



تکلیف شماره ۳

فصل سوم

تبدیل z

Z TRANSFORM

◇ مسئله‌های تحلیلی = تشریحی

(۱) در زمانی که ورودی یک سیستم LTI عبارت است از

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n - 1],$$

بوده است، خروجی متناظر عبارت از

$$y[n] = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n],$$

شده است.

(الف) تابع سیستم $H(z)$ این سیستم را بیابید. صفر(ها) و قطب(ها)ی $H(z)$ را رسم کنید و ناحیه‌ی همگرایی را نشان دهید.

(ب) پاسخ ضربه $h[n]$ این سیستم را بیابید.

(ج) یک معادله‌ی تفاضلی بنویسید که با ورودی و خروجی داده شده ارضا شود.

(د) آیا این سیستم پایدار است؟ آیا این سیستم علی است؟

(۲) یک سیستم LTI با تابع سیستم زیر مشخص می‌شود:

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

(الف) پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

(ب) معادله‌ی تفاضلی مرتبط‌کننده‌ی ورودی سیستم $x[n]$ و خروجی سیستم $y[n]$ را تعیین کنید.

(۳) تبدیل z معکوس موارد زیر را به دست آورید:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ a right-sided sequence (الف)}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}}, \quad |z| > (3)^{-1/3} \text{ (ب)}$$

(۴) اگر ورودی $x[n]$ به یک سیستم LTI برابر با $x[n] = u[n]$ باشد، خروجی می‌شود:

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n+1].$$

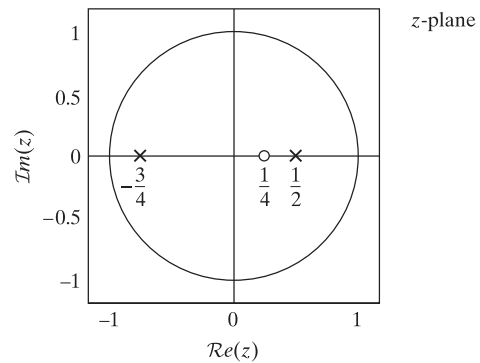
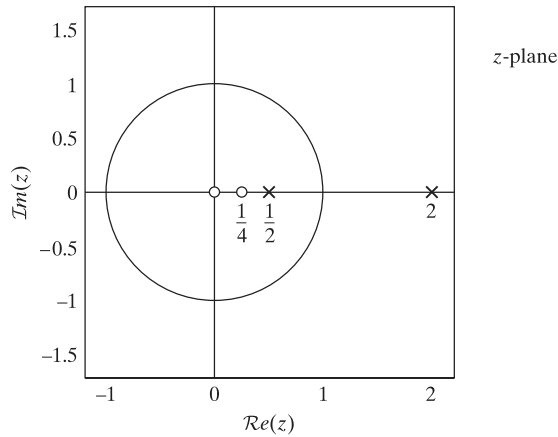
(الف) $H(z)$ ، تبدیل z پاسخ ضربه‌ی سیستم را بیابید و نمودار قطب-صفر آن را رسم کنید.

(ب) پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ را بیابید.

(ج) آیا این سیستم پایدار است؟

(د) آیا این سیستم علی است؟

۵) سیگنال $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ برای یک ورودی داده‌شده $x[n]$ است. در این مسئله، فرض می‌کنیم $y[n]$ پایدار و دارای تبدیل z برابر با $Y(z)$ با نمودار قطب-صفر نشان داده شده در شکل زیر (چپ) باشد و سیگنال $x[n]$ پایدار و دارای تبدیل z برابر با $X(z)$ با نمودار قطب-صفر نشان داده شده در شکل زیر (راست) باشد.



(الف) ناحیه‌ی همگرایی $Y(z)$ چیست؟

(ب) $y[n]$ سمت چپی، سمت راستی یا دوطرفه است؟

(ج) ناحیه‌ی همگرایی $X(z)$ چیست؟

(د) آیا $x[n]$ یک دنباله‌ی علی است؟ یعنی آیا $x[n] = 0$, for $n < 0$ برقرار است؟

(ه) $x[0]$ چیست؟

(و) نمودار قطب-صفر $H(z)$ را رسم کنید و ROC آن را مشخص کنید.

(ز) آیا $h[n]$ ضدعلی (anticausal) است؟ یعنی آیا $h[n] = 0$ for $n > 0$ برقرار است؟

۶) تابع خودهمبستگی غیرمتناوب برای یک دنباله‌ی حقیقی-مقدار پایدار $x[n]$ به صورت

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که تبدیل z برای $c_{xx}[n]$ عبارت است از

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1})$$

و ناحیه‌ی همگرایی برای $C_{xx}(z)$ را محاسبه کنید.