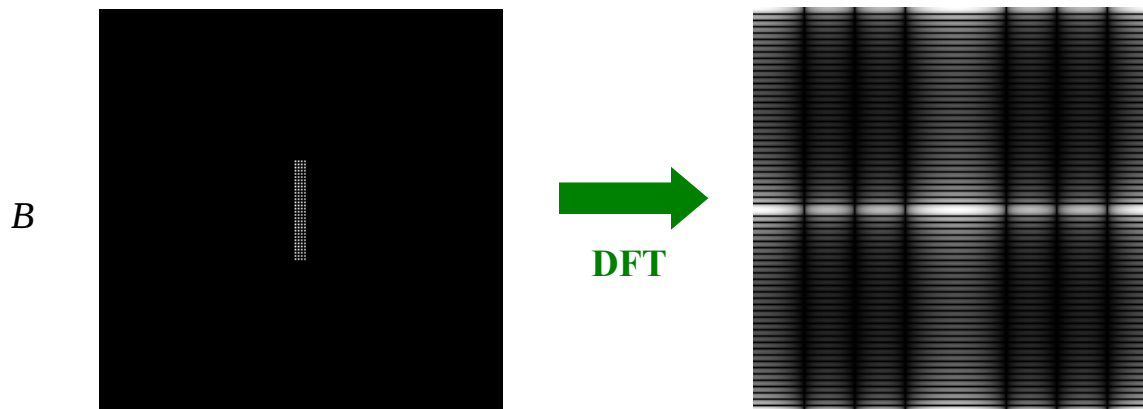
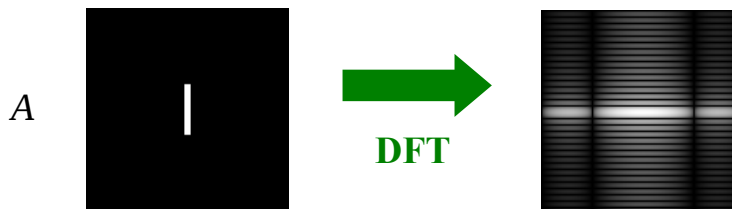
a b c

FIGURE 4.26 Phase angle array corresponding (a) to the image of the centered rectangle in Fig. 4.24(a), (b) to the translated image in Fig. 4.25(a), and (c) to the rotated image in Fig. 4.25(c).

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

خاصیت بسط در تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی

THE PROPERTY OF TWO-DIMENSIONAL DFT: EXPANSION



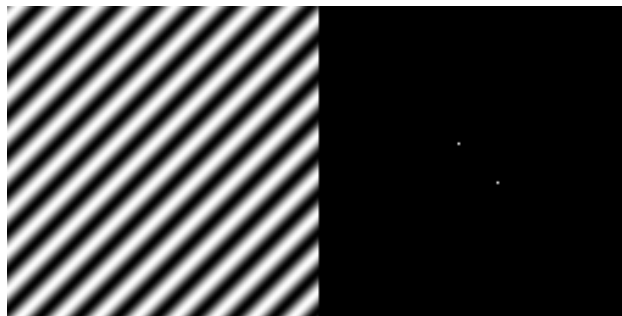
گسترش تصویر اصلی با ضریب n ($n = 2$)
 با پر کردن مقادیر جدید خالی با صفر
 DFT مشابهی را به دست می‌دهد.

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی برای توابع گوناگون

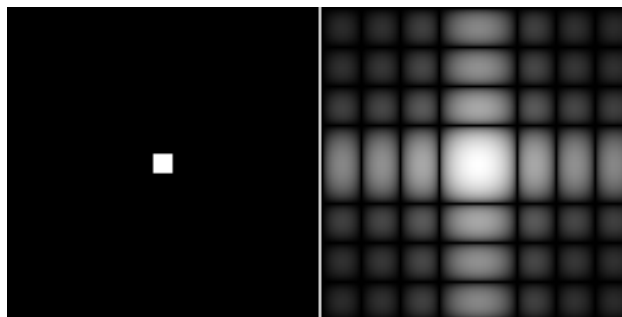
TWO-DIMENSIONAL DFT WITH DIFFERENT FUNCTIONS

موج سینوسی
Sine Wave



DFT

مستطیل
Rectangle

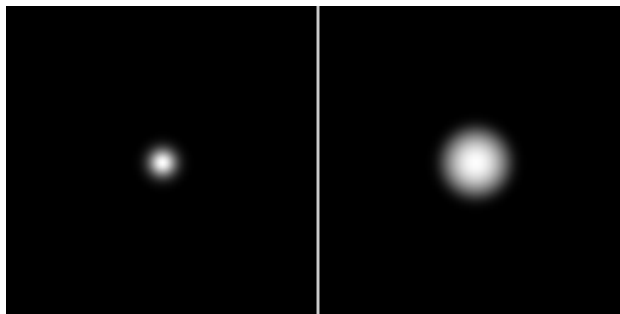


تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی برای توابع گوناگون

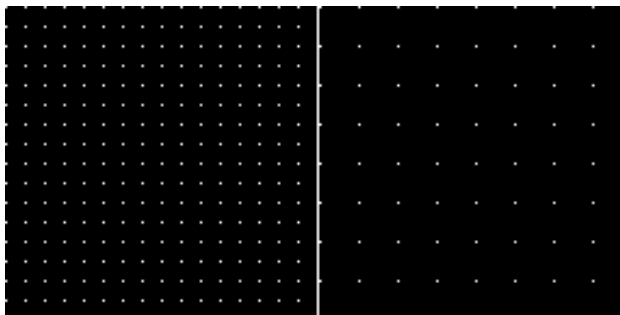
TWO-DIMENSIONAL DFT WITH DIFFERENT FUNCTIONS

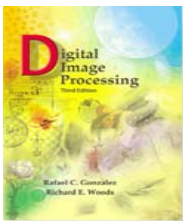
تابع گاوسی دوبعدی
2D Gaussian



DFT

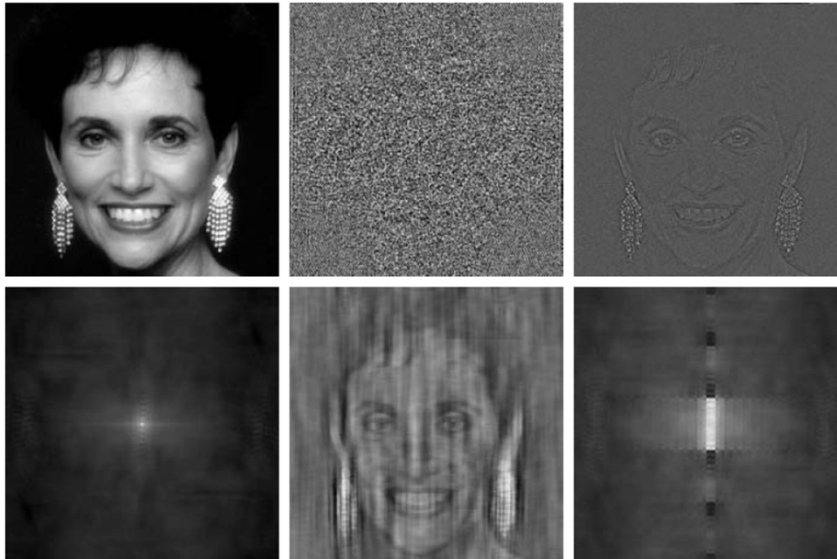
ضربه‌ها
Impulses





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a	b	c
d	e	f

FIGURE 4.27 (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی و وارون آن

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی برای توابع گوناگون

TWO-DIMENSIONAL DFT WITH DIFFERENT FUNCTIONS

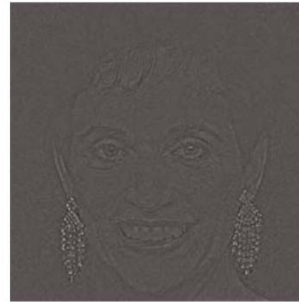
(۱)
یک تصویر



(۲)
زاویه فاز تبدیل فوریه



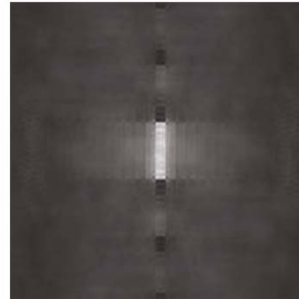
(۳) تصویر بازسازی شده
فقط با استفاده از زاویه فاز



(۴) تصویر بازسازی شده
فقط با استفاده از اندازه طیف



(۵) بازسازی بر اساس
زاویه‌ی فاز اما طیف مستطیل



(۶) بازسازی بر اساس طیف
اما زاویه فاز مستطیل

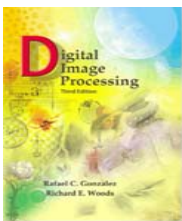
قضیه‌ی کانولوشن دوبعدی

THE 2-D CONVOLUTION THEOREM

$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \quad y = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$



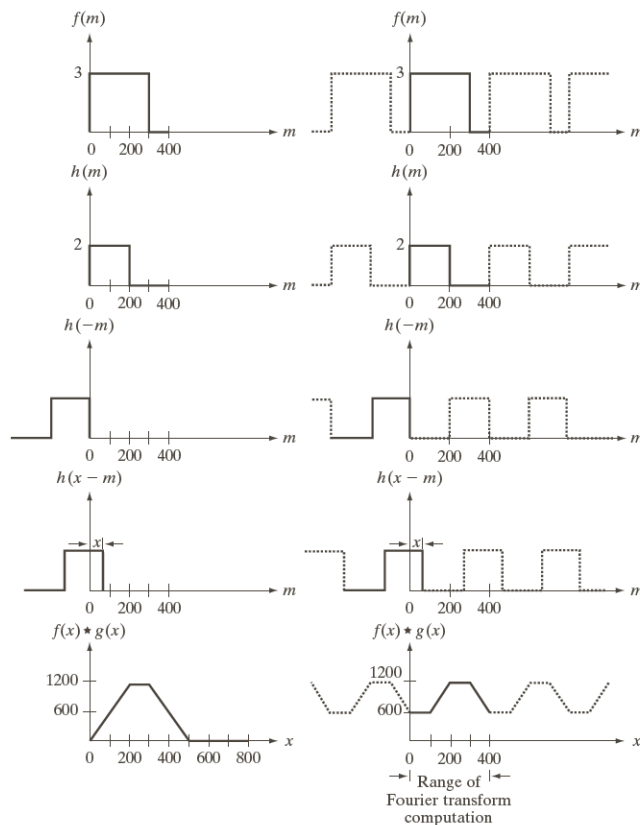
Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a f
b g
c h
d i
e j

FIGURE 4.28 Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.

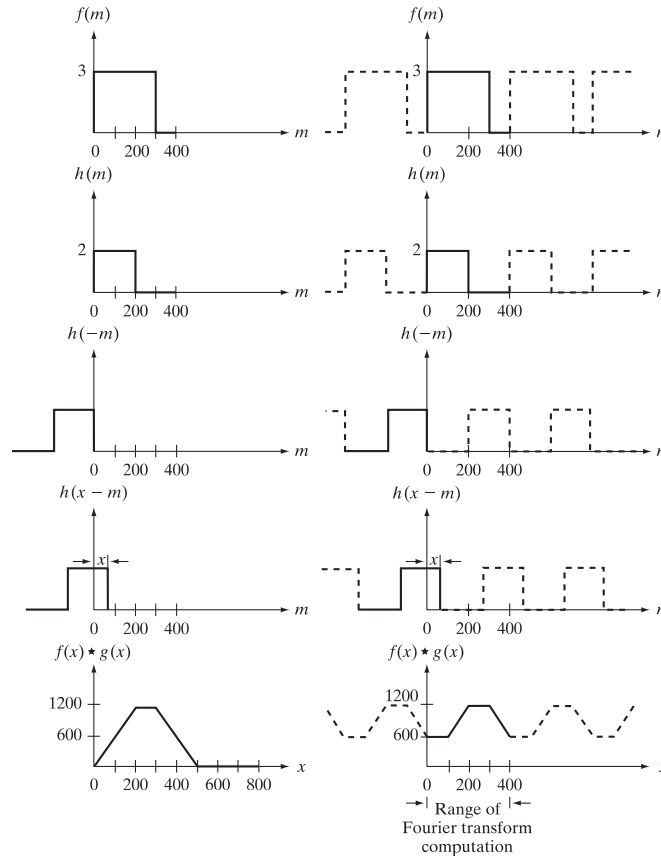
کانولوشن

مثال (یک بعدی)

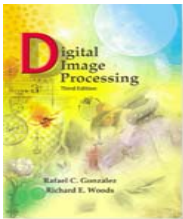
CONVOLUTION

$$f(x) * h(x) =$$

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m)$$



Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)

TABLE 4.2

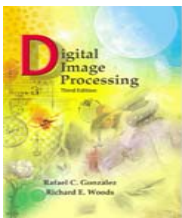
Summary of DFT definitions and corresponding expressions.

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خلاصه‌ی تعریف‌ها و فرمول‌ها (۱ از ۲)

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

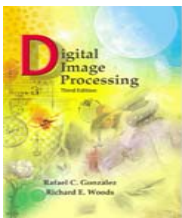
Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.

TABLE 4.2
(Continued)

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خلاصه‌ی تعریف‌ها و فرمول‌ها (۲ از ۲)

Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)

TABLE 4.3

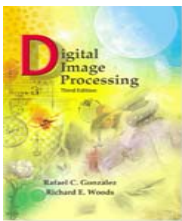
Summary of DFT pairs. The closed-form expressions in 12 and 13 are valid only for continuous variables. They can be used with discrete variables by sampling the closed-form, continuous expressions.

تبدیل فوریه ی گسسته ی دوبعدی

خلاصه ی جفت های DFT (۱ از ۲)

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.	
12) Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$.)	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) Gaussian	$A 2\pi \sigma^2 e^{-2\pi^2 \sigma^2 (t^2 + z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2 + \nu^2)/2\sigma^2} \quad (A \text{ is a constant})$

TABLE 4.3
(Continued)

[†]Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی دوبعدی

خلاصه‌ی جفت‌های DFT (۲ از ۲)

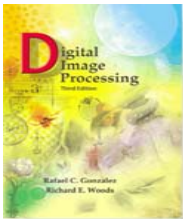
Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.	
12) Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$.)	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) Gaussian	$A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$ (A is a constant)

[†]Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۷

پایه‌های
فیلتر کردن
در
حوزه‌ی
فرکانس

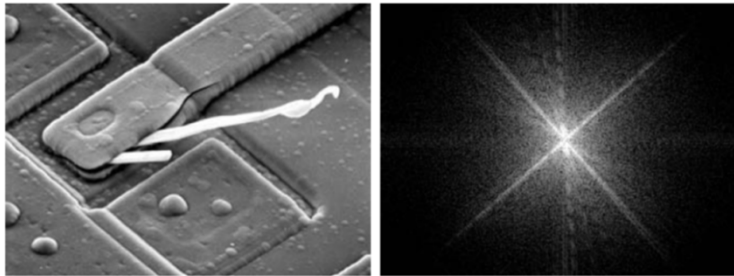


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



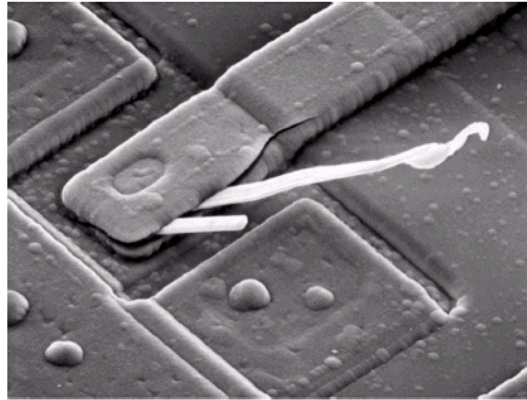
a b

FIGURE 4.29 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

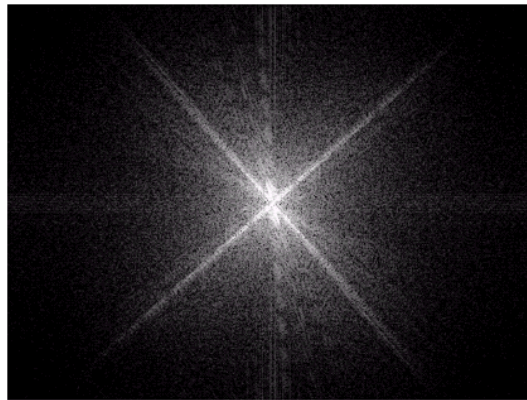
فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

FILTERING IN THE FREQUENCY DOMAIN

(۱) یک تصویر



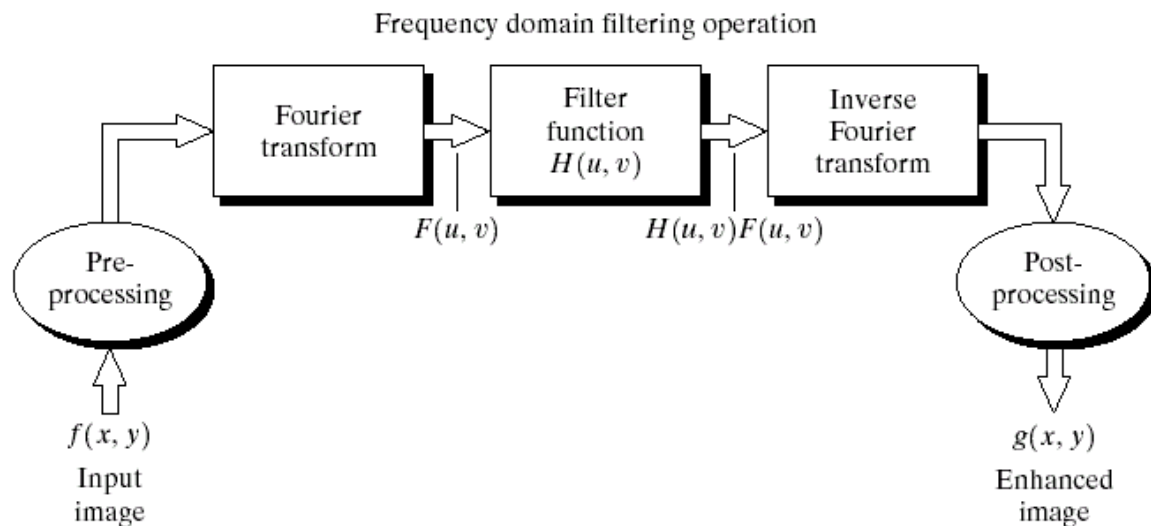
(۲) طیف فوریه



پایه‌های فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

گام‌های پایه برای فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

BASICS OF FILTERING IN THE FREQUENCY DOMAIN



پایه‌های فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

برخی فیلترهای پایه و توابع آنها

SOME BASIC FILTERS AND THEIR FUNCTIONS

فیلتر سوراخ‌کننده

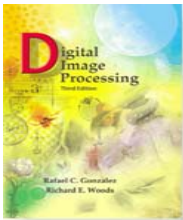
Notch Filter

فیلتر پایین‌گذر

Lowpass Filter

فیلتر بالاگذر

Highpass Filter



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

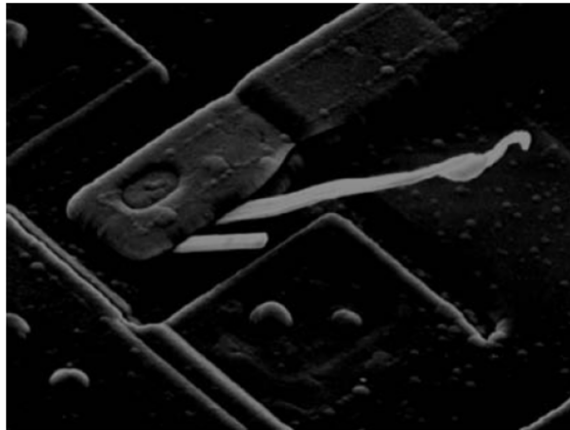


FIGURE 4.30
Result of filtering
the image in
Fig. 4.29(a) by
setting to 0 the
term $F(M/2, N/2)$
in the Fourier
transform.

