دانشگاه تهران
پردیس البرز
گروه فنی

پردازش سیگنال دیجیتال
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/dsp

تکلیف شماره‌ی ۸

فصل هفتم

تکنیک‌های طراحی فیلتر

FILTER DESIGN TECHNIQUES

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

۱) فرض کنید یک فیلتر پایین‌گذر پیوسته-زمان با پاسخ فرکانسی $H_c(j\omega)$ داده شده باشد، به‌طوری که

$$\begin{aligned} 1-\delta_1 \le |H_c(j\Omega)| \le 1+\delta_1 \quad &, |\Omega| \le \Omega_p \\ |H_c(j\Omega)| \le \delta_2 \quad &, |\Omega| \ge \Omega_s \end{aligned}$$

مجموعه‌ای از فیلترهای پایین‌گذر زمان-گسسته می‌توانند از روی $H_c(s)$ با استفاده از تبدیل دوخطی، به دست آیند، یعنی:

$$H(z) = H_c(s)|_{s=(2/T_d)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]}$$

که در آن T_d متغیر است.

(الف) فرض کنید که Ω_p ثابت باشد. مقداری از T_d را بیابید که فرکانس قطع باند گذر متناظر برای سیستم گسسته-زمان $\omega_p = \pi/2$ شود.

(ب) با Ω_p ثابت، ω_p را به‌صورت تابعی از $0 < T_d < \infty$ رسم کنید.

(ج) برای هر دوی Ω_p و Ω_s ثابت، ناحیه‌ی انتقال $\Delta\omega = (\omega_s - \omega_p)$ را به‌صورت تابعی از $0 < T_d < \infty$ رسم کنید.

۲) یک سیستم پیوسته-زمان با تابع سیستم

$$H_c(s) = \frac{1}{s}$$

را در نظر بگیرید. این سیستم انتگرال‌گیر نام دارد، زیرا خروجی $y_c(y)$ با ورودی $x_c(t)$ با رابطه‌ی

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau)d\tau$$

به هم مرتبط می‌شوند. فرض کنید یک سیستم گسسته-زمان با اعمال تبدیل دوخطی به $H_c(s)$ به‌دست آید.

(الف) تابع سیستم $H(z)$ برای سیستم گسسته-زمان حاصل چیست؟ پاسخ ضربه $h[n]$ چیست؟

(ب) اگر $x[n]$ ورودی و $y[n]$ خروجی سیستم گسسته-زمان حاصل باشد، یک معادله‌ی تفاضلی بنویسید که با این ورودی و خروجی ارضا شود. چه مشکلاتی برای پیاده‌سازی این سیستم گسسته-زمان با استفاده از این معادله‌ی تفاضلی وجود دارد؟

(ج) عبارتی برای پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ این سیستم بیابید. تحت چه شرایطی این انتگرال‌گیر گسسته می‌تواند به‌عنوان تقریبی خوب برای انتگرال‌گیر پیوسته-زمان در نظر گرفته شود؟

۳) یک فیلتر گسسته-زمان با تابع سیستم $H(z)$ با تبدیل یک فیلتر پیوسته-زمان با تابع سیستم $H_c(s)$ طراحی شده است. مطلوب است که

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = H_c(e^{j\Omega})|_{\Omega=0}.$$

(الف) آیا این شرط برای فیلتری که با روش impulse invarance طراحی شده است، برقرار است؟ اگر این طور است، $H_c(j\Omega)$ چه شرایطی را باید ارضا کند؟

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)

(ب) آیا این شرط برای فیلتری که با روش bilinear transformation طراحی شده است، برقرار است؟ اگر این طور است، $H_c(j\Omega)$ چه شرایطی را باید ارضا کند؟

۴) فرض کنید $h_d[n]$ پاسخ ضربه‌ی یک سیستم ایده‌آل مطلوب با پاسخ فرکانسی متناظر $H_d(e^{j\omega})$ باشد و $h[n]$ و $H(e^{j\omega})$ به‌ترتیب پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی یک تقریب FIR برای این سیستم ایده‌آل باشد. فرض کنید که $h[n] = ۰$ برای $n < ۰, n > M$. می‌خواهیم $(M + ۱)$ نمونه از این پاسخ ضربه را انتخاب کنیم تا خطای حداقل-مربعات پاسخ فرکانسی که با معادله‌ی

$$\epsilon^۲ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^۲ d\omega$$

تعریف می‌شود، می‌نیمم شود.

(الف) از رابطه‌ی پارسوال برای بیان این تابع خطا برحسب دنباله‌های $h_d[n]$ و $h[n]$ استفاده کنید.

(ب) با استفاده از نتیجه‌ی بخش قبل، مقادیر $h[n]$ برای $۰ \leq n \leq M$ که $\epsilon^۲$ را می‌نیمم می‌کند، بیابید.

۵) یک مبدل هیلبرت گسسته-زمان ایده‌آل، سیستمی است که ۹۰− درجه ($-\pi/۲$ رادیان) برای $۰ < \omega < \pi$ و ۹۰+ درجه ($+\pi/۲$ رادیان) برای $-\pi < \omega < ۰$ و شیفت فاز وارد می‌کند. چنین سیستم‌هایی شیفت‌دهنده‌های فاز ۹۰ درجه‌ای ایده‌آل نیز نامیده می‌شوند.

(الف) یک معادله برای پاسخ فرکانسی ایده‌آل $H_d(e^{j\omega})$ یک مبدل هیلبرت گسسته-زمان ایده‌آل که همچنین شامل تاخیر گروهی ثابت (غیر صفر) است، ارائه بدهید. پاسخ فاز این سیستم را برای $-\pi < \omega < \pi$ رسم کنید.

(ب) چه نوع(هایی) از سیستم‌های FIR با فاز خطی (I، II، III یا IV) می‌تواند برای تقریب زدن مبدل هیلبرت ایده‌آل قسمت قبل استفاده شود؟

(ج) فرض کنید که می‌خواهیم از روش پنجره‌بندی برای طراحی یک تقریب فاز-خطی از مبدل هیلبرت ایده‌آل استفاده کنیم. از $H_d(e^{j\omega})$ داده شده در قسمت اول برای تعیین پاسخ ضربه‌ی ایده‌آل $h_d[n]$ استفاده کنید، اگر سیستم FIR به‌گونه‌ای باشد که $h[n] = ۰$ برای $n < ۰, n > M$.

(د) تأخیر سیستم اگر $M = ۲۱$ باشد، چیست؟

(ه) تأخیر سیستم اگر $M = ۲۰$ باشد، چیست؟

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)