بسم الله الرحمن الرحیم

پردازش سیگنال دیجیتال

درس ۶

سیگنال‌های تصادفی گسسته–زمان

Discrete-Time Random Signals

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران
http://courses.fouladi.ir/dsp

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته–زمان

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

بسیاری از سیگنال‌های گسسته–زمان، ماهیت تصادفی (اتفاقی) دارند.

مثال: **سیگنال یک تراگذر** (transducer)

$$x[n] = x_d[n] + e[n]$$

بخش قطعی
deterministic part

بخش اتفاقی
stochatic part

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته-زمان

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

برای تحلیل دقیق یک سیگنال تصادفی
می‌توان مقادیر سیگنال در هر لحظه را یک متغیر تصادفی x_n قلمداد کرد.

$$\text{signal}: \{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\ldots, x[-1], x[0], x[1], \ldots\}$$

برای بررسی دقیق به توابع توزیع / چگالی یا آماره‌های مرتبه بالای x_n نیاز داریم.

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته–زمان

ایستان بودن

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

سیگنال ایستان *Stationary Signal*	سیگنالی که مشخصه‌های آماری آن با زمان تغییر نمی‌کند.
سیگنال ایستان به مفهوم وسیع *Wide-Sense Stationary (WSS) Signal*	سیگنالی که خودهمبستگی آن تنها تابعی از تفاضل زمان‌هاست.

$$E\{x[n]\} = m_x$$

$$\phi_{xx}[n, n+m] = \phi_{xx}[m]$$

خودهمبستگی (autocorrelation): همبستگی سیگنال با خودش را بیان می‌کند.

$$\phi_{xx}[n, n+m] = E\{x[n]x^*[n+m]\}$$

در حالت WSS خودهمبستگی $\phi_{xx}[n, n+m]$ فقط به اختلاف زمان‌ها وابسته است: $\phi_{xx}[m]$.

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته-زمان

خروجی سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان برای ورودی ایستان به مفهوم وسیع

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

خروجی یک سیستم LTI در هنگامی که ورودی WSS باشد، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E\{x[n]\} = m_x$$

$$\phi_{xx}[n, n+m] = \phi_{xx}[m]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$\begin{aligned} m_y &= E\{y[n]\} = E\{h[n] * x[n]\} = E\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]E\{x[n-k]\} \\ &= m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \\ &= m_x H(e^{j0}) \end{aligned}$$

پس m_y ثابت است.

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته–زمان

همبستگی خروجی با ورودی

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

همبستگی خروجی با ورودی، نیز فقط به اختلاف زمان‌ها وابسته است:

$$\begin{aligned}\phi_{yx}[n,n+m] &= E\{y[n]x^*[n+m]\} = E\{\sum_k h[k]x[n-k]x^*[n+m]\} \\ &= \sum_k h[k]E\{x[n-k]x^*[n+m]\} \\ &= \sum_k h[k]\phi_{xx}[m+k] \\ &= \phi_{xx}[m]*h[-m] \\ &= \phi_{yx}[m]\end{aligned}$$

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته–زمان

خودهمبستگی خروجی

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

همبستگی خروجی با خودش، نیز فقط به اختلاف زمان‌ها وابسته است:

$$\phi_{yy}[n, n+m] = h^*[m] * \phi_{yx}[m]$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_{yy}[m] = h^*[m] * h[-m] * \phi_{xx}[m]$$

سیگنال‌های تصادفی (اتفاقی) گسسته–زمان

خودهمبستگی دنباله‌ی پاسخ ضربه

DISCRETE-TIME RANDOM (STOCHASTIC) SIGNALS

تعریف می‌کنیم:

$$c_{hh}[m] = \sum_{k} h[k]h^*[m+k] = h[m] * h^*[-m]$$

چگالی طیف توان

برای سیگنال تصادفی $x[n]$

POWER DENSITY SPECTRUM

طیف توان (قدرت):

$$\phi_{xx}[m] \quad \xleftrightarrow{FT} \quad \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[k] e^{-j\omega k}$$

طیف توان $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ یک عدد حقیقی است و در حالت کلی همواره نامنفی است.

$$\phi_{xx}^*[-m] = \phi_{xx}[m] \quad \Rightarrow \quad \Phi_{xx}^*(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E\{|X_N(e^{j\omega})|^2\}$$

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) \Phi_{xx}(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left|H^*(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

واریانس خروجی

OUTPUT VARIANCE

واریانس خروجی:

$$\sigma^2_{y[n]} = E\{y^2[n]\} - m_y^2$$

$$E\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) d\omega = E\{y[n]y^*[n+m]\}\Big|_{m=0}$$