هوالحکیم

پردازش سیگنال دیجیتال
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/dsp

دانشگاه تهران
پردیس البرز
گروه فنی

تکلیف شماره‌ی ۹

فصل هشتم

تبدیل فوریه‌ی گسسته

The Discrete Fourier Transform

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

۱) فرض کنید $x[n]$ یک دنباله با طول متناهی با طول N باشد. نشان دهید که

$$x[((-n))_N] = x[((N-n))_n].$$

۲) یک دنباله با مدت متناهی $x[n]$ را با طول P در نظر بگیرید که $x[n] = 0$ for $n < 0$ and $n \geq P$. می‌خواهیم نمونه‌های تبدیل فوریه را در N فرکانس با فاصله‌های مساوی

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

محاسبه کنیم. روال‌هایی را برای محاسبه‌ی N نمونه‌ی تبدیل فوریه با استفاده از تنها یک DFT، N-نقطه‌ای برای دو حالت زیر تعیین و توجیه کنید:

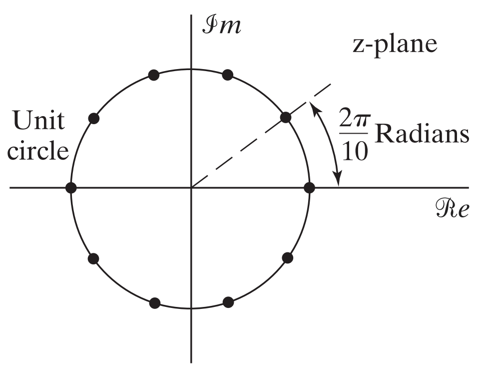
(الف) $N > P$

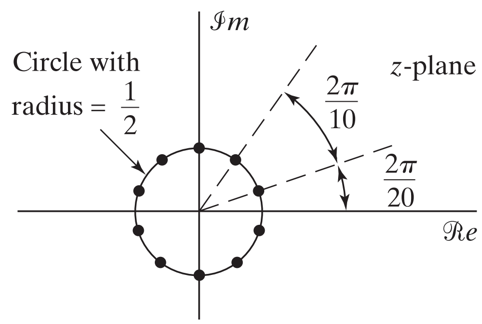
(ب) $N < P$

۳) DFT یک دنباله‌ی دارای مدت متناهی، متناظر با نمونه‌های تبدیل z آن بر روی دایره‌ی واحد است برای مثال، DFT یک دنباله‌ی ۱۰-نقطه‌ای $x[n]$ متناظر با نمونه‌های $X(z)$ در ۱۰ نقطه با فاصله‌های مساوی است به‌گونه‌ای که در شکل زیر (چپ) نشان داده شده است. می‌خواهیم نمونه‌های متساوی الفاصله از $X(z)$ را روی منحنی بسته‌ی نشان داده شده در شکل زیر (راست) بیابیم. یعنی، می‌خواهیم

$$X(z)\big|_{z=0.5e^{j[(2\pi k/10)+\pi/10]}}$$

را به‌دست آوریم. نشان دهید که چگونه باید $x[n]$ را تغییر بدهیم تا دنباله‌ی $x_1[n]$ به‌دست آید به‌طوری‌که DFT دنباله‌ی $x_1[n]$ متناظر با نمونه‌های مطلوب $X(z)$ شود.





۴) بخش زوج دنباله‌ی حقیقی $x[n]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

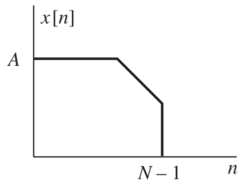
$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}.$$

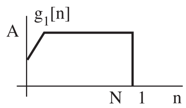
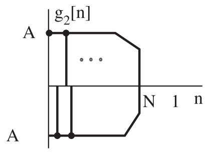
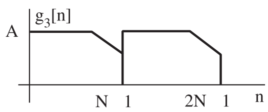
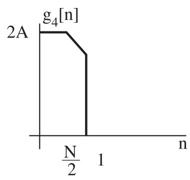
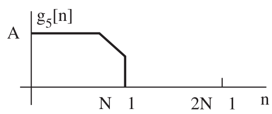
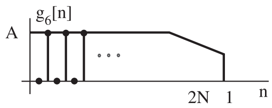
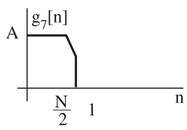
فرض کنید که $x[n]$ یک دنباله‌ی حقیقی با طول متناهی باشد که در آن $x[n] = 0$ for $n < 0$ and $n \geq N$. فرض کنید $X[k]$ تبدیل گسسته‌ی فوریه‌ی N-نقطه‌ای $x[n]$ باشد.

(الف) آیا $\mathcal{R}e\{X[k]\}$ تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی $x_e[n]$ است؟

(ب) تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی معکوس $\mathcal{R}e\{X[k]\}$ برحسب $x[n]$ چیست؟

۵) یک دنباله با مدت متناهی $x[n]$ را در نظر بگیرید که $x[n] = 0$ for $n < 0$ and $n \geq N$ که در آن N زوج است. تبدیل z دنباله‌ی $x[n]$ به‌وسیله‌ی $X(z)$ نشان داده می‌شود. جدول زیر، فهرست هفت دنباله‌ی حاصل از $x[n]$ را نشان می‌دهد (برای نمایش و درک بهتر، فرض کرده‌ایم که $x[n]$ به صورت نمودار بالای جدول باشد).



$g_1[n] = x[N-1-n]$	
$g_2[n] = (-1)^n x[n]$	
$g_3[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	
$g_4[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+N/2], & 0 \leq n \leq N/2-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	
$g_5[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	
$g_6[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ even}, \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$	
$g_7[n] = x[2n]$	

برای هر یک از دنباله‌های جدول فوق، DFT آن را در جدول زیر بیابید. اندازه‌ی تبدیل در نظر گرفته‌شده باید بزرگ‌تر از یا مساوی با طول دنباله‌ی $g_k[n]$ باشد.

$H_1[k] = X(e^{j2\pi k/N})$
$H_2[k] = X(e^{j2\pi k/2N})$
$H_3[k] = \begin{cases} 2X(e^{j2\pi k/2N}), & k \text{ even}, \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases}$
$H_4[k] = X(e^{j2\pi k/(2N-1)})$
$H_5[k] = 0.5\{X(e^{j2\pi k/N}) + X(e^{j2\pi(k+N/2)/N})\}$
$H_6[k] = X(e^{j4\pi k/N})$
$H_7[k] = e^{j2\pi k/N} X(e^{-j2\pi k/N})$
$H_8[k] = X(e^{j(2\pi/N)(k+N/2)})$
$H_9[k] = X(e^{-j2\pi k/N})$

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)