فیلتر سوراخ‌کننده

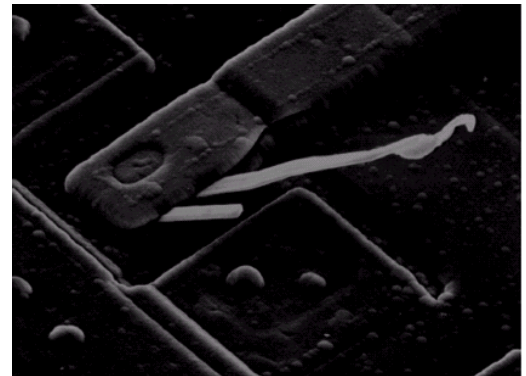
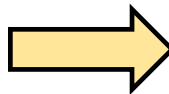
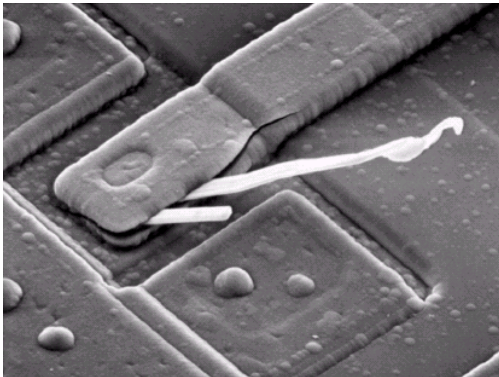
فیلتر ناچ

NOTCH FILTER

همه‌ی مقادیر $F(u,v)$ در فیلتر (فیلتر ناچ) ضرب می‌شوند:

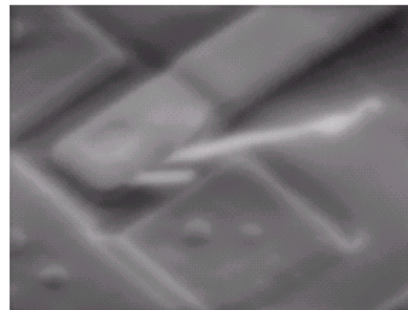
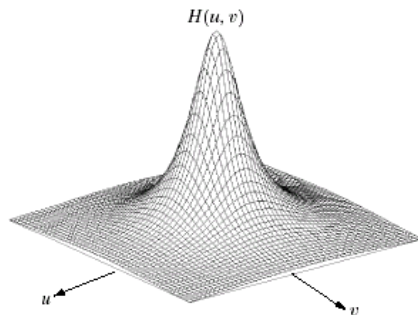
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } (u,v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

همه‌ی کاری که این فیلتر انجام می‌دهد، صفر کردن مؤلفه‌ی فرکانسی مرکزی است (که منجر به صفر شدن مقدار متوسط تصویر می‌شود) و سایر مؤلفه‌های فرکانسی تبدیل فوریه، دست‌نخورده می‌ماند.

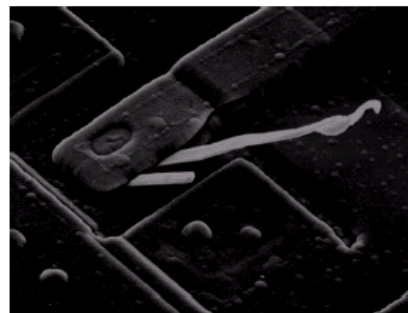
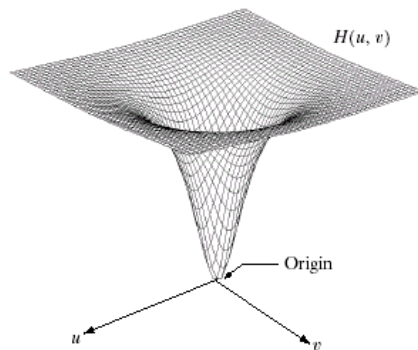


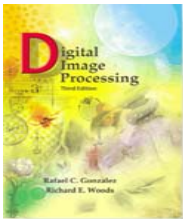
فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر

فیلتر پایین‌گذر
Lowpass Filter



فیلتر بالاگذر
Highpass Filter





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

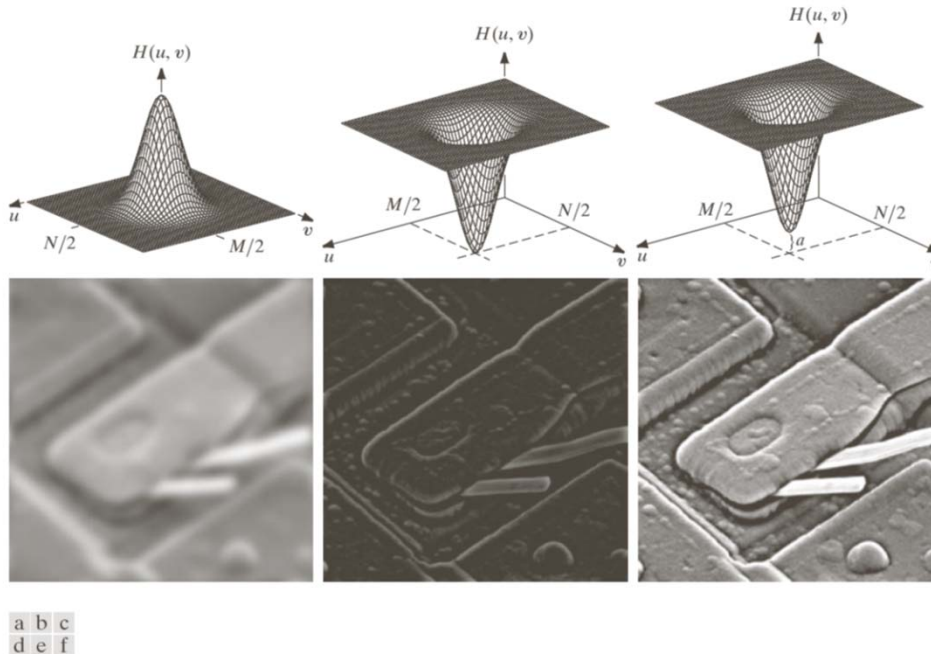
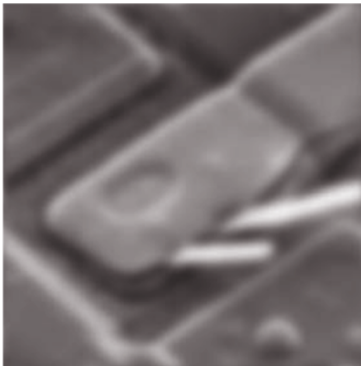
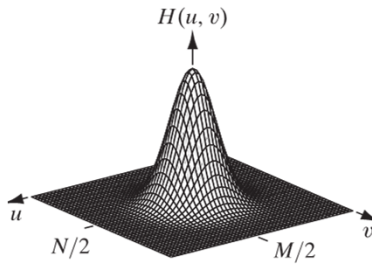


FIGURE 4.31 Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used $a = 0.85$ in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).

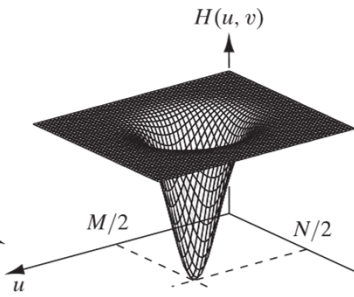
فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر

مثال

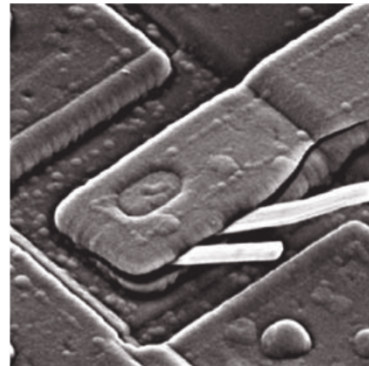
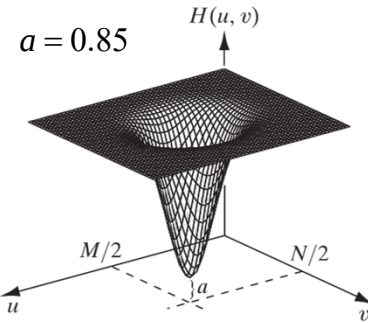
فیلتر پایین‌گذر
Lowpass Filter

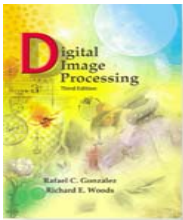


فیلتر بالاگذر
Highpass Filter



فیلتر بالاگذر
Highpass Filter





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

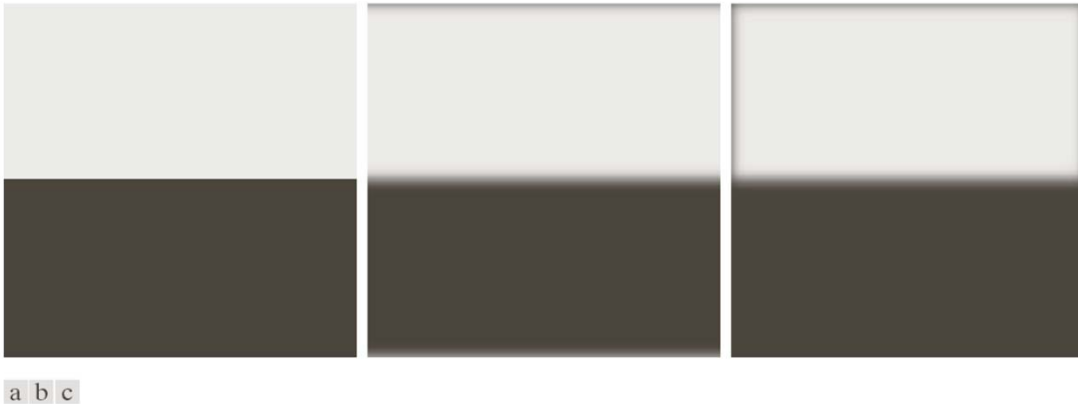


FIGURE 4.32 (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).

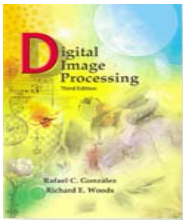
فیلترهای پایین‌گذر گاوسی

مثال



(۱) یک تصویر ساده

(۲) حاصل بلار کردن
با یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
بدون پدینگ(۳) حاصل بلار کردن
با یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
با پدینگ
تفاوت در ناحیه‌ی روشن لبه‌های عمودی



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

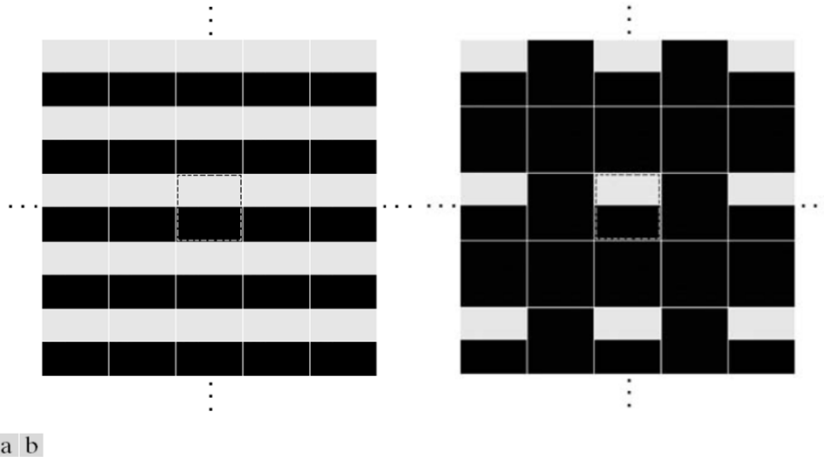
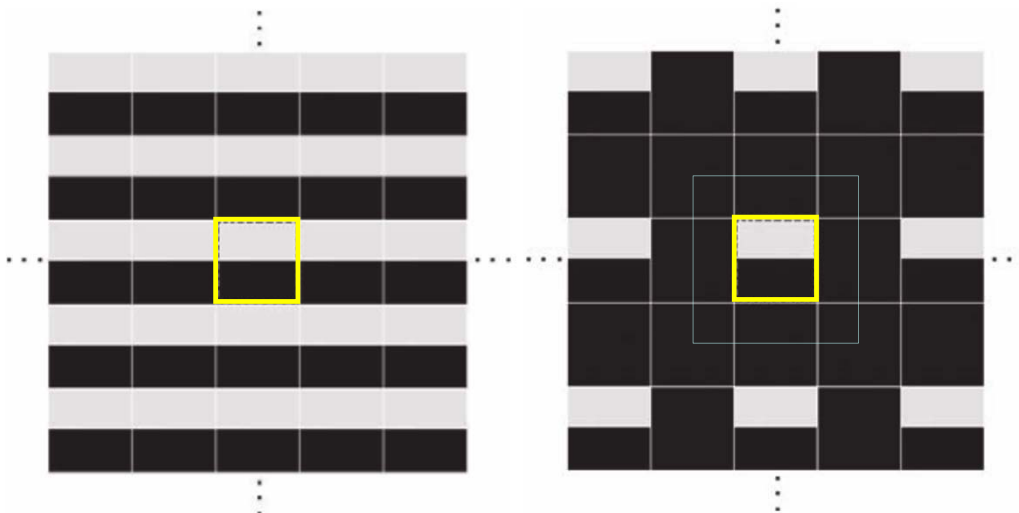


FIGURE 4.33 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

تناوب دوبعدی تصویر در تبدیل فوریه

مثال

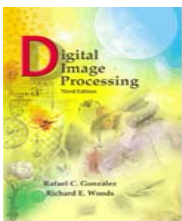


(۱) متناوب بودن
بدون پدینگ تصویر

(۲) متناوب بودن
پس از پدینگ تصویر با صفرها (سیاه)

تصویر اصلی، چهارگوش زرد رنگ در مرکز است.

خطوط سفید نازک در هر دو تصویر، برای وضوح بیشتر رسم شده‌اند و جزء تصویر نیستند.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

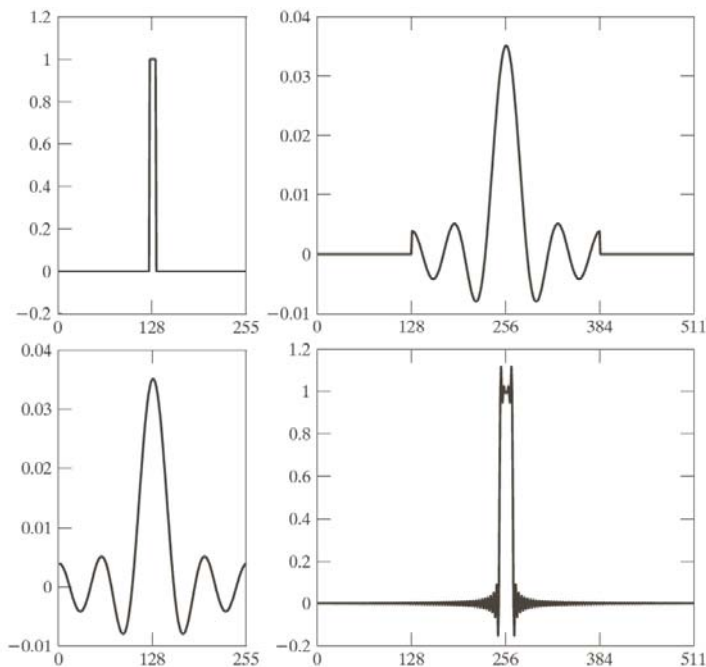


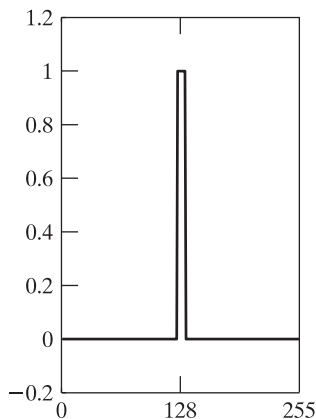
FIGURE 4.34

(a) Original filter specified in the (centered) frequency domain. (b) Spatial representation obtained by computing the IDFT of (a). (c) Result of padding (b) to twice its length (note the discontinuities). (d) Corresponding filter in the frequency domain obtained by computing the DFT of (c). Note the ringing caused by the discontinuities in (c). (The curves appear continuous because the points were joined to simplify visual analysis.)

پدینگ در حوزه فرکانس

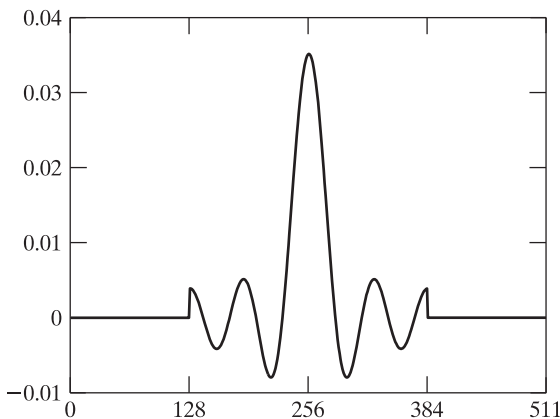
مشکل انجام پدینگ در حوزه فرکانس و اثر آن روی حوزه مکان

(۱) فیلتر اصلی
مشخص شده در
حوزه فرکانس
(با انتقال به مرکز)

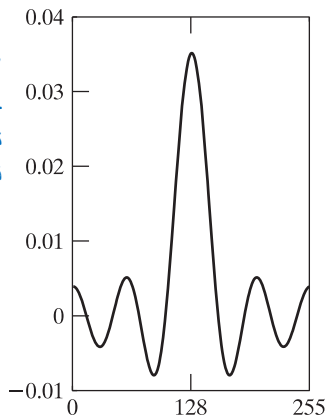


(۳) حاصل پدینگ (۲) با
صفر برای دو برابر
شدن طول آن

[به ناپیوستگی‌ها توجه
کنید.]

