



تکلیف شماره ۶

فصل پنجم

تحلیل تبدیل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

TRANSFORM ANALYSIS OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

۱) وقتی ورودی به یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n - 1]$$

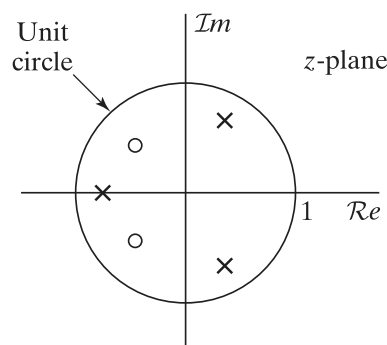
باشد، خروجی آن می‌شود

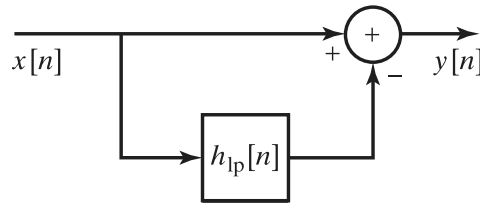
$$y[n] = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6 \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n].$$

(الف) تابع سیستم $H(z)$ را برای این سیستم بیابید. قطب‌ها و صفرهای $H(z)$ را رسم کنید و ناحیه‌ی همگرایی را مشخص کنید.(ب) پاسخ ضربه‌ی این سیستم $h[n]$ را برای همه‌ی مقادیر n بیابید.

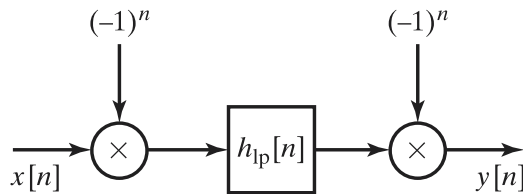
(ج) یک معادله‌ی تفاضلی (difference equation) بنویسید که این سیستم را مشخص‌سازی می‌کند.

(د) آیا این سیستم پایدار است؟ آیا این سیستم علی است؟

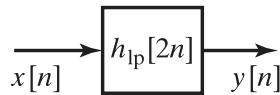
۲) اگر تابع سیستم $H(z)$ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان دارای یک نمودار قطب-صفر به صورت شکل زیر باشد، و بدانیم کهاین سیستم علی است، آیا سیستم معکوس $H_i(z)$ که در آن $H(z)H_i(z) = 1$ است، می‌تواند هم علی و هم پایدار باشد؟ پاسخ خود را به صورت واضح توجیه کنید.۳) فرض کنید $h_{lp}[n]$ به پاسخ ضربه‌ی یک فیلتر ایده‌آل پایین‌گذر با بهره‌ی باند گذر واحد و فرکانس قطع $\omega_c = \pi/4$ باشد. شکلزیر، ۵ سیستم را نشان می‌دهد که هر یک از آنها معادل با یک فیلتر فرکانس‌گزین ایده‌آل LTI است. برای هر سیستم نشان داده شده، پاسخ فرکانسی معادل را ترسیم کنید که به صراحت فرکانس‌های لبه‌ی باند را بر حسب فرکانس ω_c مشخص می‌کند. در هر حالت، مشخص کنید که سیستم چه نوعی از فیلترهای پایین‌گذر، بالاگذر، باند-گذر (bandpass)، باند-توقف (stopband) یا چندباندی (multiband) است.



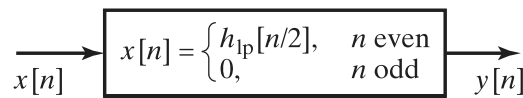
(a)



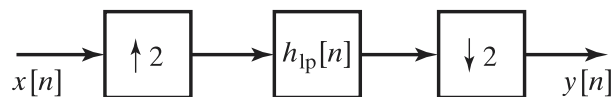
(b)



(c)



(d)



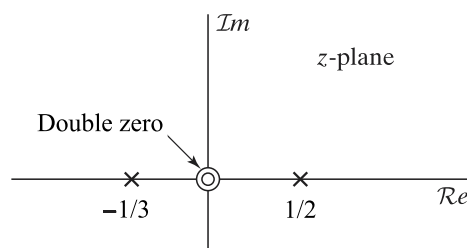
(e)

۴) جمله‌ی زیر، صحیح یا غلط است؟

جمله: برای یک سیستم غیرعلّی ممکن نیست که یک تأخیر گروهی ثابت مثبت داشته باشد، یعنی: $\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \tau_0 > 0$.

اگر این جمله صحیح است؛ برای توجیه آن یک بحث مختصر ارائه بدهید. اگر این جمله غلط است، یک مثال نقض پیدا کنید.

۵) تابع سیستم $H(z)$ برای یک سیستم علّی خطی تغییر ناپذیر با زمان دارای پیکربندی قطب-صفر نشان داده شده در شکل زیر است. همچنین می‌دانیم که $H(z) = 6$ وقتی که $z = 1$ باشد.



(الف) $H(z)$ را تعیین کنید.

(ب) پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ را برای این سیستم تعیین کنید.

(ج) پاسخ سیستم را برای سیگنال‌های ورودی زیر تعیین کنید:

$$(ج۱) \quad x[n] = u[n] - \frac{1}{4}u[n-1]$$

(ج۲) دنباله‌ی $x[n]$ حاصل از نمونه‌برداری سیگنال پیوسته-زمان

$$x(t) = 5^\circ + 1^\circ \cos 2^\circ \pi t + 3^\circ \cos 4^\circ \pi t$$

با فرکانس نمونه‌برداری $\Omega_s = 2\pi(4^\circ) \text{ rad/s}$.

۶) نشان دهید که مشتق فاز پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI، $H(e^{j\omega})$ نسبت به فرکانس برابر است با:

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\Re \left\{ \frac{-j \frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega}}{H(e^{j\omega})} \right\}.$$