دانشگاه تهران
پردیس البرز
گروه فنی

پردازش سیگنال دیجیتال
نیمسال دوم ۹۷-۱۳۹۶
http://courses.fouladi.ir/dsp

تکلیف شماره‌ی ۷

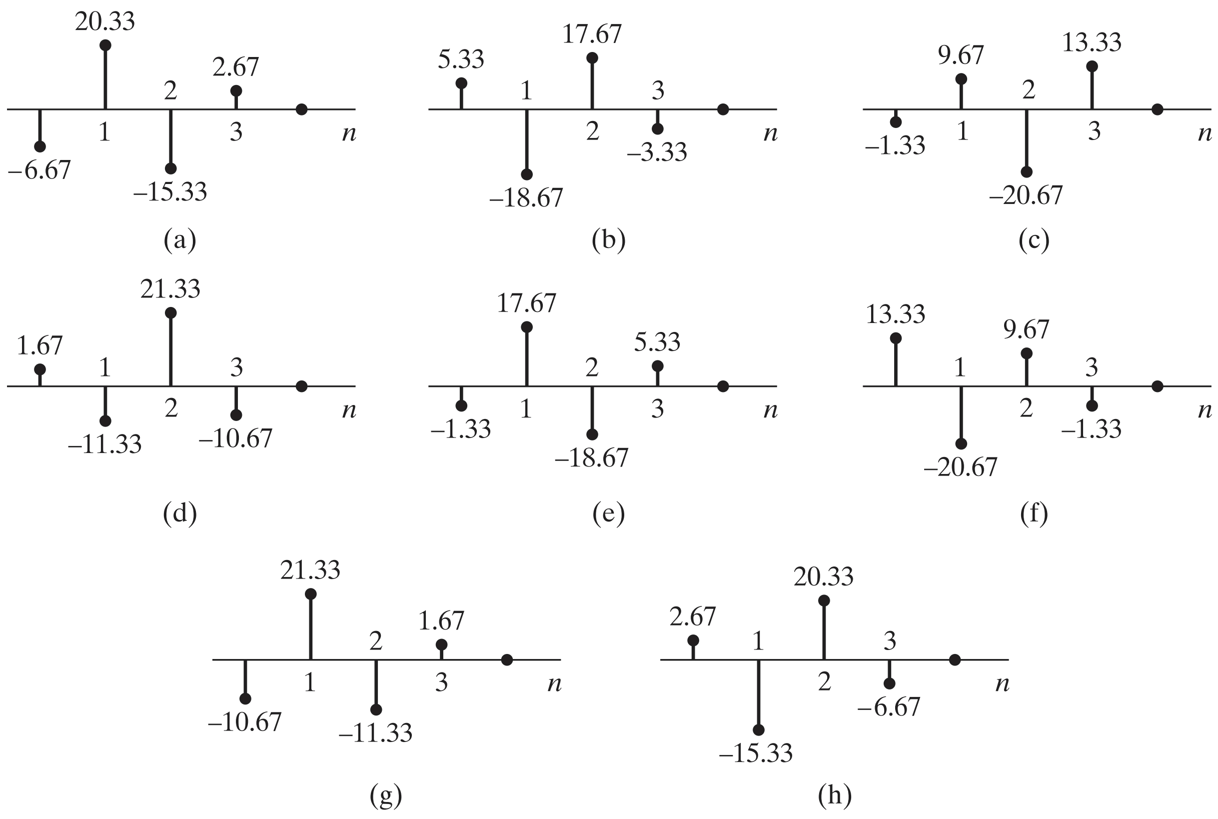
فصل پنجم

سیستم‌های می‌نیمم-فاز و فاز خطی تعمیم‌یافته

MINIMUM-PHASE SYSTEMS AND GENERALIZED LINEAR PHASE

◊ مسئله‌های تحلیلی ـ تشریحی

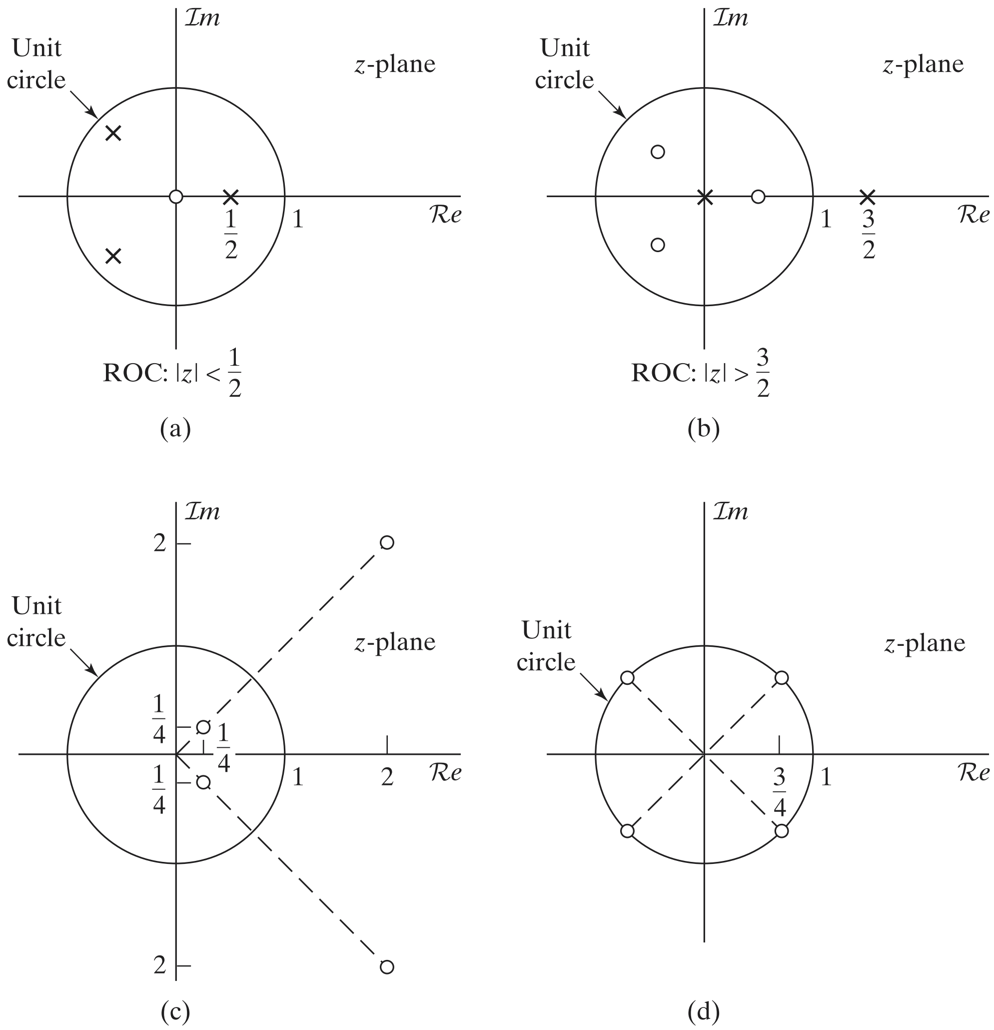
۱) در شکل زیر هشت دنباله‌ی مدت-محدود (finite-duration) مختلف نشان داده شده است. هر دنباله چهار نقطه طول