دانشگاه تهران
پردیس البرز
گروه فنی

پردازش سیگنال دیجیتال
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/dsp

تکلیف شماره‌ی ۱۰

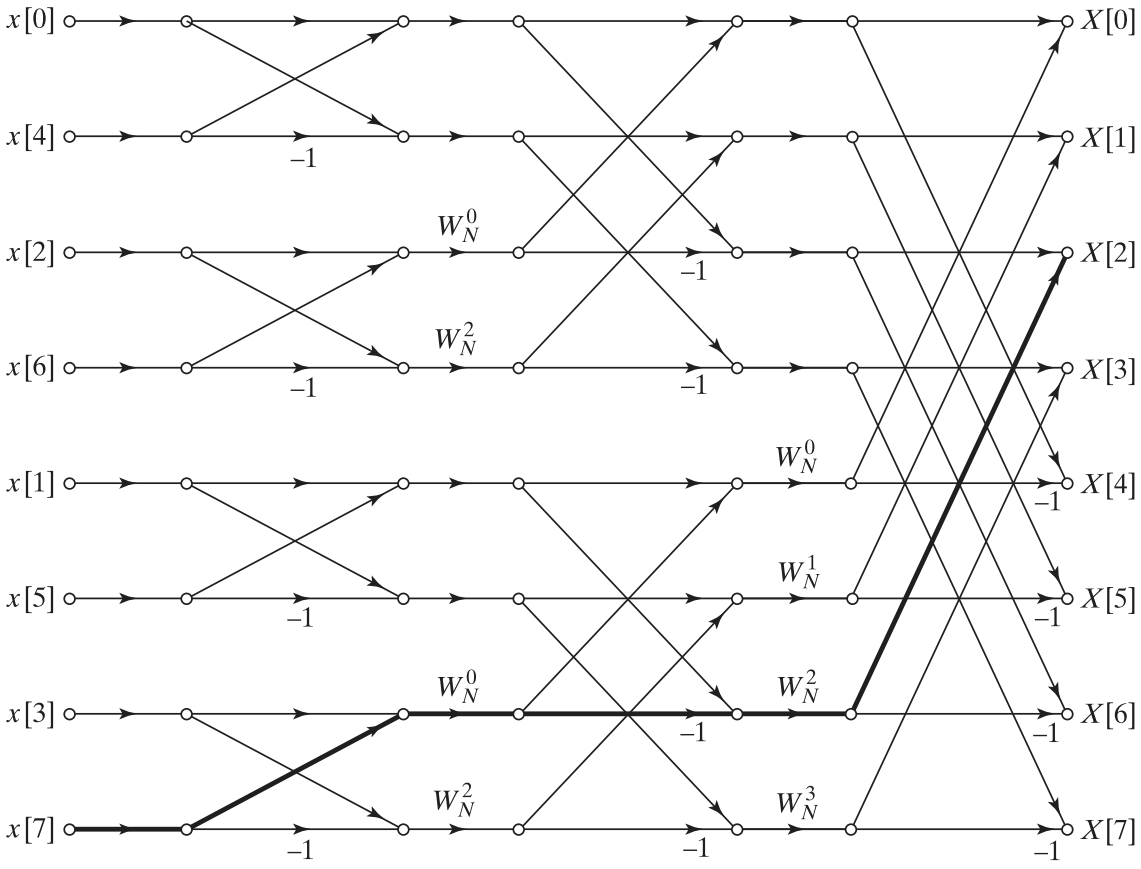
فصل نهم

محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته

COMPUTATION OF THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

۱) شکل زیر، بازنمایی گرافی یک الگوریتم decimination-in-time FFT را برای $N = ۸$ نشان می‌دهد. خط پررنگ یک مسیر از نمونه‌ی $x[۷]$ به نمونه‌ی DFT، $X[۲]$ نشان می‌دهد.