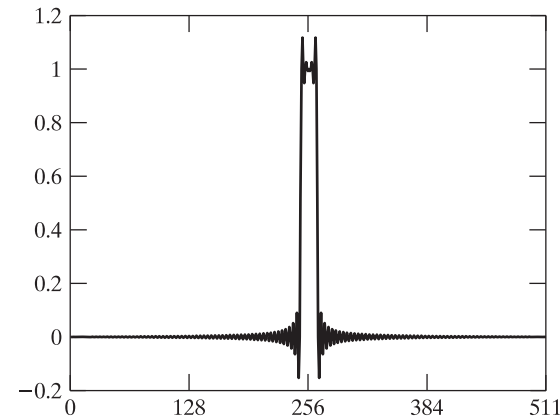


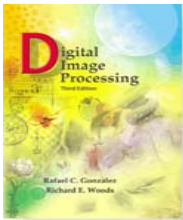
(۲) بازنمایی مکانی
حاصل از محاسبه‌ی
تبدیل فوری به معکوس
فیلتر فوق



(۴) فیلتر متناظر با (۳)
در حوزه فرکانس
حاصل از محاسبه‌ی
DFT

تفاوت با فیلتر اصلی:
فراجش‌ها و
فروجش‌های ناشی از
ناپیوستگی



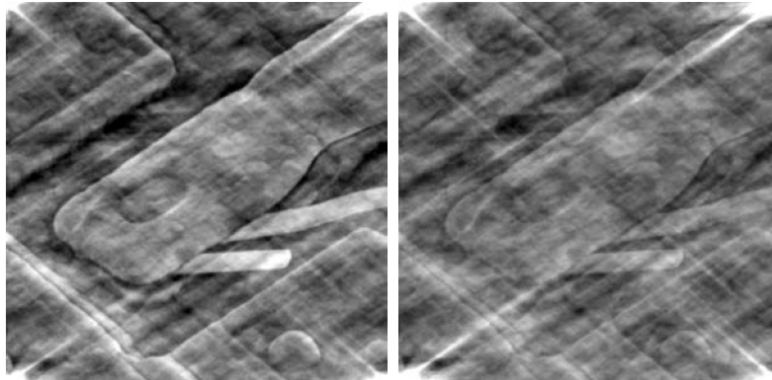


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



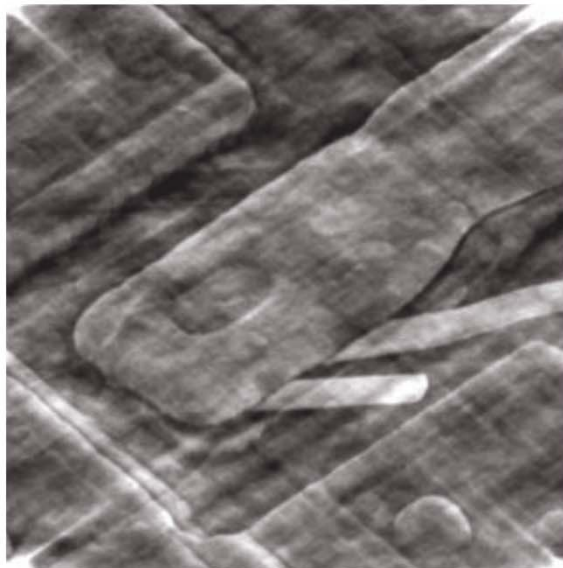
a b

FIGURE 4.35

(a) Image resulting from multiplying by 0.5 the phase angle in Eq. (4.6-15) and then computing the IDFT. (b) The result of multiplying the phase by 0.25. The spectrum was not changed in either of the two cases.

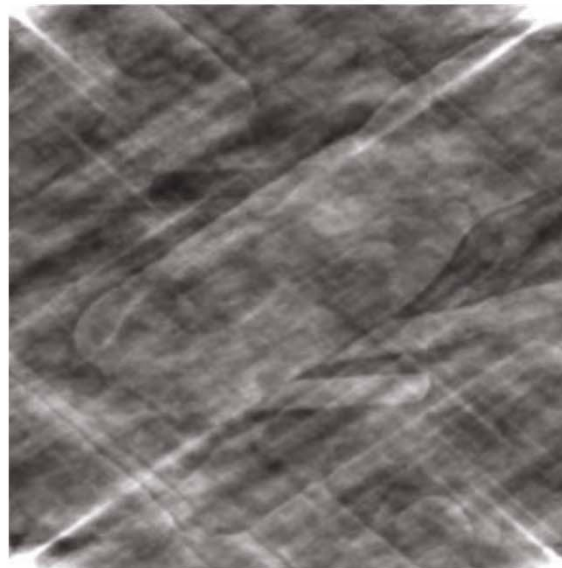
اثرات تغییر در فاز تبدیل فوریه

تغییرات اندک روی فاز می‌تواند اثرات شدیدی روی خروجی فیلتر شده ایجاد کند



۱) تصویر حاصل از ضرب 0.5 در زاویه‌ی فاز
و سپس محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی معکوس

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$



۲) تصویر حاصل از ضرب 0.25 در زاویه‌ی فاز
و سپس محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی معکوس
(در هر دو تصویر طیف اندازه بدون تغییر مانده است)

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

خلاصه‌ی گام‌ها

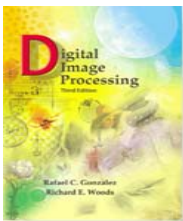
1. Given an input image $f(x, y)$ of size $M \times N$, obtain the padding parameters P and Q from Eqs. (4.6-31) and (4.6-32). Typically, we select $P = 2M$ and $Q = 2N$.
2. Form a padded image, $f_p(x, y)$, of size $P \times Q$ by appending the necessary number of zeros to $f(x, y)$.
3. Multiply $f_p(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ to center its transform.
4. Compute the DFT, $F(u, v)$, of the image from step 3.
5. Generate a real, symmetric filter function, $H(u, v)$, of size $P \times Q$ with center at coordinates $(P/2, Q/2)$.[†] Form the product $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ using array multiplication; that is, $G(i, k) = H(i, k)F(i, k)$.
6. Obtain the processed image:

$$g_p(x, y) = \left\{ \text{real} \left[\mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] \right] \right\} (-1)^{x+y}$$

where the real part is selected in order to ignore parasitic complex components resulting from computational inaccuracies, and the subscript p indicates that we are dealing with padded arrays.

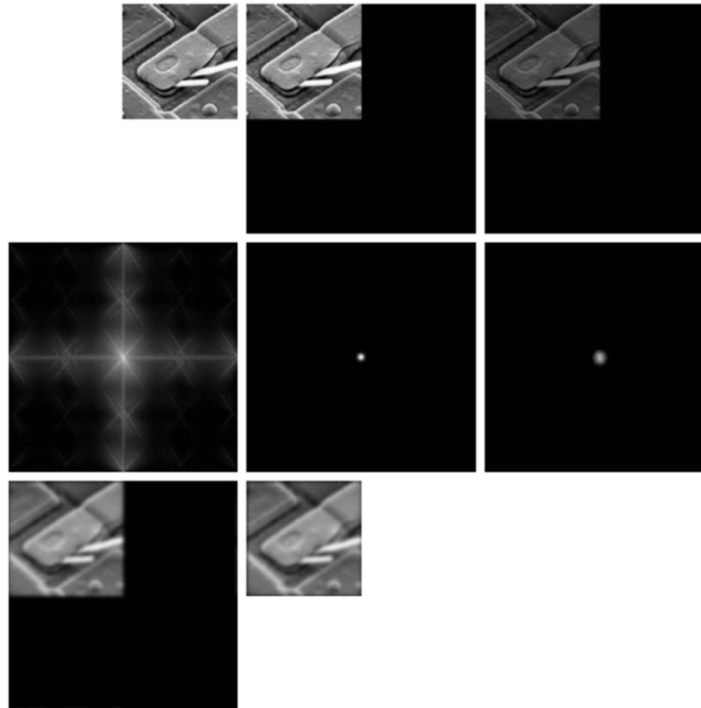
7. Obtain the final processed result, $g(x, y)$, by extracting the $M \times N$ region from the top, left quadrant of $g_p(x, y)$.

As noted earlier, centering helps in visualizing the filtering process and in generating the filter functions themselves, but centering is not a fundamental requirement.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a	b	c
d	e	f
g	h	

FIGURE 4.36

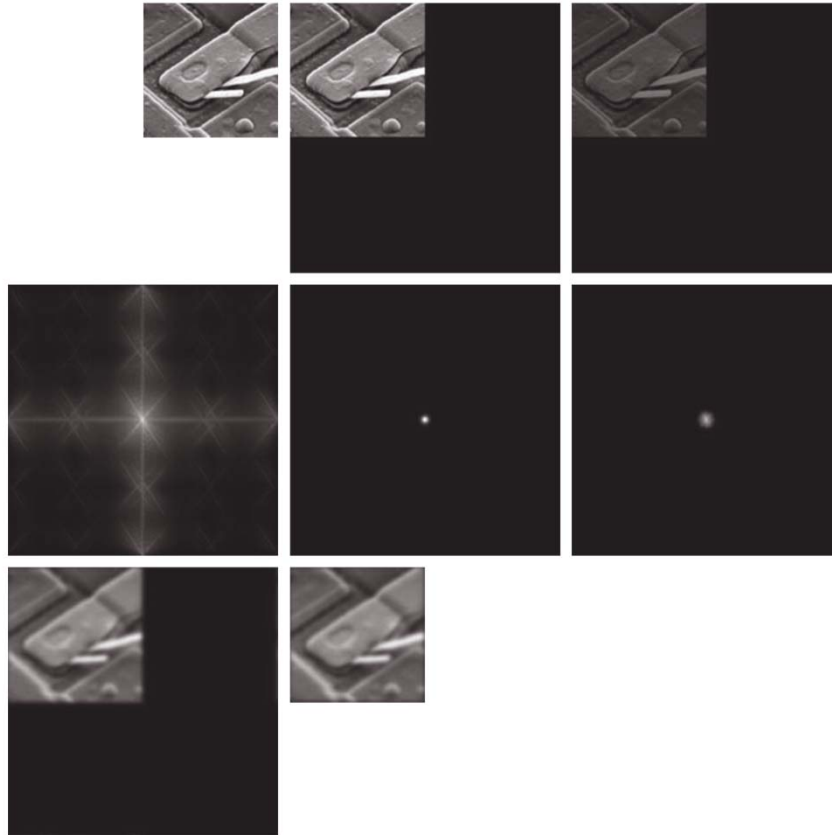
(a) An $M \times N$ image, f .
 (b) Padded image, f_p of size $P \times Q$.
 (c) Result of multiplying f_p by $(-1)^{x+y}$.
 (d) Spectrum of F_p . (e) Centered Gaussian lowpass filter, H , of size $P \times Q$.
 (f) Spectrum of the product HF_p .
 (g) g_p , the product of $(-1)^{x+y}$ and the real part of the IDFT of HF_p .
 (h) Final result, g , obtained by cropping the first M rows and N columns of g_p .

فیلتر کردن در حوزه فرکانس

مثال

a	b	c
d	e	f
g	h	

- (a) An $M \times N$ image, f .
 (b) Padded image, f_p of size $P \times Q$.
 (c) Result of multiplying f_p by $(-1)^{x+y}$.
 (d) Spectrum of F_p . (e) Centered Gaussian lowpass filter, H , of size $P \times Q$.
 (f) Spectrum of the product HF_p .
 (g) g_p , the product of $(-1)^{x+y}$ and the real part of the IDFT of HF_p .
 (h) Final result, g , obtained by cropping the first M rows and N columns of g_p .



تناظر میان فیلتر کردن در حوزه‌ی مکان و حوزه‌ی فرکانس

قضیه‌ی کانولوشن: رابط میان حوزه‌ی مکان و حوزه‌ی فرکانس

CORRESPONDENCE BETWEEN FILTERING IN THE SPATIAL AND FREQUENCY DOMAIN

کانولوشن گسسته‌ی دو تابع $f(x,y)$ و $h(x,y)$ با اندازه‌ی $M \times N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

اگر $H(u,v) = \mathcal{F}\{h(x,y)\}$ و $F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$ داریم:

$$f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * H(u,v)$$

قضیه‌ی کانولوشن

Convolution Theorem

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه‌ی مکان و حوزه‌ی فرکانس

مثال: تبدیل فوریه‌ی ضربی واحد

$A\delta(x - x_0, y - y_0)$ یک تابع ضربه با قوت A واقع شده در مختصات (x_0, y_0)

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) A\delta(x - x_0, y - y_0) = As(x_0, y_0)$$

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) \delta(x, y) = s(0, 0)$$

تبدیل فوریه‌ی یک ضربی واحد در مبدأ $\delta(x, y)$

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} = \frac{1}{MN}$$

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه مکان و حوزه فرکانس

رابطه‌ی فیلتر حوزه‌ی مکان با فیلتر حوزه‌ی فرکانس

$$f(x, y) = \delta(x, y)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) * h(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x - m, y - n) \\ &= \frac{1}{MN} h(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) * h(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v) H(u, v) \\ \delta(x, y) * h(x, y) &\Leftrightarrow \mathcal{F}[\delta(x, y)] H(u, v) \\ \frac{1}{MN} h(x, y) &\quad \frac{1}{MN} H(u, v) \\ \Rightarrow h(x, y) &\Leftrightarrow H(u, v) \end{aligned}$$

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه فضا و حوزه فرکانس

رابطه‌ی فیلتر حوزه‌ی مکان با فیلتر حوزه‌ی فرکانس: مثال (فیلتر گاوسی)

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$

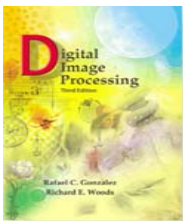
فیلتر گاوسی
Gaussian Filter

σ : انحراف استاندارد (جذر واریانس) منحنی گاوسی

فیلتر گاوسی متناظر در حوزه‌ی مکان

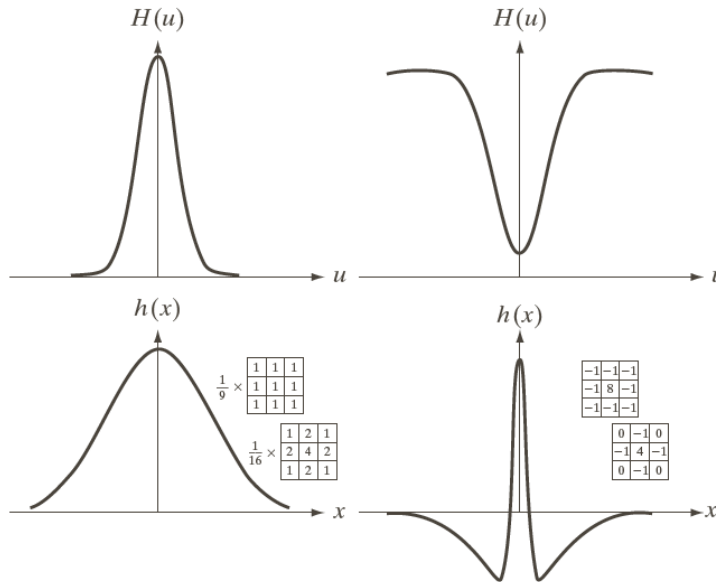
$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$

تبدیل‌های فوریه‌ی مستقیم و معکوس تابع گاوسی، توابع گاوسی حقیقی است.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



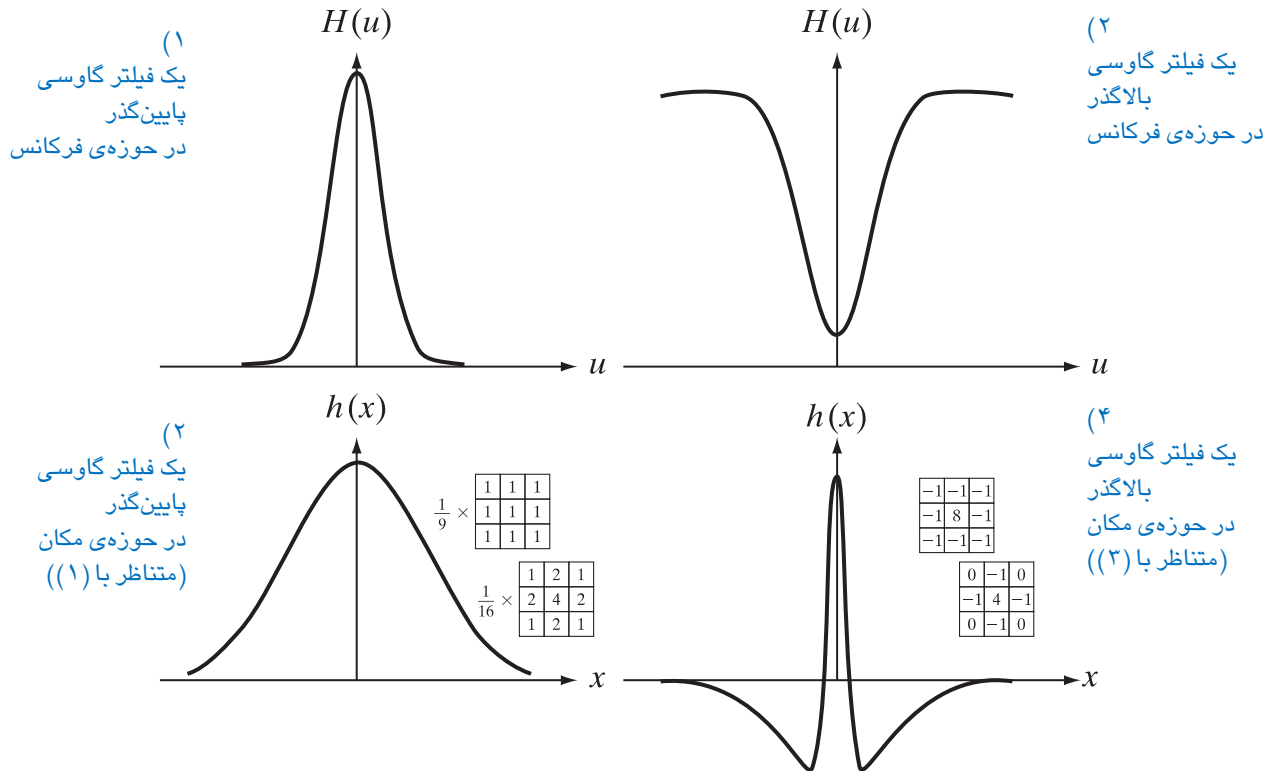
a c
b d

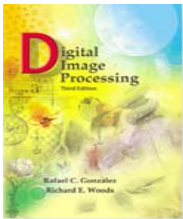
FIGURE 4.37

(a) A 1-D Gaussian lowpass filter in the frequency domain. (b) Spatial lowpass filter corresponding to (a). (c) Gaussian highpass filter in the frequency domain. (d) Spatial highpass filter corresponding to (c). The small 2-D masks shown are spatial filters we used in Chapter 3.