دارد. اندازه‌ی تبدیل فوریه‌ی همه‌ی این دنباله‌ها یکسان است. برای کدام‌یک از این دنباله‌ها همه‌ی صفرهای تبدیل z داخل دایره‌ی واحد است؟



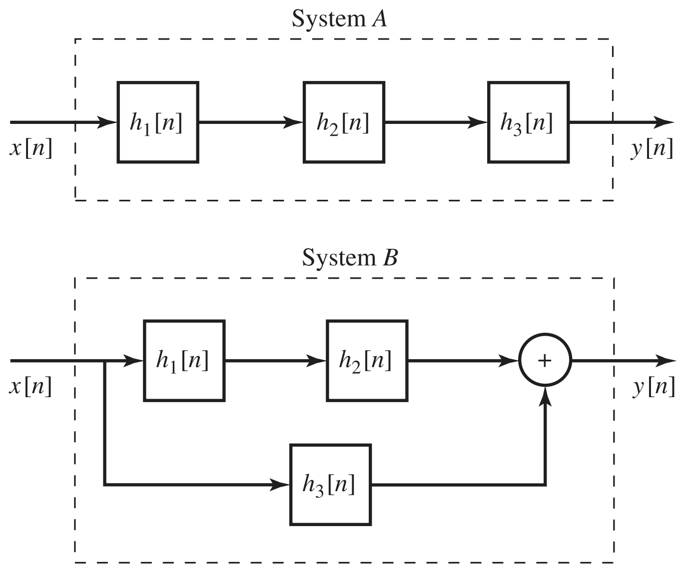
۲) هر یک از نمودارهای قطب-صفر شکل زیر، به‌همراه مشخصه‌ی ناحیه‌ی همگرایی، یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با تابع سیستم $H(z)$ را توصیف می‌کند. در هر مورد، تعیین کنید که کدام یک از جملات زیر درست هستند. پاسخ خود را با یک جمله‌ی کوتاه یا یک مثال نقض توجیه کنید.