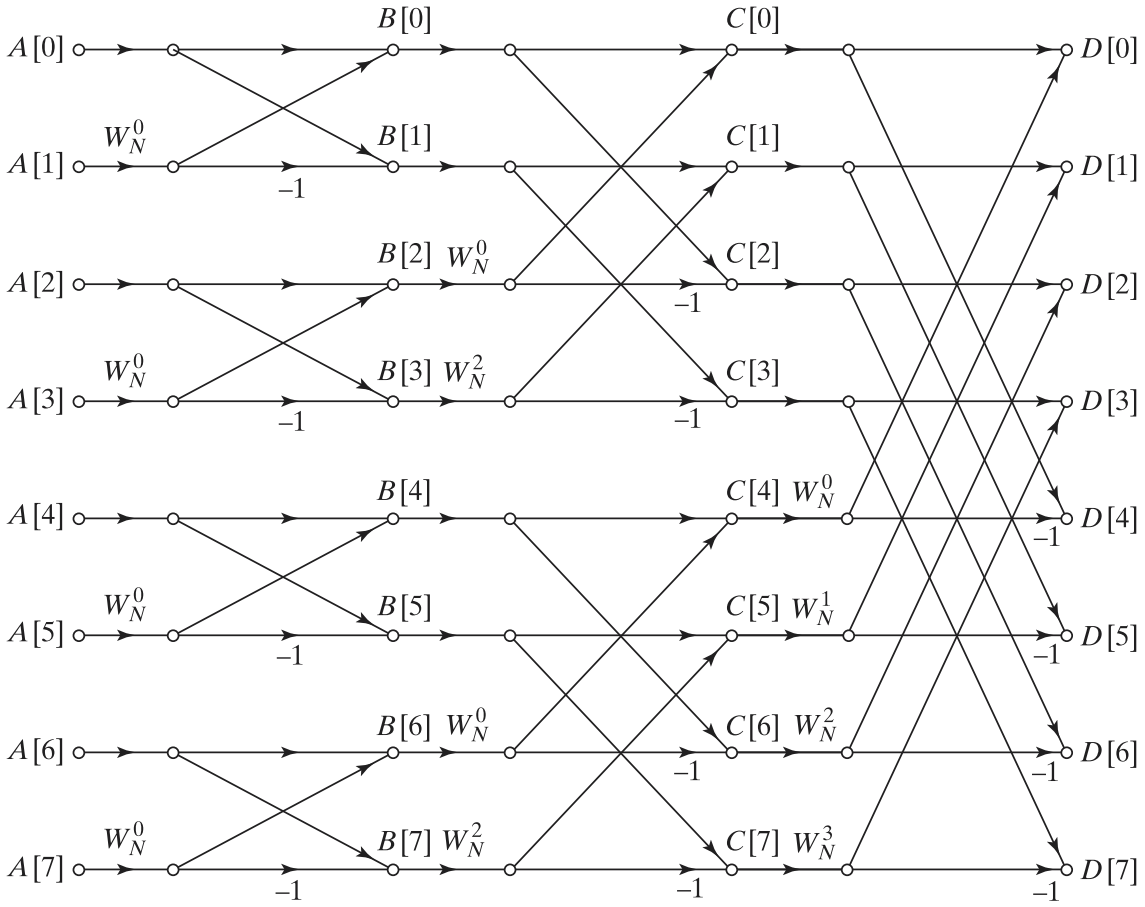
(الف) بهره (gain) بر روی مسیر پررنگ شکل فوق چیست؟

(ب) چند مسیر دیگر در گراف جریان فوق با شروع از $x[۷]$ و پایان در $X[۲]$ وجود دارد؟ آیا این در حالت کلی درست است؟ یعنی، چه تعداد مسیر بین هر نمونه‌ی ورودی و هر نمونه‌ی خروجی وجود دارد؟