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه فضا و حوزه فرکانس

رابطه‌ی فیلتر حوزه‌ی مکان با فیلتر حوزه‌ی فرکانس: مثال (فیلتر گاوسی): مثال



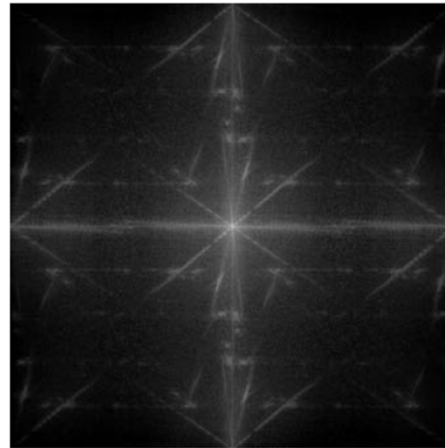


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

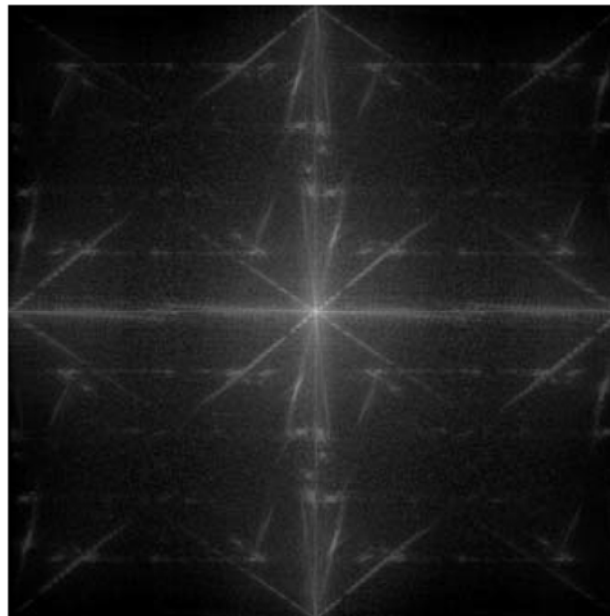
FIGURE 4.38
(a) Image of a building, and
(b) its spectrum.

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه فضا و فرکانس

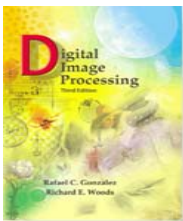
مثال



(۱) تصویر یک ساختمان



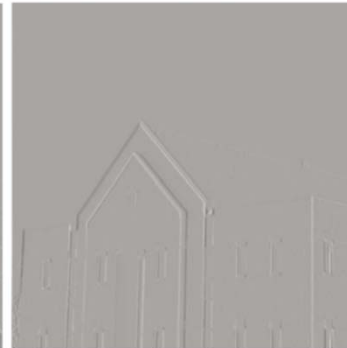
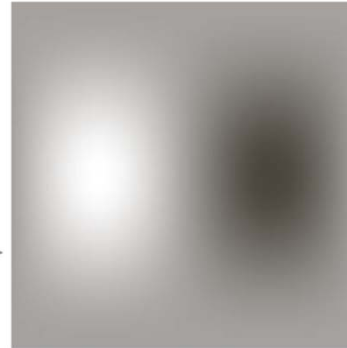
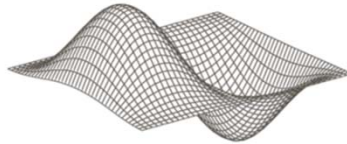
(۲) طیف تبدیل فوریه‌ی تصویر (۱)



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



a b
c d

FIGURE 4.39

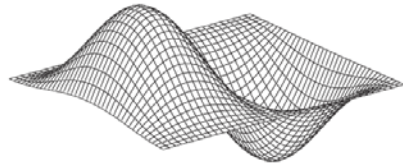
(a) A spatial mask and perspective plot of its corresponding frequency domain filter. (b) Filter shown as an image. (c) Result of filtering Fig. 4.38(a) in the frequency domain with the filter in (b). (d) Result of filtering the same image with the spatial filter in (a). The results are identical.

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه فضا و حوزه فرکانس

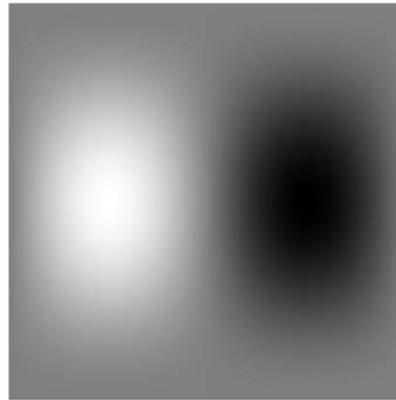
مثال

(۱)
یک ماسک حوزه‌ی مکان
و رسم سه‌بعدی فیلتر
حوزه‌ی فرکانس
متناظر با آن

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



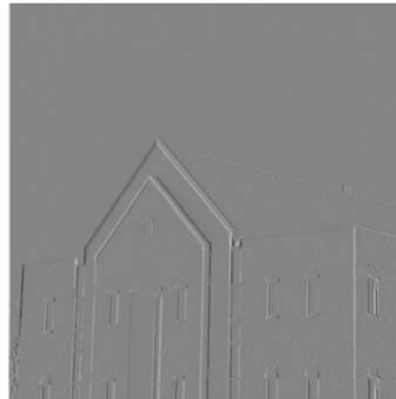
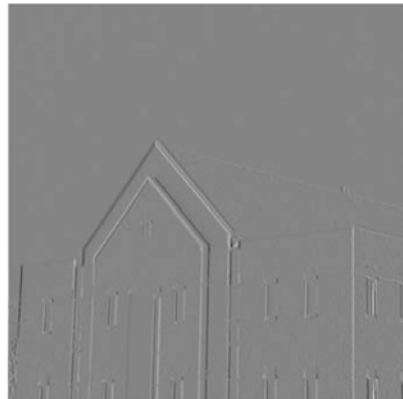
(۲)
نمایش فیلتر حوزه‌ی
فرکانس در قالب یک
تصویر



(۳)
نتیجه‌ی فیلتر کردن
تصویر ساختمان در
حوزه‌ی فرکانس با
فیلتر (۲)



(۴)
نتیجه‌ی فیلتر کردن
همان تصویر با فیلتر
مکانی (۱)



نتیجه‌ها یکسان
هستند!

تناظر میان فیلتر کردن در حوزه‌ی فضا و حوزه‌ی فرکانس

فیلتر گاوسی

خاصیت‌های مفید تابع گاوسی

خودش و تبدیل فوریه‌ی آن هر دو **حقیقی مقدار** است. (هیچ مقدار مختلطی در آنها وجود ندارد.)

مقادیر آنها همیشه **مثبت** است. (نتیجه‌ی کانوالو آن با تصویر هیچ مقدار منفی تولید نمی‌کند.)

با پارامتر σ عرض آن کنترل می‌شود:
اگر عرض تابع گاوسی کوچکتر شود، عرض تبدیل فوریه‌ی آن بزرگتر می‌شود.

این خواص فیلتر گاوسی را برای فیلتر کردن پایین‌گذر تصویر بسیار مناسب می‌کند:
میزان بلار شدن با پارامتر σ کنترل می‌شود.

این فیلتر را می‌توان در حوزه‌ی مکان یا فرکانس پیاده‌سازی کرد.

سایر فیلترها را نیز می‌توان با استفاده از دو گاوسی با اندازه‌ی متفاوت پیاده‌سازی کرد.

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس



هموارسازی
تصویر
با استفاده
از فیلترهای
حوزه‌ی
فرکانس

فیلترهای حوزه‌ی فرکانس هموار ساز

SMOOTHING FREQUENCY-DOMAIN FILTERS

مدل پایه‌ی فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

تابع انتقال فیلتر

تبدیل فوریه‌ی تصویر
(که باید هموار شود)

هموار سازی، اساساً یک عملیات فیلتر کردن پایین‌گذر در حوزه‌ی فرکانس است.

فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل

Ideal Lowpass Filter

فیلتر پایین‌گذر باتروث

Butterworth Lowpass Filter

فیلتر پایین‌گذر گاوسی

Gaussian Lowpass Filter

فیلترهای پایین‌گذر

(فرم‌های استاندارد)

Lowpass Filters

LPF

فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)

فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل

Ideal Lowpass Filter

ساده‌ترین فیلتر پایین‌گذر،

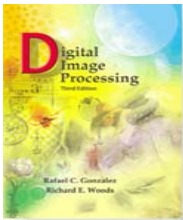
فیلتری است که همه‌ی فرکانس‌های بالاتر از یک فاصله‌ی مشخص D_0 از مرکز تبدیل را برش می‌دهد.

تابع انتقال
فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$D(u, v)$ فاصله‌ی نقطه‌ی (u, v) از مرکز مستطیل حوزه‌ی فرکانس است:

$$D(u, v) = \left[(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2 \right]^{1/2}$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

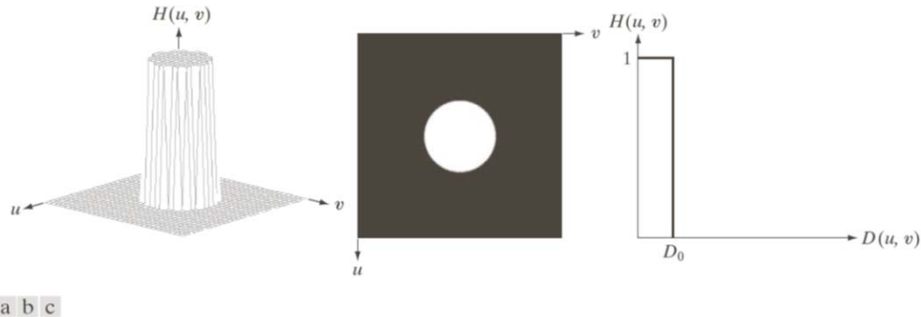
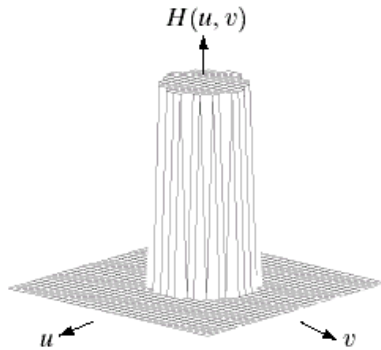
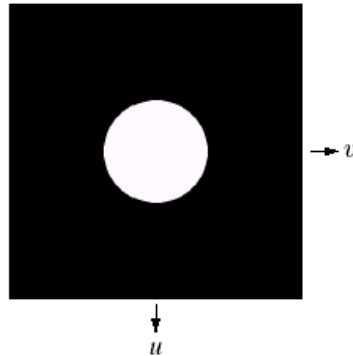


FIGURE 4.40 (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

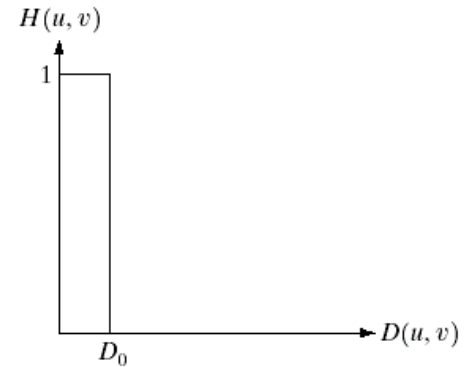
فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)

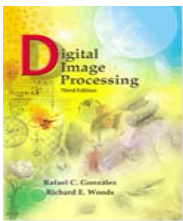
(۱)
نمودار سه‌بعدی تابع انتقال
فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل



(۲)
فیلتر ترسیم شده
به صورت یک تصویر



(۳)
سطح مقطع شعاعی فیلتر



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

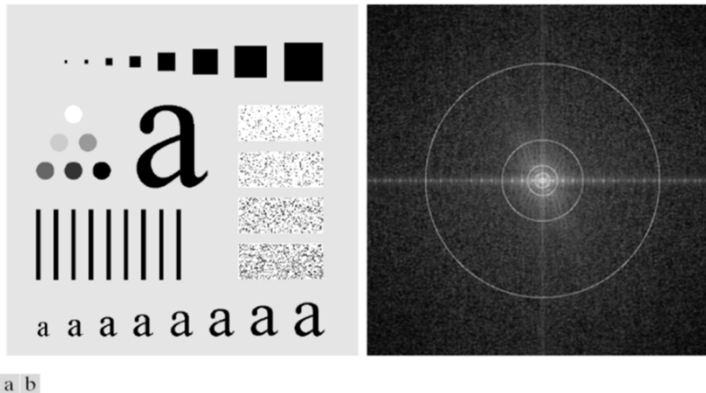
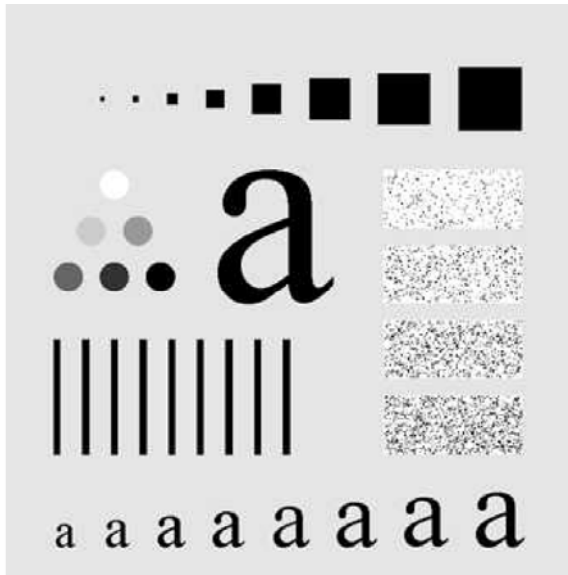
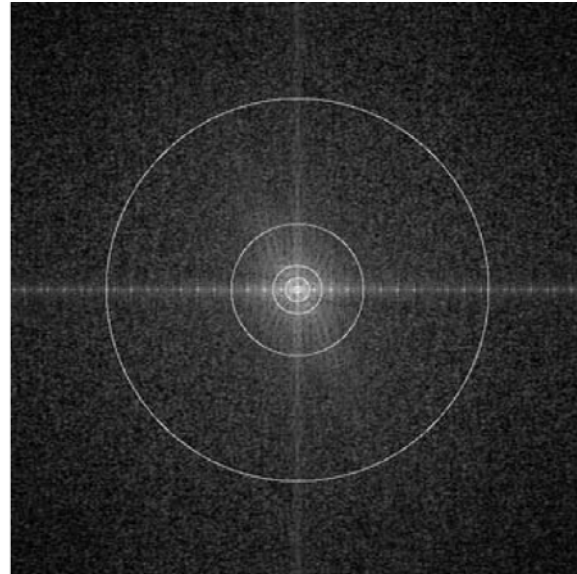


FIGURE 4.41 (a) Test pattern of size 688×688 pixels, and (b) its Fourier spectrum. The spectrum is double the image size due to padding but is shown in half size so that it fits in the page. The superimposed circles have radii equal to 10, 30, 60, 160, and 460 with respect to the full-size spectrum image. These radii enclose 87.0, 93.1, 95.7, 97.8, and 99.2% of the padded image power, respectively.

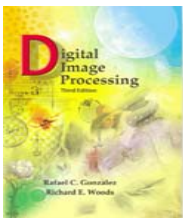
فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

مثال

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)(۱) الگوی آزمایشی با اندازه‌ی 688×688 پیکسل

(۲) تبدیل فوری‌ی (۱).

اندازی طیف، دوبرابر اندازه‌ی تصویر است (پدینگ)
 دایره‌های رسم‌شده به شعاع ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰.
 هر دایره درصد مشخصی از انرژی تصویر پد شده را دارد؛
 به ترتیب: ۸۷٪، ۹۳٫۱٪، ۹۵٫۷٪، ۹۷٫۸٪ و ۹۹٫۲٪



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

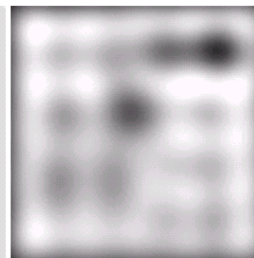
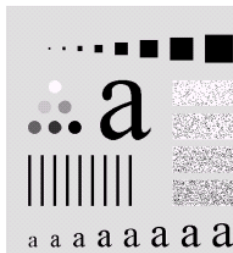
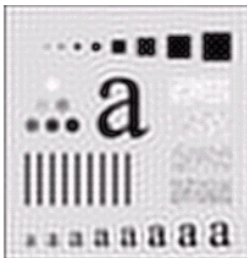
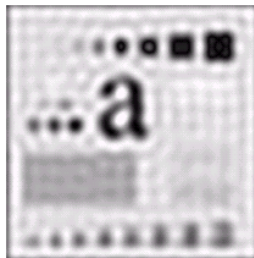
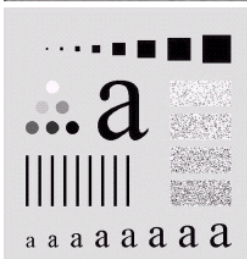
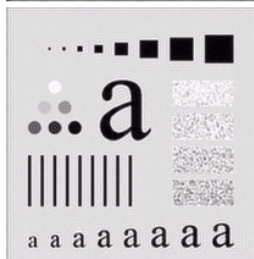
Filtering in the Frequency Domain

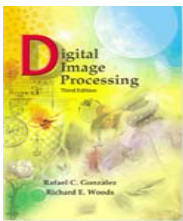


FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using ILPFs with cutoff frequencies set at radii values 10, 30, 60, 160, and 460, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.8% of the total, respectively.

فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

مثال

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)(۱)
تصویر اصلی(۲)
حاصل فیلتر کردن با
ILPF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۰.
میزان توان حذف شده
توسط فیلتر: ۱۳٪(۳)
حاصل فیلتر کردن با
ILPF با فرکانس قطع
در شعاع ۳۰.
میزان توان حذف شده
توسط فیلتر: ۶٫۹٪(۴)
حاصل فیلتر کردن با
ILPF با فرکانس قطع
در شعاع ۶۰.
میزان توان حذف شده
توسط فیلتر: ۴٫۳٪(۵)
حاصل فیلتر کردن با
ILPF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۶۰.
میزان توان حذف شده
توسط فیلتر: ۲٫۲٪(۶)
حاصل فیلتر کردن با
ILPF با فرکانس قطع
در شعاع ۴۶۰.
میزان توان حذف شده
توسط فیلتر: ۰٫۸٪

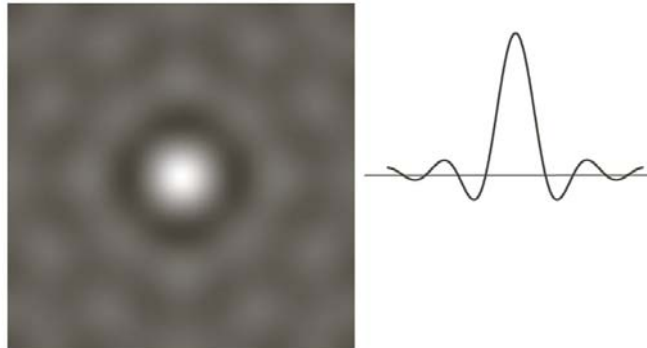


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

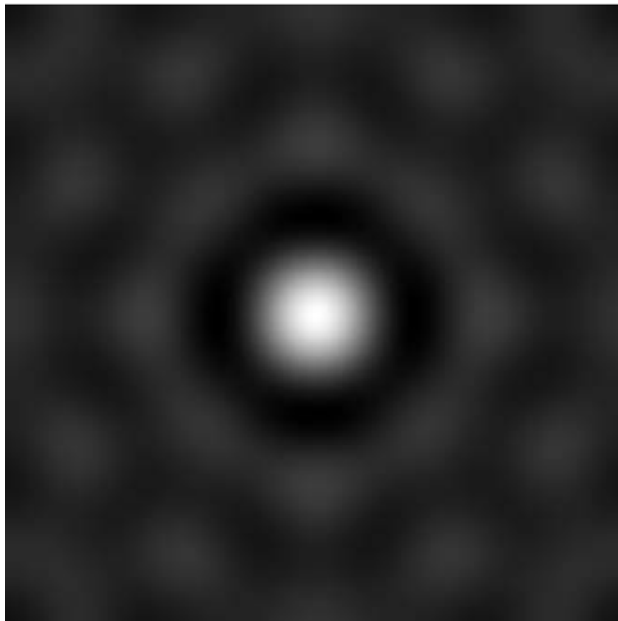
FIGURE 4.43

(a) Representation in the spatial domain of an ILPF of radius 5 and size 1000×1000 .
(b) Intensity profile of a horizontal line passing through the center of the image.

فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

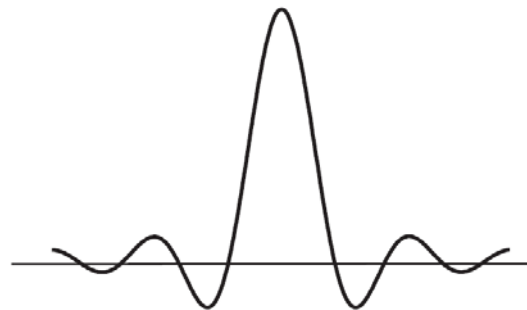
فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل در حوزه‌ی مکان

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)



(۱)

بازنمایی یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل
با شعاع ۵ و اندازه‌ی 1000×1000
در حوزه‌ی مکان



(۲)

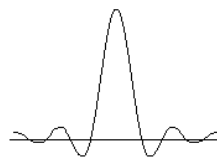
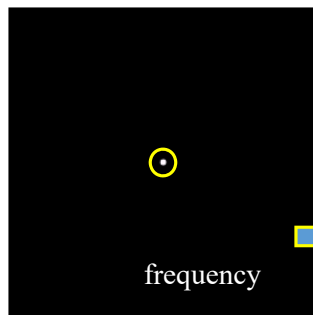
پروفایل شدت رنگ
یک خط افقی که از مرکز تصویر می‌گذرد.

فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل

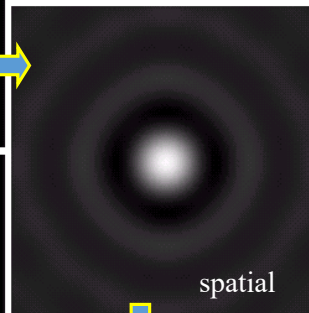
مثال

IDEAL LOWPASS FILTERS (ILPFs)

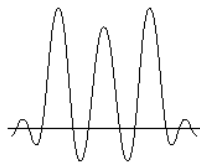
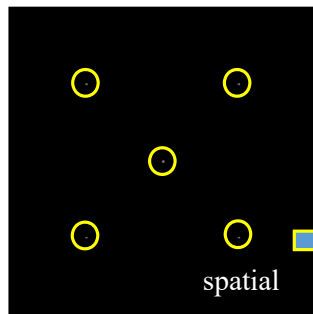
(۱)
یک فیلتر IPLF
حوزه‌ی فرکانس با
شعاع ۵



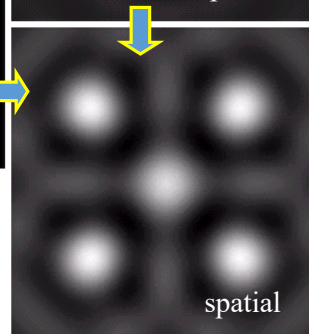
(۲)
فیلتر متناظر مکانی



(۳)
۵ ضربه در حوزه‌ی مکان،
شبه‌سازی‌کننده‌ی
مقادیر ۵ پیکسل



(۴)
کانولوشن (۲) و (۳)
در حوزه‌ی مکان



$$f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

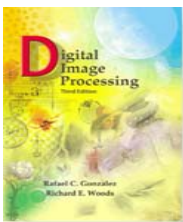
فیلترهای پایین‌گذر باتروُرت

با مرتبه n BUTTERWORTH LOWPASS FILTERS (BLPFs) WITH ORDER n

فیلتر پایین‌گذر باتروُرت

Butterworth Lowpass Filter

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

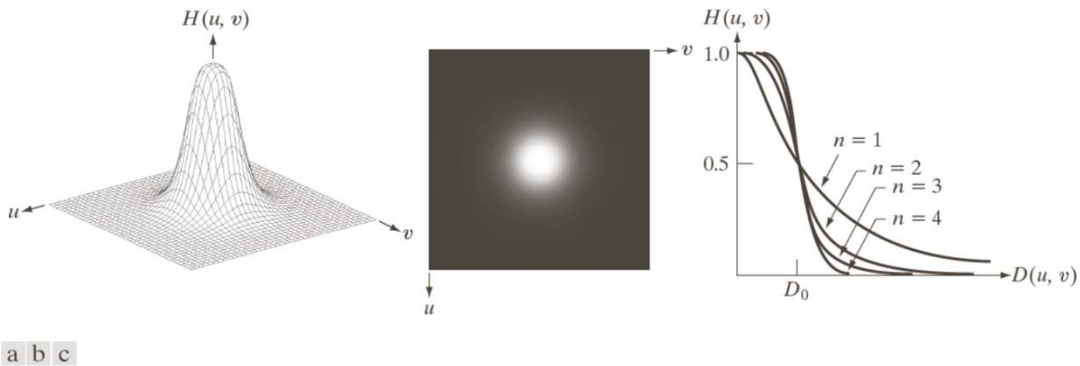
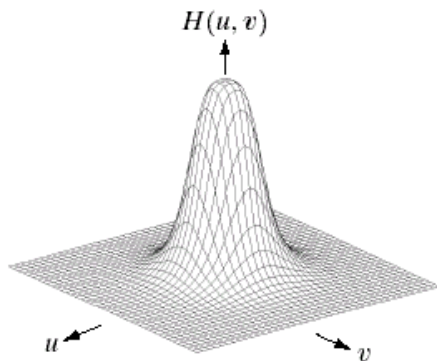


FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

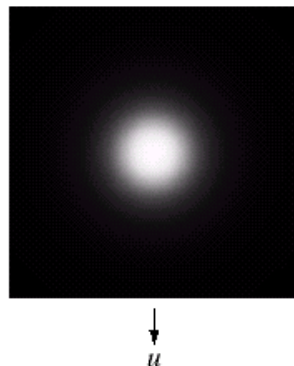
فیلترهای پایین‌گذر باتروث

BUTTERWORTH LOWPASS FILTERS (BLPFs) WITH ORDER n

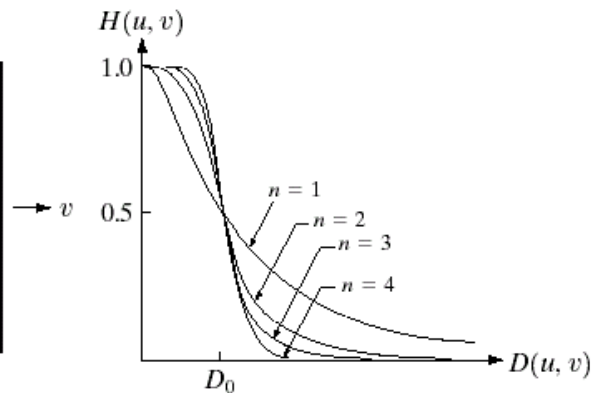
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



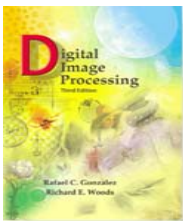
(۱)
نمودار سه‌بعدی تابع انتقال
فیلتر پایین‌گذر باتروث



(۲)
فیلتر ترسیم شده
به صورت یک تصویر



(۳)
سطح مقطع شعاعی فیلتر
برای $n = 1, 2, 3, 4$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

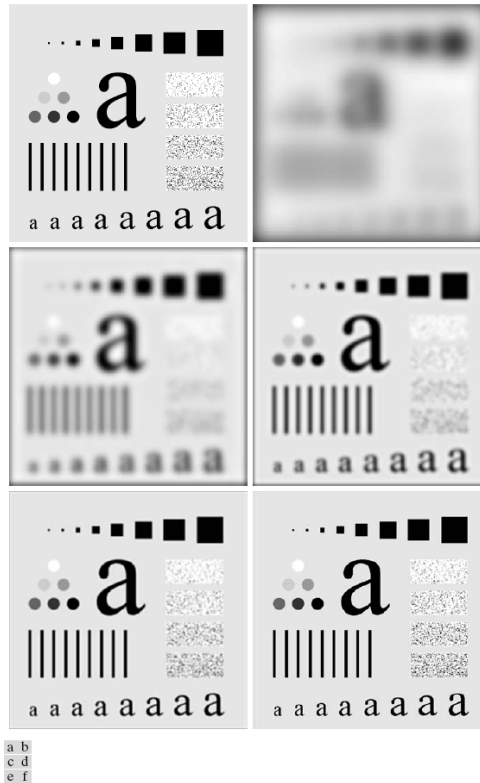


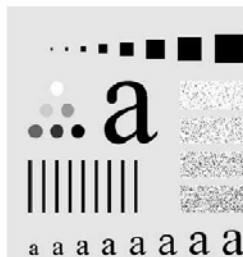
FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.42.

فیلترهای پایین‌گذر باتروث

مثال ($n = 2$)

BUTTERWORTH LOWPASS FILTERS (BLPFs) WITH ORDER $n = 2$

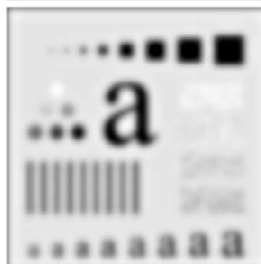
(۱)
تصویر اصلی



(۲)
حاصل فیلتر کردن با
BPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۰.



(۳)
حاصل فیلتر کردن با
BPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۳۰.



(۴)
حاصل فیلتر کردن با
BPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۶۰.

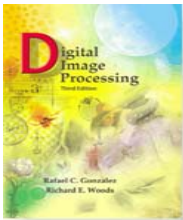


(۵)
حاصل فیلتر کردن با
BPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۶۰.



(۶)
حاصل فیلتر کردن با
BPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۴۶۰.





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

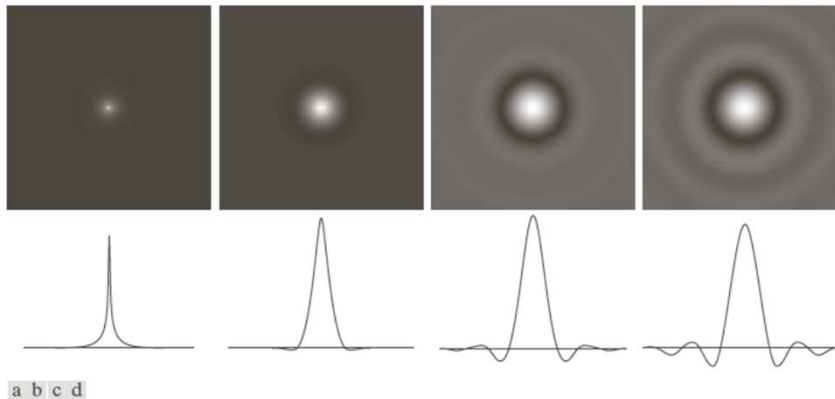
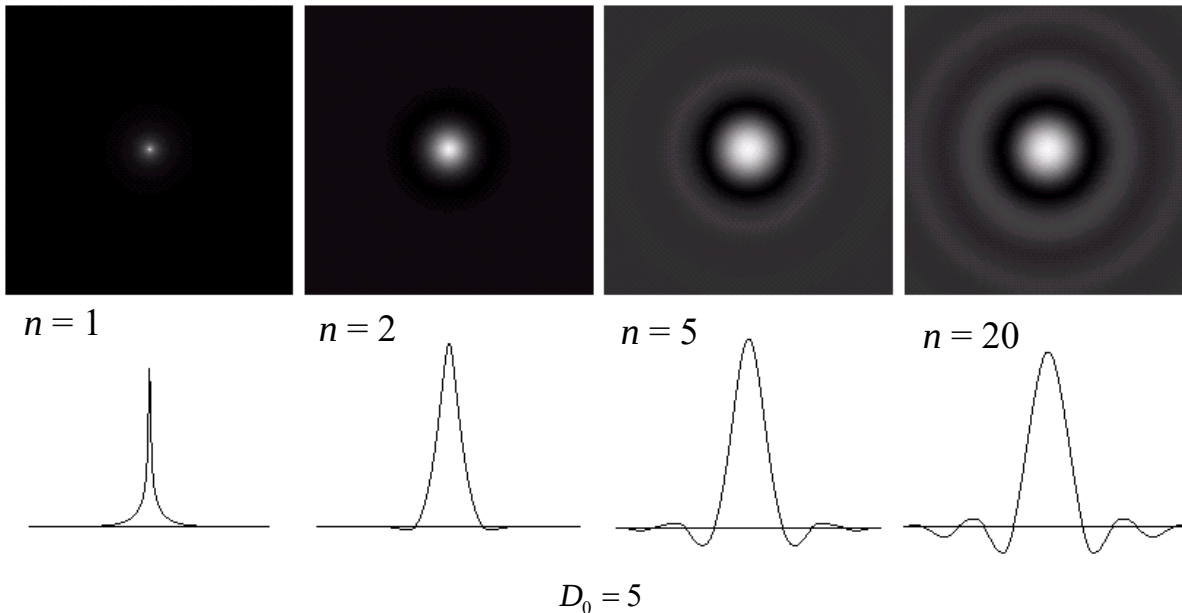


FIGURE 4.46 (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is 1000×1000 and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

فیلترهای پایین‌گذر باتروُرت

بازنمایی مکانی

BUTTERWORTH LOWPASS FILTERS (BLPFs): SPATIAL REPRESENTATION

با افزایش n (مرتبه‌ی فیلتر) تموج بیشتر می‌شود.

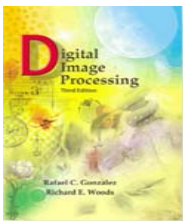
فیلترهای پایین‌گذر گاوسی

GAUSSIAN LOWPASS FILTERS (GLPFS)

فیلتر پایین‌گذر گاوسی

Gaussian Lowpass Filter

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

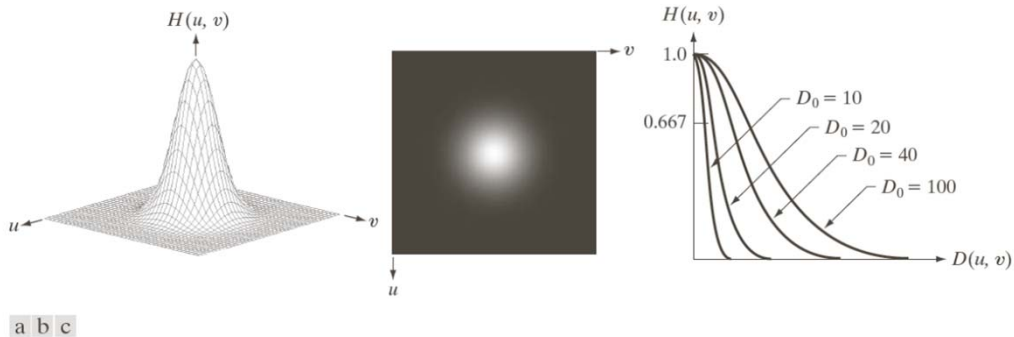
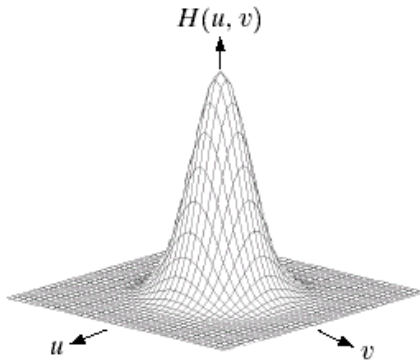


FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0 .

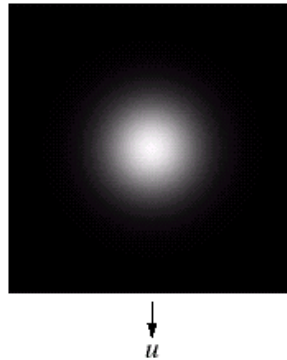
فیلترهای پایین‌گذر گاوسی

GAUSSIAN LOWPASS FILTERS (GLPFs)

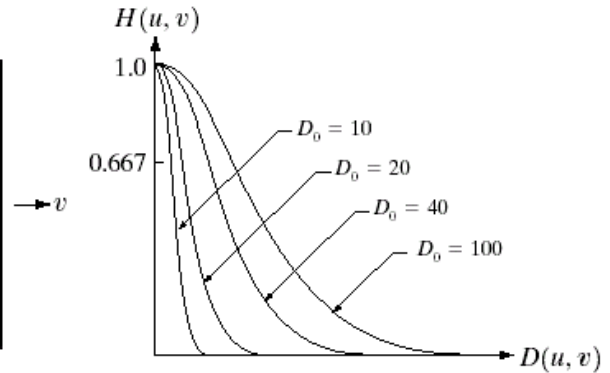
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



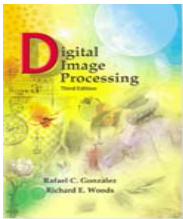
(۱)
نمودار سه‌بعدی تابع انتقال
فیلتر پایین‌گذر گاوسی



(۲)
فیلتر ترسیم شده
به صورت یک تصویر



(۳)
سطح مقطع شعاعی فیلتر
برای $D_0 = 10, 20, 40, 100$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

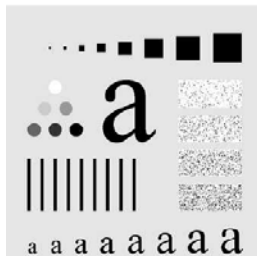


FIGURE 4.48 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using GLPFs with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Figs. 4.42 and 4.45.