(الف) سیستم دارای فاز صفر یا فاز خطی تعمیم‌یافته است.

(ب) سیستم دارای معکوس پایدار $H_i(z)$ است.

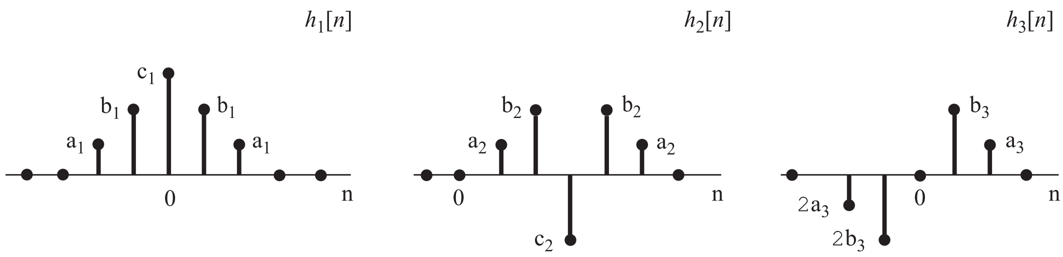


۳) در شکل زیر دو اتصال متفاوت از سه سیستم نشان داده شده است.



پاسخ‌های ضربه‌ی $h_1[n]$، $h_2[n]$ و $h_3[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. تعیین کنید که کدام یک از سیستم‌های A و/یا B

دارای فاز خطی تعمیم‌یافته هستند.



۴) کلاسی از فیلترهای FIR را در نظر بگیرید که برای آن‌ها $h[n]$ حقیقی است و $h[n]=0$ به‌ازای $n<0$ و $n>M$ و یکی از خصوصیات تقارن زیر برای آن برقرار است:

$$h[n]=h[M-n] \qquad \text{متقارن} \quad \text{Symmetric}$$
$$h[n]=-h[M-n] \qquad \text{پادمتقارن} \quad \text{Antisymmetric}$$

همه‌ی فیلترهای این کلاس دارای فاز تعمیم‌یافته‌ی خطی هستند، یعنی دارای پاسخ فرکانسی به فرم

$$H(e^{j\omega})=A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

می‌باشند که در آن $A(e^{j\omega})$ یک تابع حقیقی از ω، α یک ثابت حقیقی و β یک ثابت حقیقی است. برای جدول زیر، نشان دهید که $A(e^{j\omega})$ به فرم نشان داده‌شده است و مقادیر α و β را پیدا کنید.

Type	Symmetry	$(M+1)$	Form of $A(e^{j\omega})$	α	β
I	Symmetric	Odd	$\sum_{n=0}^{M/2} a[n]\cos\omega n$		
II	Symmetric	Even	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega(n-1/2)$		
III	Antisymmetric	Odd	$\sum_{n=1}^{M/2} c[n]\sin\omega n$		
IV	Antisymmetric	Even	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n]\sin\omega(n-1/2)$		

در زیر چند پیشنهاد مفید بیان می‌شود:

- برای فیلترهای نوع I ابتدا نشان دهید که $H(e^{j\omega})$ می‌تواند به‌فرم زیر نوشته شود:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n]e^{-j\omega(M-n)}+h[M/2]e^{-j\omega(M/2)}.$$

- تحلیل فیلترهای نوع III بسیار شبیه تحلیل برای نوع I است، به‌جز اینکه یک تغییر علامت و حذف یکی از جملات ابتدایی را داریم.
- برای فیلترهای نوع II ابتدا نشان دهید که $H(e^{j\omega})$ می‌تواند به‌فرم زیر نوشته شود:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[M-n]e^{-j\omega(M-n)},$$

و سپس فاکتور مشترک $e^{-j\omega(M/2)}$ را از هر دو مجموع بیرون بکشید.

- تحلیل فیلترهای نوع IV بسیار شبیه تحلیل برای نوع II است.