(ج) حال، نمونه‌ی DFT، $X[۲]$ را در نظر بگیرید. با دنبال کردن مسیرها در گراف جریان فوق، نشان دهید که هر نمونه‌ی ورودی با تعداد متناسبی در نمونه‌های خروجی DFT نقش بازی می‌کند، یعنی وارسی کنید که

$$X[۲] = \sum_{n=۰}^{N-۱} e^{-j(۲\pi/N)۲n}.$$

۲) شکل زیر، گراف جریان الگوریتم decimination-in-time FFT را برای $N = ۸$ (۸-نقطه‌ای) نشان می‌دهد. فرض کنید $x[n]$ دنباله‌ای باشد که DFT آن $X[k]$ باشد. در این گراف جریان $A[.]$، $B[.]$، $C[.]$ و $D[.]$ آرایه‌های مجزایی را بازنمایی می‌کنند که به‌طور متوالی به‌همان ترتیب نشان‌داده‌شده در گره‌ها اندیس‌گذاری شده‌اند.



(الف) مشخص کنید که عناصر دنبالهِ $x[n]$ چگونه باید در آرایه‌ی $A[r], r = ۰, ۱, \ldots, ۷$ قرار گیرند. همچنین مشخص کنید که عناصر دنباله‌ی DFT چگونه باید از آرایه‌ی $D[r], r = ۰, ۱, \ldots, ۷$ استخراج شوند.

(ب) بدون تعیین مقادیر در آرایه‌های میانی، $B[.]$ و $C[.]$، دنباله‌ی آرایه‌ی $D[r], r = ۰, ۱, \ldots, ۷$ را تعیین و رسم کنید اگر دنباله‌ی ورودی $x[n] = (-W_N)^n, n = ۰, ۱, \ldots, ۷$ باشد.

(ج) دنباله‌ی $C[r], r = ۰, ۱, \ldots, ۷$ را تعیین و رسم کنید اگر تبدیل فوریه‌ی خروجی $x[k] = ۱, k = ۰, ۱, \ldots, ۷$ باشد.

۳) در پیاده‌سازی الگوریتم FFT گاهی اوقات مفید است که توان‌های W_N را با یک معادله‌ی تفاضلی بازگشتی یا نوسان‌ساز (oscillator) تولید کنیم. در این مسئله، یک الگوریتم decimination-in-time مبنای ۲ برای $N = ۲^v$ را در نظر می‌گیریم. شکل زیر، این نوع الگوریتم را برای $N = ۸$ به‌تصویر می‌کشد. برای تولید کارآمد ضرایب، فرکانس نوسان‌ساز باید از یک مرحله به مرحله‌ی دیگر تغییر کند.