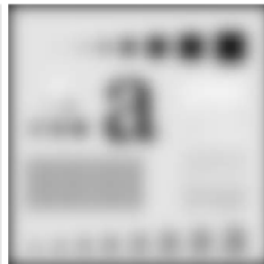
فیلترهای پایین‌گذر گاوسی

GAUSSIAN LOWPASS FILTERS (GLPFs)

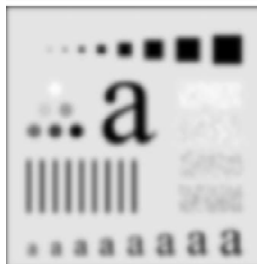
(۱)
تصویر اصلی



(۲)
حاصل فیلتر کردن با
GPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۰.



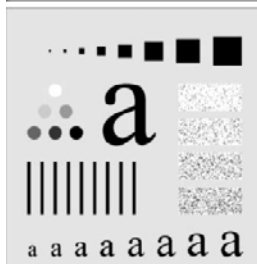
(۳)
حاصل فیلتر کردن با
GPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۳۰.



(۴)
حاصل فیلتر کردن با
GPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۶۰.

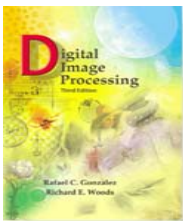


(۵)
حاصل فیلتر کردن با
GPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۱۶۰.



(۶)
حاصل فیلتر کردن با
GPLF با فرکانس قطع
در شعاع ۴۶۰.





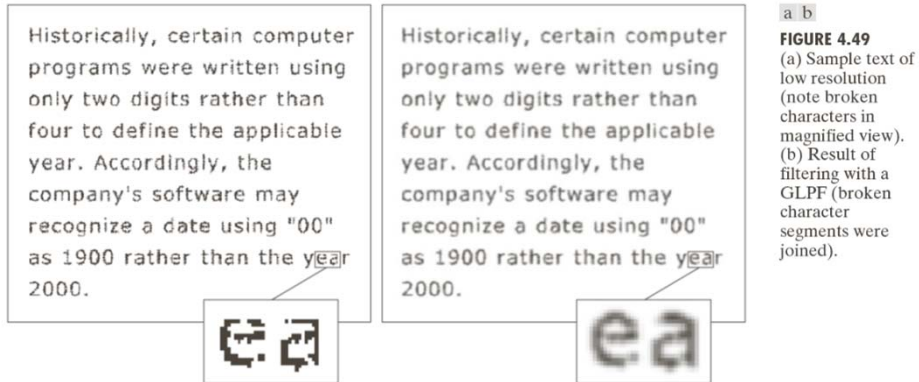
Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

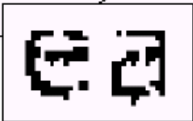
Filtering in the Frequency Domain



فیلتر کردن پایین‌گذر

مثال

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



(۱)

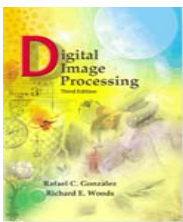
نمونه متن با رزولوشن پایین
(به کاراکترهای شکسته شده
در نمای بزرگ‌شده دقت کنید.)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



(۲)

حاصل فیلتر کردن با GPLF
(بخش‌های کاراکترهای شکسته شده
به هم متصل شده‌اند.)



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b c

FIGURE 4.50 (a) Original image (784×732 pixels). (b) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 80$. Note the reduction in fine skin lines in the magnified sections in (b) and (c).

فیلتر کردن پایین‌گذر

مثال

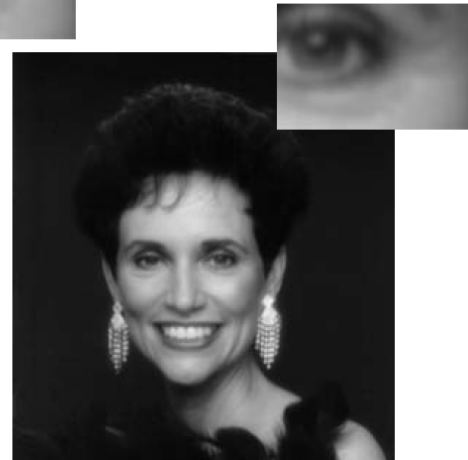
کاهش خطوط چهره در اثر فیلتر پایین‌گذر



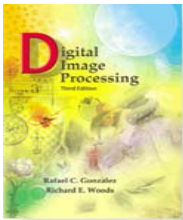
(۱)
تصویر اصلی
۷۸۴×۷۳۲ پیکسل



(۲)
حاصل فیلتر کردن با استفاده از
یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
با $D_0 = 100$



(۳)
حاصل فیلتر کردن با استفاده از
یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
با $D_0 = 80$

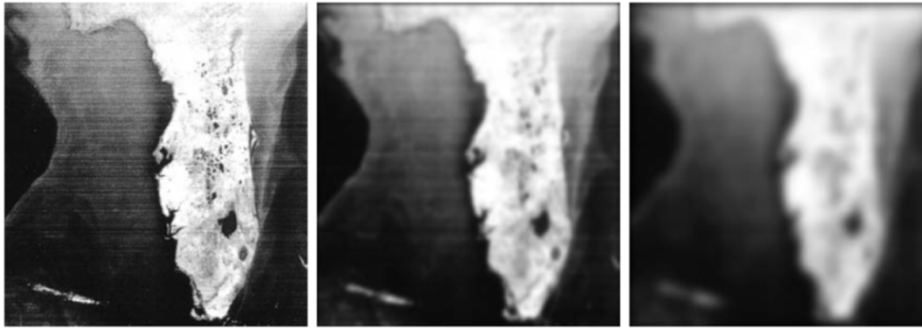


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b c

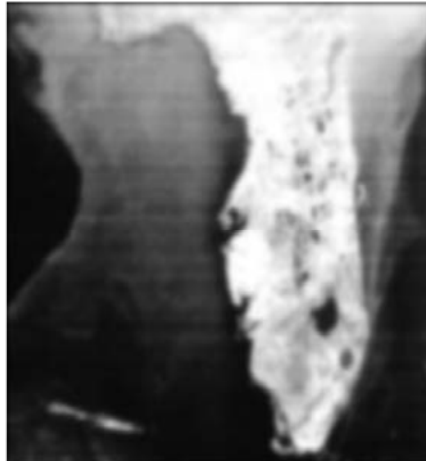
FIGURE 4.51 (a) Image showing prominent horizontal scan lines. (b) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 50$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 20$. (Original image courtesy of NOAA.)

فیلتر کردن پایین‌گذر

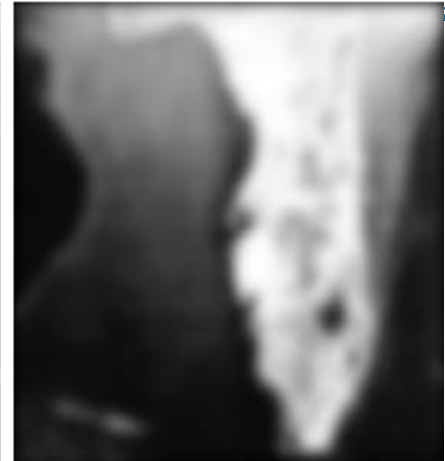
مثال



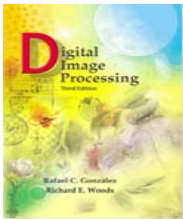
(۱)
تصویر دارای
خطوط اسکن افقی برجسته



(۲)
حاصل فیلتر کردن با استفاده از
یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
با $D_0 = 50$



(۳)
حاصل فیلتر کردن با استفاده از
یک فیلتر پایین‌گذر گاوسی
با $D_0 = 20$



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

TABLE 4.4

Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

فیلترهای پایین‌گذر

LOWPASS FILTERS (LPFs)

Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۹

تیزسازی
تصویر
با استفاده
از فیلترهای
حوزه‌ی
فرکانس

فیلترهای تیزکننده‌ی حوزه‌ی فرکانس

SHARPENING FREQUENCY DOMAIN FILTER

مدل پایه‌ی فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

تابع انتقال فیلتر

تبدیل فوریه‌ی تصویر
(که باید تیز شود)

تیزسازی، اساساً یک عملیات فیلتر کردن بالاگذر در حوزه‌ی فرکانس است.

فیلتر بالاگذر ایده‌آل

Ideal Highpass Filter

فیلتر بالاگذر باتروُرت

Butterworth Highpass Filter

فیلتر بالاگذر گاوسی

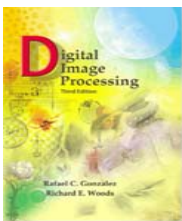
Gaussian Highpass Filter

فیلترهای بالاگذر

(فرم‌های استاندارد)

Highpass Filters

HPF



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

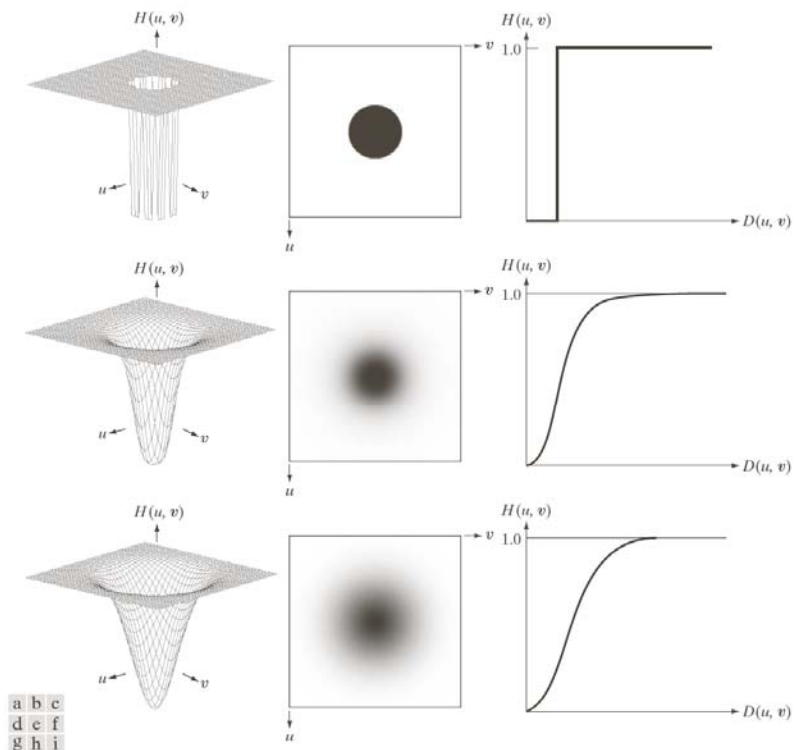


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

فیلترهای تیزکننده‌ی حوزه‌ی فرکانس

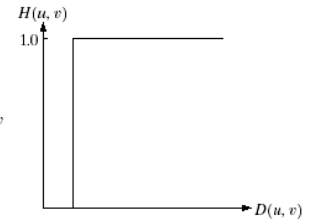
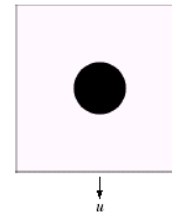
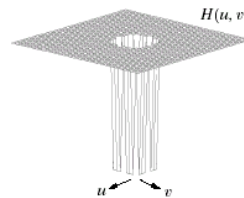
SHARPENING FREQUENCY DOMAIN FILTER

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

فیلتر بالاگذر ایده‌آل

Ideal Highpass Filter

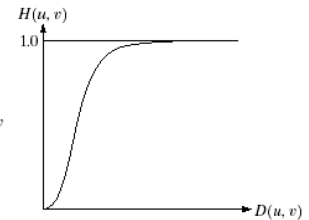
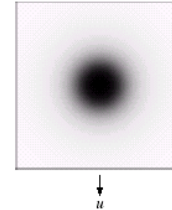
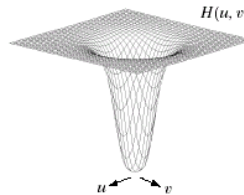
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



فیلتر بالاگذر باتروورت

Butterworth Highpass Filter

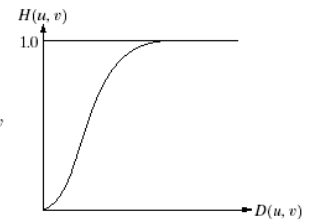
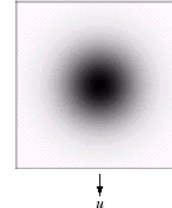
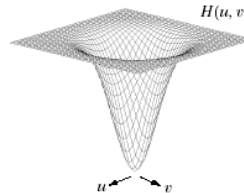
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

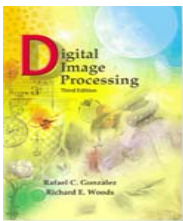


فیلتر بالاگذر گاوسی

Gaussian Highpass Filter

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$





Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

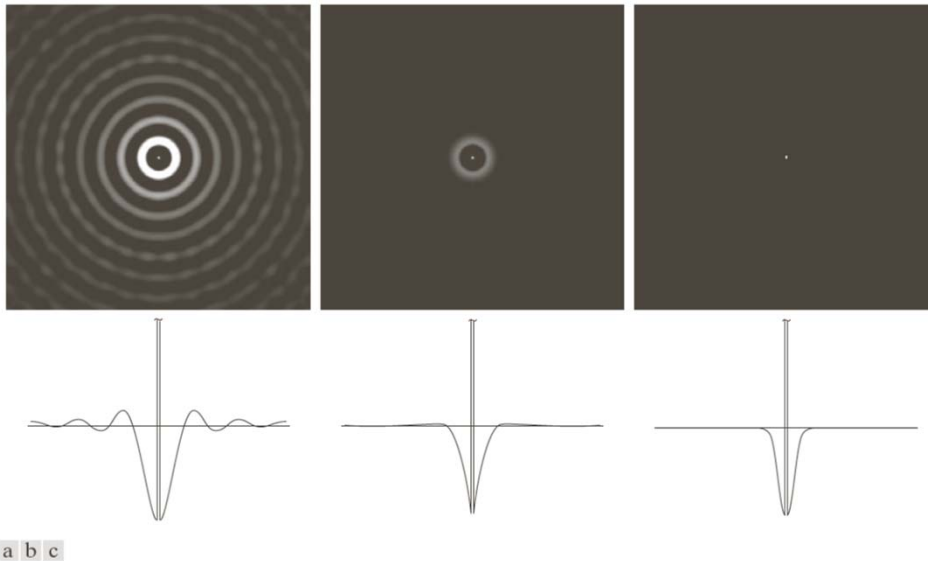


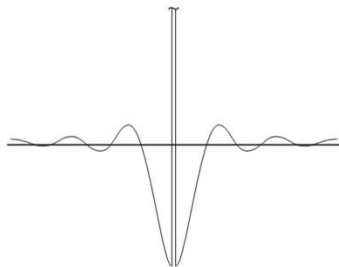
FIGURE 4.53 Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers.

فیلترهای بالاگذر

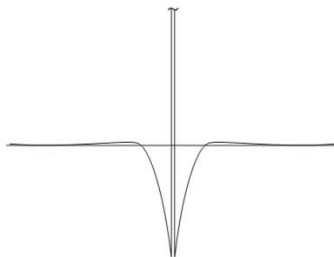
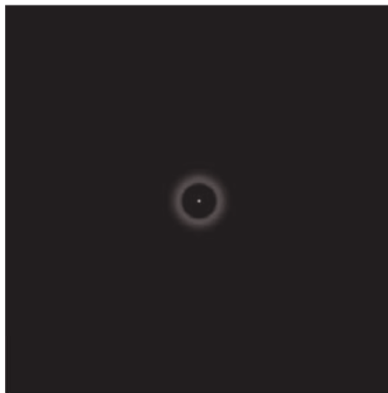
بازنمایی مکانی

HIGHPASS FILTERS: SPATIAL REPRESENTATIONS

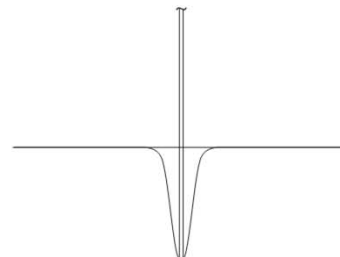
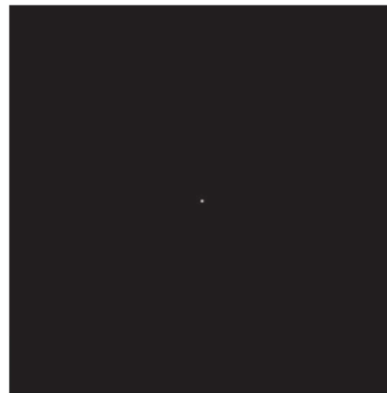
فیلتر بالاگذر ایده‌آل

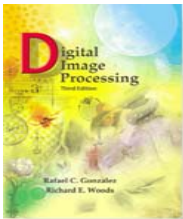
Ideal Highpass Filter

فیلتر بالاگذر باترورث

Butterworth Highpass Filter

فیلتر بالاگذر گاوسی

Gaussian Highpass Filter



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



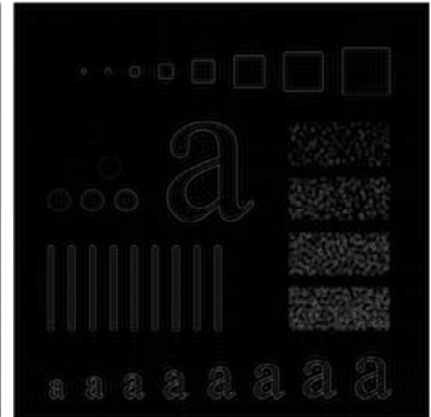
a b c

FIGURE 4.54 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using an IHPF with $D_0 = 30, 60,$ and 160 .

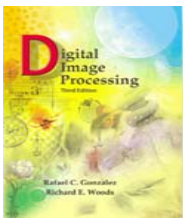
فیلترهای بالاگذر ایده‌آل

IDEAL HIGHPASS FILTERS

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

 $D_0 = 30$  $D_0 = 60$  $D_0 = 160$

مشکل تموج برای فرکانس‌های قطع کوچک‌تر بیشتر دیده می‌شود.