۵) این مسئله در مورد یک فیلتر گسسته-زمان با یک پاسخ ضربه‌ی حقیقی-مقدار $h[n]$ است. تعیین کنید که آیا جمله‌ی زیر درست یا نادرست است:

جمله: اگر تأخیر گروهی یک فیلتر برای $0 < \omega < \pi$ یک مقدار ثابت باشد، آنگاه پاسخ ضربه باید یکی از خاصیت‌های

$$h[n] = h[M - n]$$

یا

$$h[n] = -h[M - n]$$

را داشته باشد، که در آن M یک عدد صحیح است.

اگر باور دارید که این جمله درست است، استدلال خود را به صورت روشن بیان کنید. اگر باور دارید که این جمله نادرست است، یک مثال نقض ارائه بدهید.

۶) سه مورد زیر در مورد یک سیگنال $x[n]$ با تبدیل زد $X(z)$ معلوم است:

- $x[n]$ حقیقی-مقدار و می‌نیمم-فاز است،
- $x[n]$ بیرون بازه‌ی $0 \leq n \leq 4$ صفر است،
- $X(z)$ یک صفر در $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ و یک صفر در $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$ دارد.

بر اساس این اطلاعات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

(الف) آیا $X(z)$ گویا است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

(ب) نمودار قطب-صفر کامل را برای $X(z)$ رسم کنید و ROC آن را مشخص کنید.

(ج) اگر $y[n] * x[n] = \delta[n]$ و $y[n]$ دست راستی باشد، نمودار قطب-صفر را برای $Y(z)$ رسم کنید و ROC آن را مشخص کنید.

۷) فرض کنید $h_{\min}[n]$ یک دنباله‌ی می‌نیمم-فاز با تبدیل زد $H_{\min}(z)$ باشد. اگر $h[n]$ یک دنباله‌ی علّی می‌نیمم-فاز باشد که اندازه‌ی تبدیل فوریه‌ی آن مساوی با باشد، نشان دهید که

$$|h[0]| < |h_{\min}[0]|.$$

(راهنمایی: از قضیه‌ی مقدار اولیه و معادله‌ی $H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$ استفاده کنید.)

۸) یکی از خصوصیات جالب و مهم دنباله‌های می‌نیمم-فاز، خاصیت می‌نیمم تأخیر انرژی است؛ یعنی، از همه‌ی دنباله‌های علّی دارای تابع اندازه‌ی تبدیل فوریه‌ی یکسان $|H(e^{j\omega})|$، کمیت

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2$$

برای همه‌ی $n \geq 0$ ماکزیمم می‌شود، وقتی $h[n]$ دنباله‌ی می‌نیمم-فاز باشد. این نتیجه به‌صورت زیر ثابت می‌شود: فرض کنید $h_{\min}[n]$ یک دنباله‌ی می‌نیمم-فاز با تبدیل زد $H_{\min}(z)$ باشد. به‌علاوه، فرض کنید z_k یک صفر $H_{\min}(z)$ باشد به‌طوری که بتوانیم $H_{\min}(z)$ را به‌صورت

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}), \qquad |z_k| < 1,$$

بنویسیم که در آن $Q(z)$ نیز می‌نیمم-فاز است. حال دنباله‌ی دیگر $h[n]$ را با تبدیل زد $H(z)$ در نظر بگیرید به‌گونه‌ای که

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

و اینکه $H(z)$ به‌جای z_k یک صفر در $z = 1/z_k^*$ دارد.

(الف) $H(z)$ را بر حسب $Q(z)$ بیان کنید.

(ب) $h[n]$ و $h_{\min}[n]$ را بر حسب دنباله‌ی می‌نیمم-فاز $q[n]$ که دارای تبدیل زد $Q(z)$ است، بنویسید.

(ج) برای مقایسه‌ی توزیع انرژی دو دنباله، نشان دهید که

$$\epsilon = \sum_{m=۰}^{n} |h_{\min}[m]|^{۲} - \sum_{m=۰}^{n} |h[m]|^{۲} = (۱ - |z_k|^{۲})|q[n]|^{۲}.$$

(د) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت قبل نشان دهید که

$$\sum_{m=۰}^{n} |h[m]|^{۲} \leq \sum_{m=۰}^{n} |h_{\min}[m]|^{۲} \qquad \text{for all } n.$$

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2018 (۱۱ بهمن ۱۳۹۶)