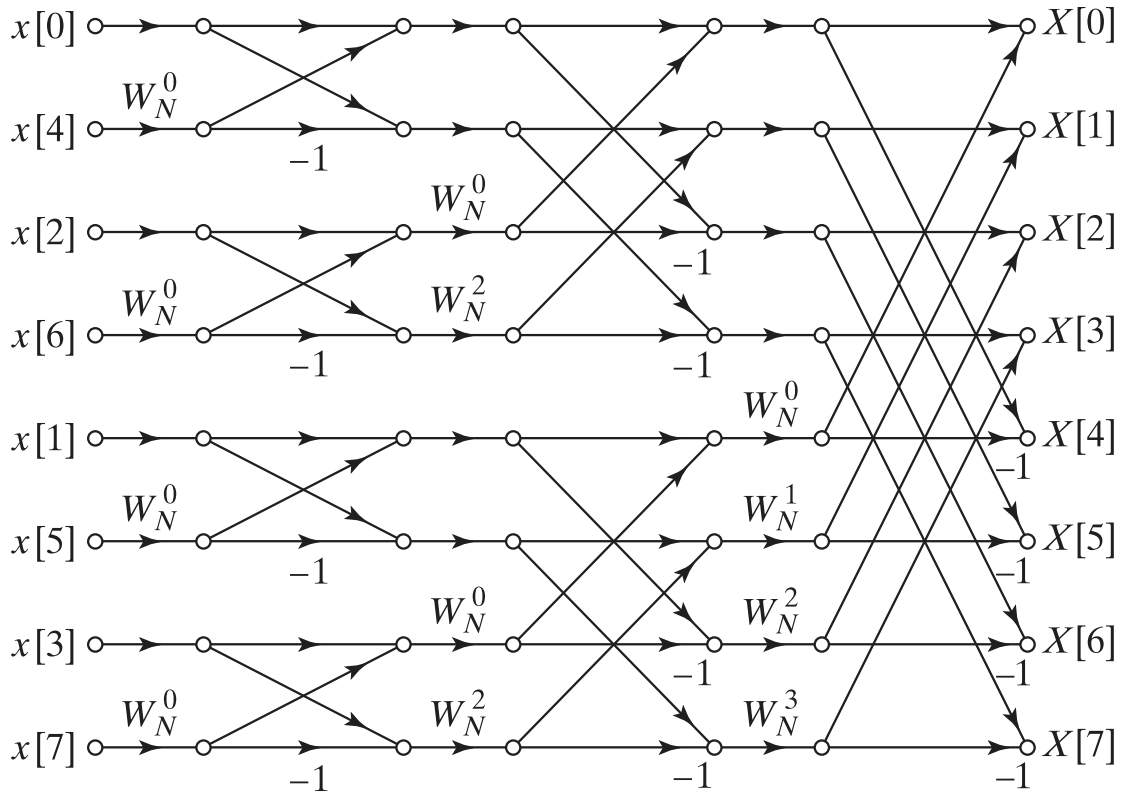
فرض می‌کنیم آرایه‌ها از ۰ تا $v = \log_۲ N$ شماره‌گذاری شوند، بنابراین، آرایه‌ی حاوی دنباله‌ی ورودی اولیه، آرایه‌ی صفرم و DFT در آرایه‌ی vام خواهد بود. در محاسبه‌ی پروانه‌ها در یک مرحله‌ی داده‌شده، همه‌ی پروانه‌ها به ضرایب یکسان W_N^r نیاز دارند که پیش از به‌دست آوردن ضرایب جدید بایستی ارزیابی شود. در اندیس‌گذاری آرایه، فرض می‌کنیم که داده‌ها در این آرایه دررجیسترهای مختلط متوالی با شماره‌های ۰ تا $(N - ۱)$ ذخیره شده‌اند. همه‌ی پرسش‌های زیر، در مورد محاسبه‌ی mامین آرایه از روی $(m - ۱)$امین آرایه است که در آن $۱ \le m \le v$ است. پاسخ‌ها باید بر حسب m بیان شوند.

(الف) چه تعداد پروانه باید در مرحله‌ی mام محاسبه شود؟ چه تعداد ضریب مختلف برای مرحله‌ی mام لازم است؟

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)

(ب) یک معادله‌ی تفاضلی بنویسید که پاسخ ضربه‌ی آن $h[n]$ حاوی ضرایب W_N^r باشد که برای پروانه‌ها در مرحله‌ی mام لازم است.

(ج) معادله‌ی تفاضلی در قسمت قبل، باید فرم یک نوسان‌ساز داشته باشد، یعنی $h[n]$ باید برای $n \geq 0$ متناوب باشد. دوره تناوب $h[n]$ چیست؟ بر اساس این، یک عبارت برای فرکانس این نوسان‌ساز به‌صورت تابعی از m بنویسید.

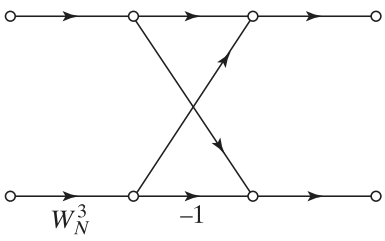


۴) پروانه‌ی شکل زیر را در نظر بگیرید. این پروانه از یک گراف جریان سیگنال که یک الگوریتم FFT را پیاده‌سازی می‌کند، استخراج شده است. دقیق‌ترین جمله در این لیست را انتخاب کنید:

(الف) این پروانه از یک الگوریتم decimination-in-time FFT استخراج شده است.

(ب) این پروانه از یک الگوریتم decimination-in-frequency FFT استخراج شده است.

(ج) از روی شکل ممکن نیست که بگوییم این پروانه از کدام نوع الگوریتم FFT آمده است.



Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)