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

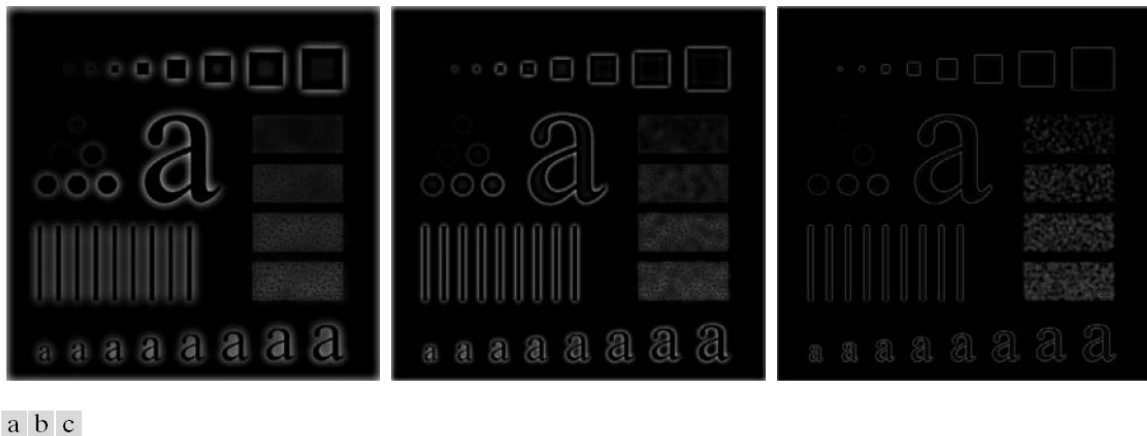


FIGURE 4.55 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a BHPF of order 2 with $D_0 = 30, 60,$ and 160, corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). These results are much smoother than those obtained with an IHPF.

فیلترهای بالاگذر باترورث

BUTTERWORTH HIGHPASS FILTERS

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

 $D_0 = 30$  $D_0 = 60$  $D_0 = 160$

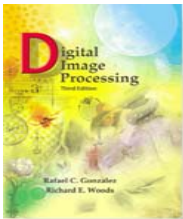
حاصل نسبت به خروجی فیلتر ایده‌آل بالاگذر، هموارتر است.

فیلترهای بالاگذر گاوسی

GAUSSIAN HIGHPASS FILTERS

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

 $D_0 = 30$  $D_0 = 60$  $D_0 = 160$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

TABLE 4.5

Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

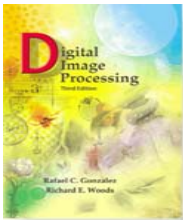
Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

فیلترهای بالاگذر

HIGHPASS FILTERS

Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

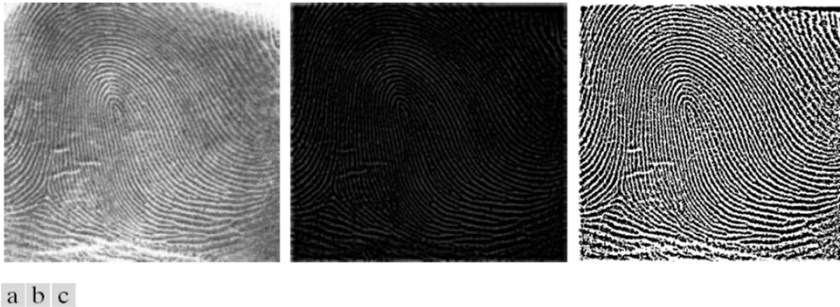


FIGURE 4.57 (a) Thumb print. (b) Result of highpass filtering (a). (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of the U.S. National Institute of Standards and Technology.)

فیلترهای بالاگذر

مثال

HIGHPASS FILTERS

(۱)
اثر انگشت



(۲)
حاصل فیلتر کردن بالاگذر



(۳)
حاصل آستانه‌گیری

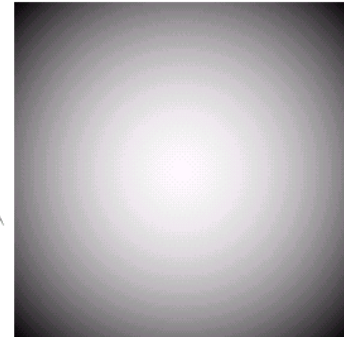
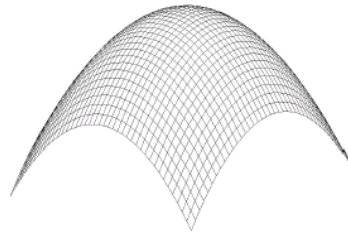
لاپلاسین در حوزه‌ی فرکانس

THE LAPLACIAN IN THE FREQUENCY DOMAIN

فیلتر حوزه‌ی فرکانس لاپلاسین

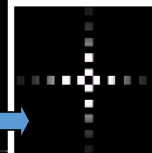
$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

Frequency
domain



فیلتر حوزه‌ی فرکانس لاپلاسین با شیف‌ت به مرکز

$$\begin{aligned} H(u, v) &= -4\pi^2 \left[\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2 \right] \\ &= -4\pi^2 D^2(u, v) \end{aligned}$$



0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Spatial domain

لاپلاسین در حوزه فرکانس

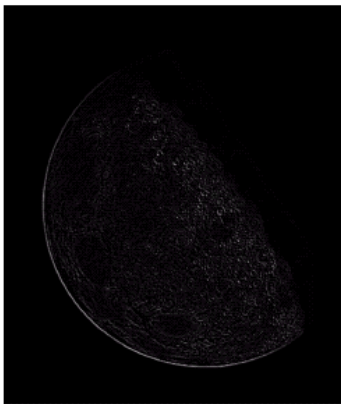
مثال

THE LAPLACIAN IN THE FREQUENCY DOMAIN

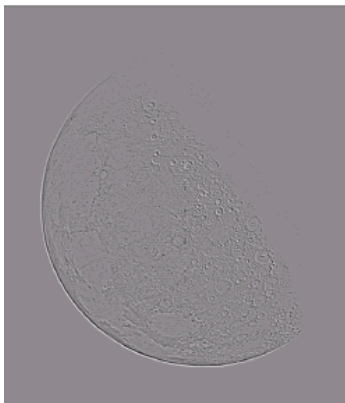
(۱)
تصویر اصلی



(۲)
تصویر فیلترشده با
لاپلاسین



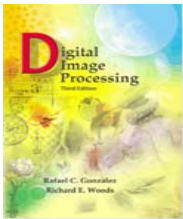
(۳)
تصویر لاپلاسین
مقیاس بندی شده



(۴)
تصویر به سازی شده

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$





Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

FIGURE 4.58

(a) Original, blurry image.
(b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain. Compare with Fig. 3.38(e).

لاپلاسین در حوزه‌ی فرکانس

مثال

THE LAPLACIAN IN THE FREQUENCY DOMAIN

(۱)
تصویر اصلی
دارای بلار



(۲)
تصویر فیلترشده با
لاپلاسین
در حوزه‌ی فرکانس



فیلتر (ماسک‌گذاری) غیر تیزکننده

UNSHARP MASKING

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - f_{\text{LP}}(x, y)$$

$$f_{\text{LP}}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H_{\text{LP}}(u, v)F(u, v)]$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

$$k = 1$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]\right]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\right\}$$

HIGHBOOST FILTERING

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - f_{\text{LP}}(x, y)$$

$$f_{\text{LP}}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H_{\text{LP}}(u, v)F(u, v)]$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]\right]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\right\}$$

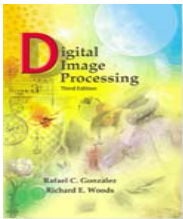
فیلتر کردن تأکید بر فرکانس بالا

HIGH-FREQUENCY-EMPHASIS FILTERING

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\}$$

$k_1 \geq 0$ gives controls of the offset from the origin

$k_2 \geq 0$ controls the contribution of high frequencies



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

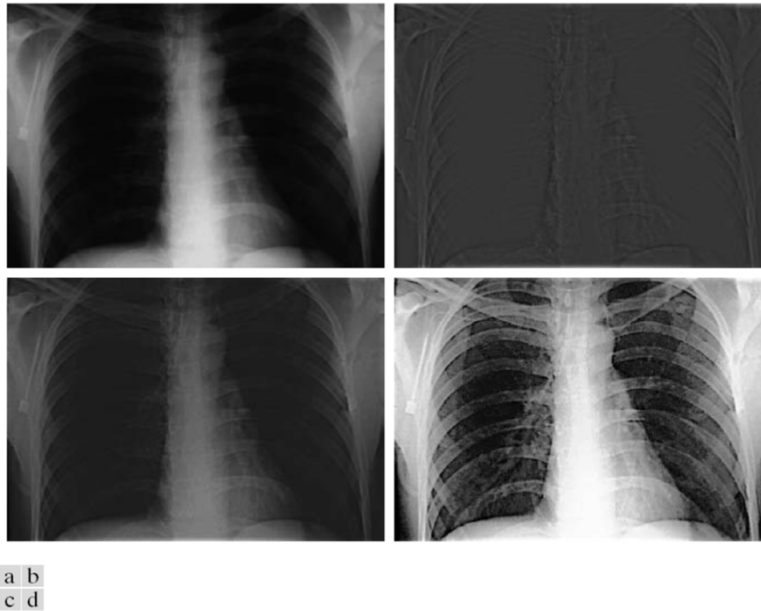


FIGURE 4.59 (a) A chest X-ray image. (b) Result of highpass filtering with a Gaussian filter. (c) Result of high-frequency-emphasis filtering using the same filter. (d) Result of performing histogram equalization on (c). (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)

فیلتر کردن تأکید بر فرکانس بالا

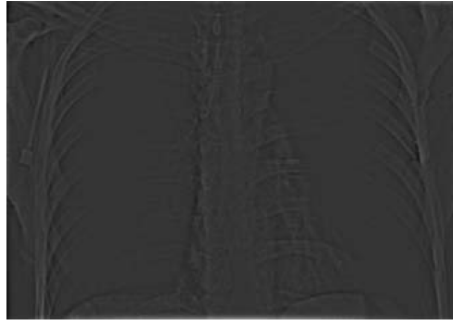
مثال

HIGH-FREQUENCY-EMPHASIS FILTERING

(۱)
تصویر اشعه ایکس
از قفسه سینه



(۲)
حاصل فیلتر بالاگذر
با فیلتر گاوسی



(۳)
حاصل فیلتر تأکید بر
فرکانس بالا با
استفاده از همان
فیلتر گاوسی



(۴)
نتیجه‌ی حاصل از
تعدیل هیستوگرام
روی (۳)



$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\} \quad k_1 = 0.5, \quad k_2 = 0.75$$

فیلتر کردن همریخت

۱ از ۳

HOMOMORPHIC FILTERING

هر تصویر را می‌توان به صورت حاصل ضرب مؤلفه‌های نورپردازی در بارتابش نوشت:

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

اما با این معادله نمی‌توان مستقیم در حوزه‌ی فرکانس کار کرد، زیرا:

$$\mathfrak{F}[f(x, y)] \neq \mathfrak{F}[i(x, y)]\mathfrak{F}[r(x, y)]$$

اما می‌توان با استفاده از لگاریتم، تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln f(x, y) \\ &= \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{z(x, y)\} &= \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} \\ &= \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\} \end{aligned}$$

با به صورت خلاصه:

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

فیلتر کردن همریخت

۲ از ۳

HOMOMORPHIC FILTERING

حال $Z(u, v)$ را با استفاده از $H(u, v)$ فیلتر می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

تصویر فیلتر شده در حوزه‌ی مکان می‌شود:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\} \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم:

$$i'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\}$$

و

$$r'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

فیلتر کردن همریخت

۳ از ۳

HOMOMORPHIC FILTERING

پس خواهیم داشت:

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

برای یافتن تصویر فیلتر شده، از تابع معکوس لگاریتم (تابع نمایی) استفاده می‌کنیم:

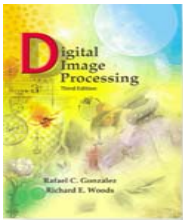
$$\begin{aligned} g(x, y) &= e^{s(x, y)} \\ &= e^{i'(x, y)} e^{r'(x, y)} \\ &= i_0(x, y) r_0(x, y) \end{aligned}$$

که در آن:

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)}$$

و

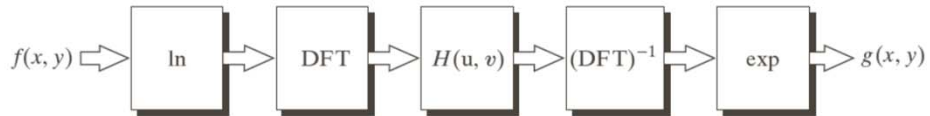
$$r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$



Chapter 4

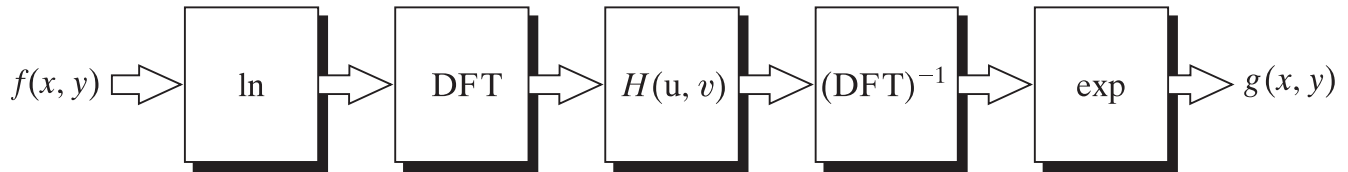
Filtering in the Frequency Domain

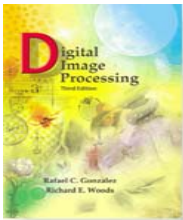
FIGURE 4.60
Summary of steps
in homomorphic
filtering.



فیلتر کردن همریخت

نمودار

HOMOMORPHIC FILTERING



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

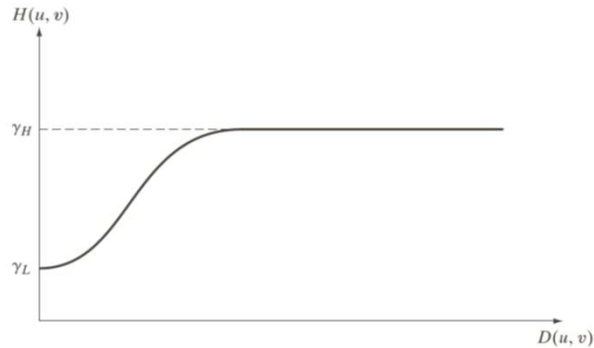


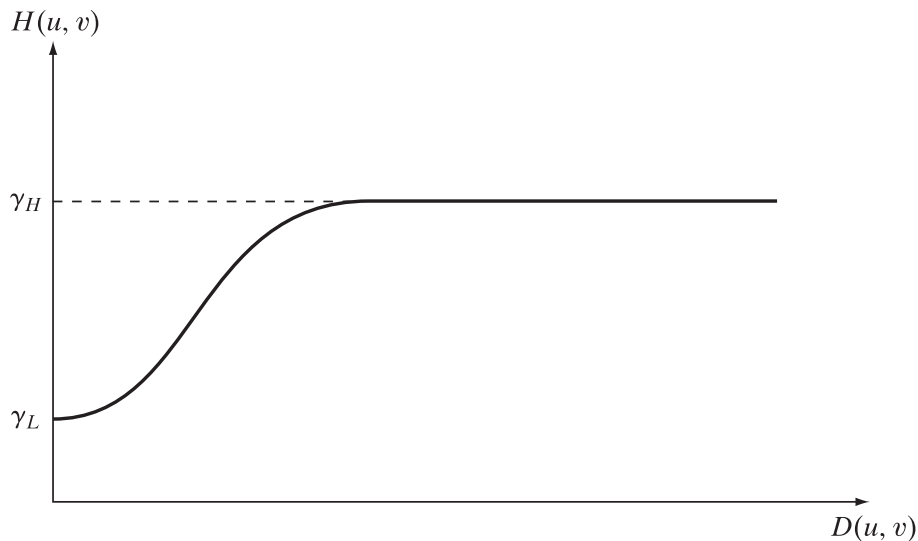
FIGURE 4.61
Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and $D(u, v)$ is the distance from the center.

فیلتر کردن همریخت

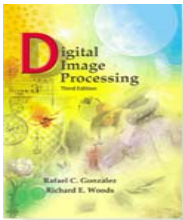
تابع فیلتر همریخت

HOMOMORPHIC FILTER FUNCTION

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$



سطح مقطع شعاعی یک تابع فیلتر همریخت متقارن دایره‌ای.
محور عمودی، در مرکز مستطیل فرکانسی است.

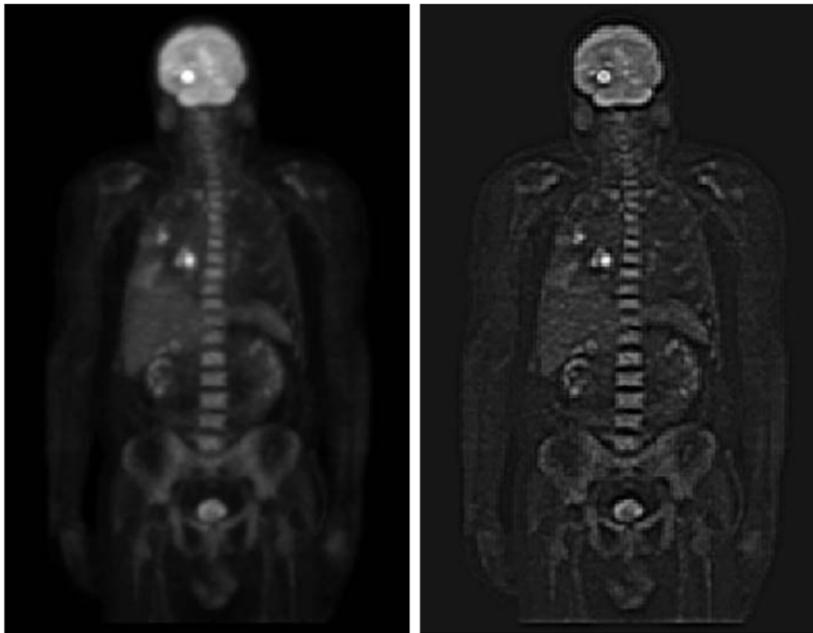


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

FIGURE 4.62

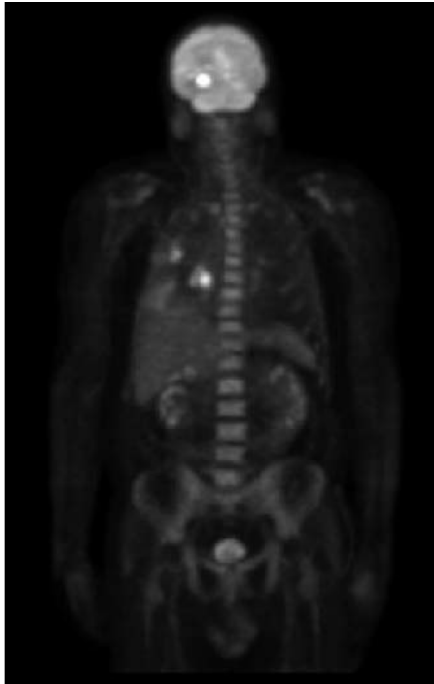
(a) Full body PET scan. (b) Image enhanced using homomorphic filtering. (Original image courtesy of Dr. Michael E. Casey, CTI PET Systems.)

فیلتر کردن همریخت

مثال

HOMOMORPHIC FILTERING

(۱)
تصویر PET
از کل بدن



(۲)
تصویر به سازی شده
با استفاده از
فیلتر کردن همریخت



فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس



فیلترهای انتخاب‌گر (فرکانس‌گزین)

فیلترهای انتخاب‌گر (فرکانس‌گزین)

SELECTIVE FILTERING

فیلتر رد باند

Bandreject Filter

یک باند مشخص از فرکانس‌ها را رد می‌کند.

فیلتر گذر باند

Bandpass Filter

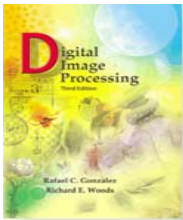
$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$

یک باند مشخص از فرکانس‌ها را عبور می‌دهد.

فیلتر سوارخ‌کننده

Notch Filter

فرکانس‌هایی را در یک همسایگی از پیش تعریف شده حول مرکز مستطیل فرکانسی رد می‌کند (یا عبور می‌دهد).



Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain

TABLE 4.6

Bandreject filters. W is the width of the band, D is the distance $D(u, v)$ from the center of the filter, D_0 is the cutoff frequency, and n is the order of the Butterworth filter. We show D instead of $D(u, v)$ to simplify the notation in the table.

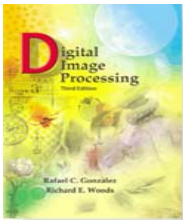
Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$

فیلترهای رد باند

BANDREJECT FILTERS

Bandreject filters. W is the width of the band, D is the distance $D(u, v)$ from the center of the filter, D_0 is the cutoff frequency, and n is the order of the Butterworth filter. We show D instead of $D(u, v)$ to simplify the notation in the table.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$

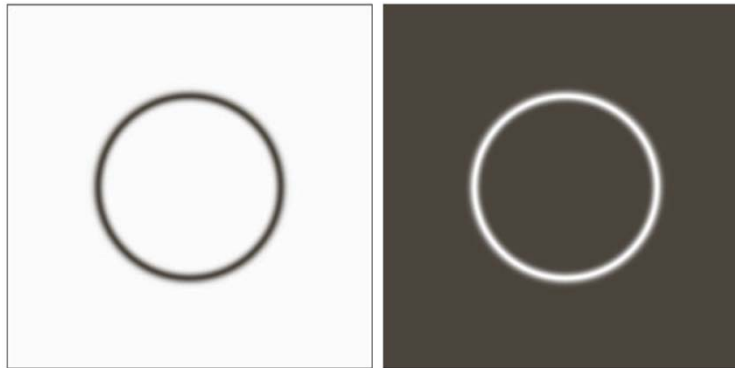


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



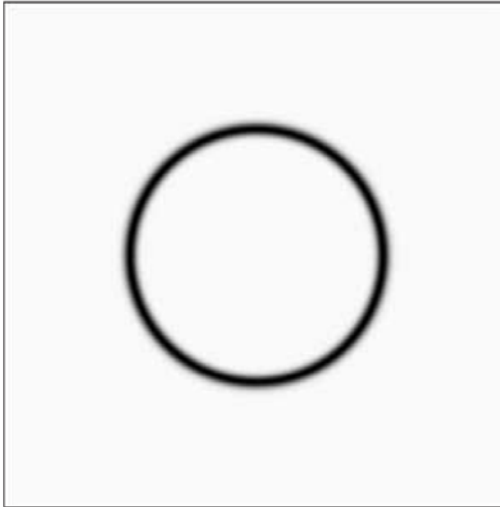
a b

FIGURE 4.63

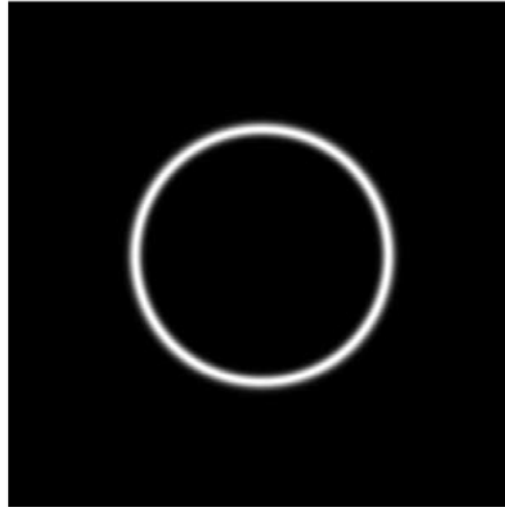
(a) Bandreject Gaussian filter.
(b) Corresponding bandpass filter.
The thin black border in (a) was added for clarity; it is not part of the data.

فیلترهای فرکانس‌گزین

مثال

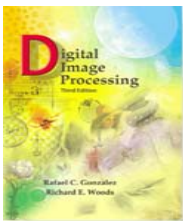
SELECTIVE FILTERS

(۱)
فیلتر گاوسی رد باند



(۲)
فیلتر گاوسی گذر باند

$$H_{\text{BP}}(u, v) = 1 - H_{\text{BR}}(u, v)$$

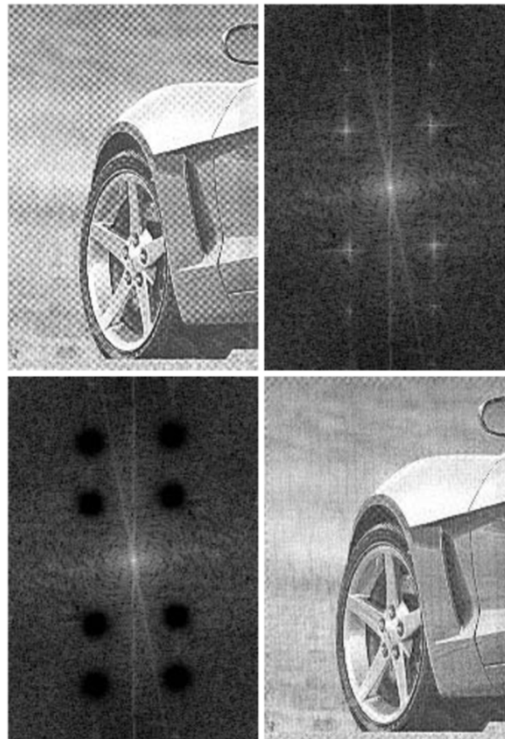


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b
c d

FIGURE 4.64

(a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.
(b) Spectrum.
(c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.
(d) Filtered image.

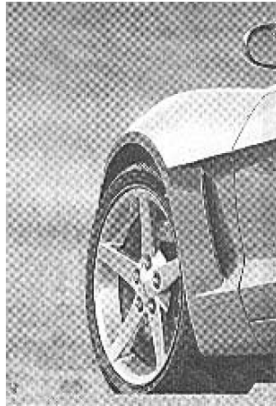
فیلترهای فرکانس‌گزین

مثال: کاهش الگوهای مویر به کمک فیلتر ناچ

SELECTIVE FILTERS

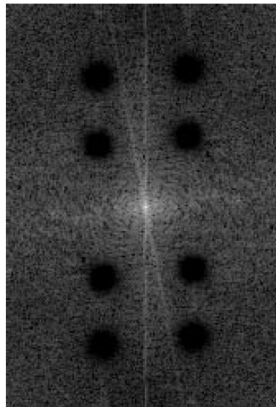
(۱)

تصویر روزنامه
نمونه‌برداری شده
حاوی الگوی مویر



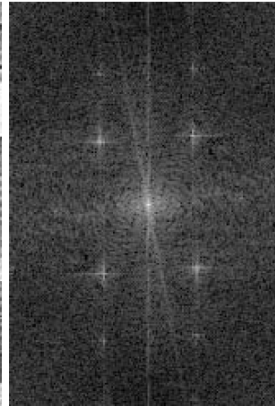
(۳)

فیلتر رد ناچ باترورث
ضرب شده در تبدیل فوریه (۲)



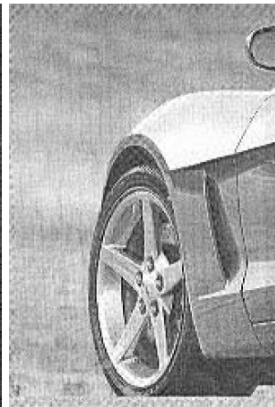
(۲)

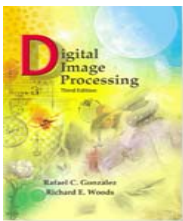
طیف
تبدیل فوریه
تصویر (۱)



(۴)

تصویر فیلترشده
که الگوهای مویر در آن
کاهش یافته است.





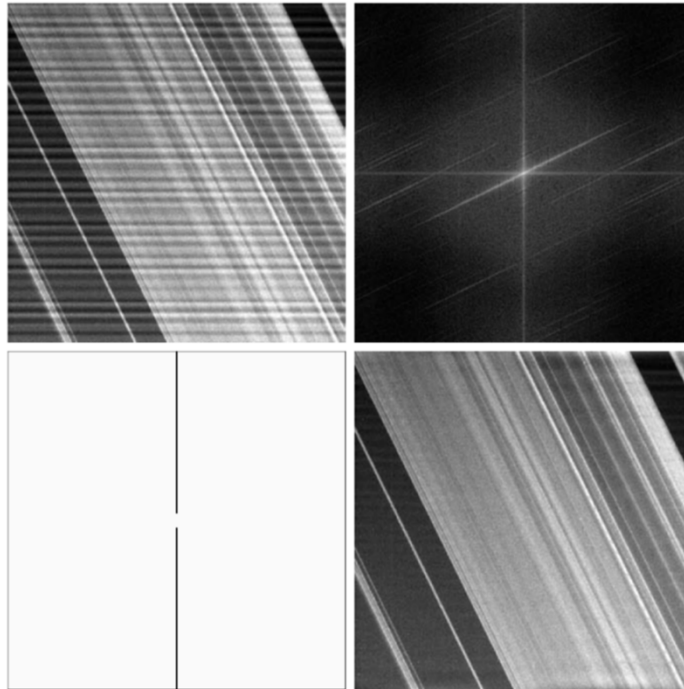
Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4

Filtering in the Frequency Domain



a b
c d

FIGURE 4.65

(a) 674×674 image of the Saturn rings showing nearly periodic interference. (b) Spectrum: The bursts of energy in the vertical axis near the origin correspond to the interference pattern. (c) A vertical notch reject filter. (d) Result of filtering. The thin black border in (c) was added for clarity; it is not part of the data. (Original image courtesy of Dr. Robert A. West, NASA/JPL.)

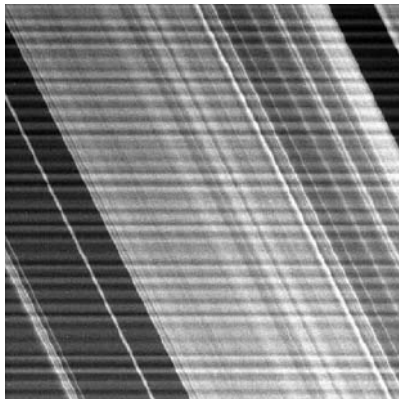
فیلترهای فرکانس‌گزین

مثال: به‌سازی تصویر تخریب‌شده به کمک فیلتر ناچ

SELECTIVE FILTERS

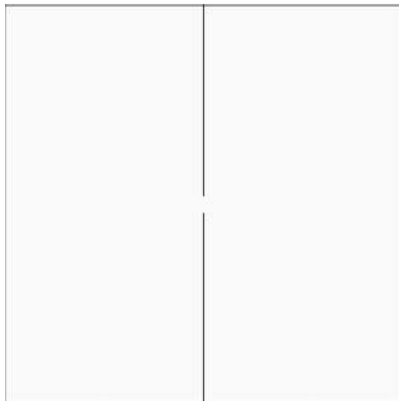
(۱)

تصویر 674×674
از حلقه‌های زحل
دارای تداخل‌های
تقریباً متناوب



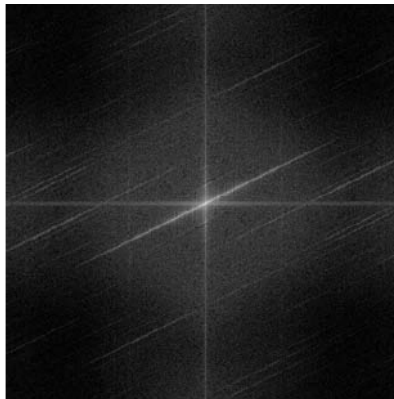
(۳)

یک فیلتر
رد ناچ عمودی



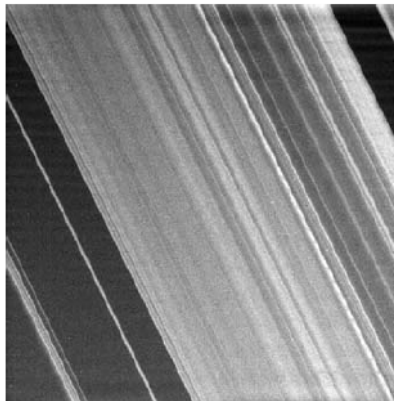
(۲)

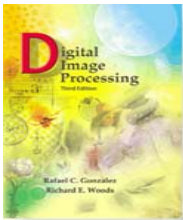
طیف فوریه:
شلیک‌های انرژی در
محور عمودی نزدیک
به مبدأ متناظر با
الگوی تداخل‌هاست.



(۴)

حاصل فیلتر کردن



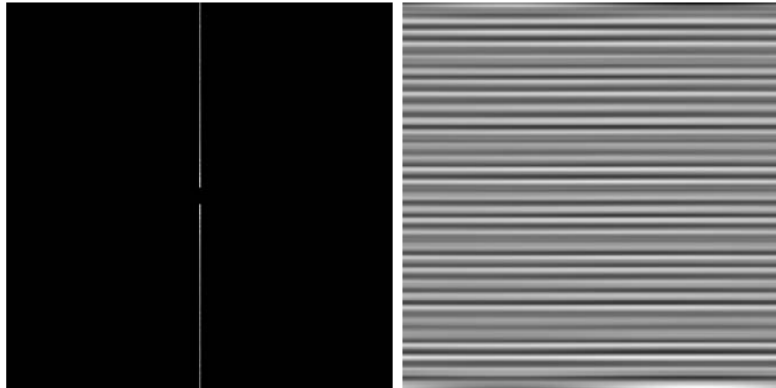


Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain



a b

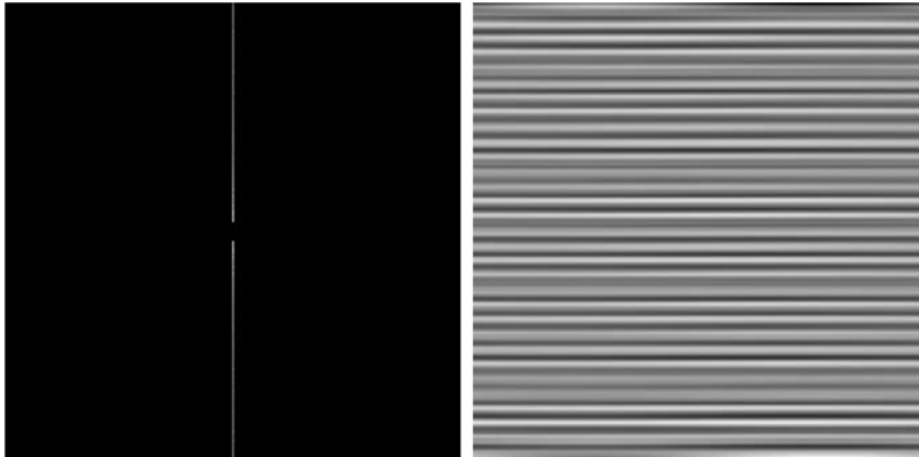
FIGURE 4.66

(a) Result (spectrum) of applying a notch pass filter to the DFT of Fig. 4.65(a).
(b) Spatial pattern obtained by computing the IDFT of (a).

فیلترهای فرکانس‌گزین

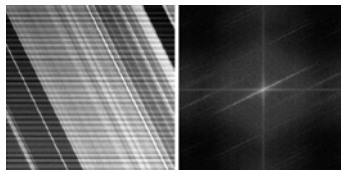
مثال: به‌سازی تصویر تخریب‌شده به کمک فیلتر ناچ

SELECTIVE FILTERS



(۱)

حاصل اعمال یک فیلتر گذر ناچ به
تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی شکل زیر:



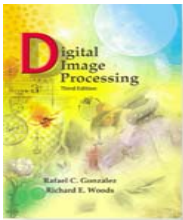
(۲)

الگوی مکانی حاصل از محاسبه‌ی
تبدیل فوری‌ی گسسته‌ی معکوس (۱)

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۱۱

پیاده‌سازی



Digital Image Processing, 3rd ed.

Gonzalez & Woods

www.ImageProcessingPlace.com

Chapter 4 Filtering in the Frequency Domain

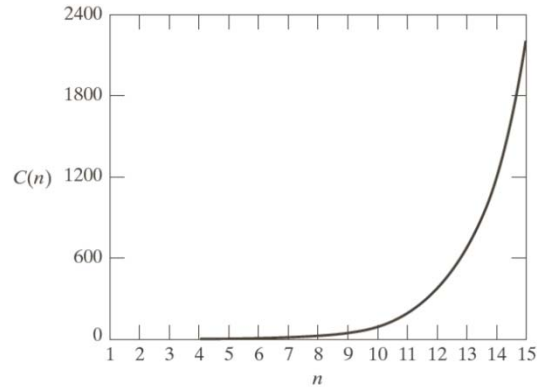
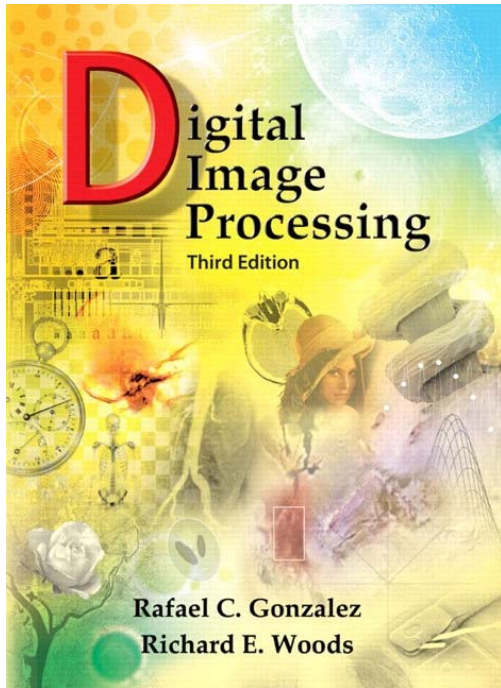


FIGURE 4.67
Computational advantage of the FFT over a direct implementation of the 1-D DFT. Note that the advantage increases rapidly as a function of n .

فیلتر کردن در حوزه‌ی فرکانس

۱۲

منابع



Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods,
Digital Image Processing,
Third Edition, Pearson Prentice Hall, 2008.
Chapter 4