



تکلیف شماره ۲

فصل دوم

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

◇ مسئله‌های تحلیلی - تشریحی

۱) یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با رابطه‌ی ورودی-خروجی

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

تعریف می‌شود.

(الف) $h[n]$ پاسخ ضربه‌ی این سیستم، را تعیین کنید.

(ب) آیا این سیستم پایدار است؟

(ج) $H(e^{j\omega})$ پاسخ فرکانسی این سیستم، را تعیین کنید. از اتحادهای مثلثاتی برای یافتن یک عبارت ساده برای $H(e^{j\omega})$ استفاده کنید.

(د) اندازه و فاز پاسخ فرکانسی را رسم کنید.

(ه) حال یک سیستم جدید را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$ باشد. پاسخ ضربه‌ی این سیستم جدید، $h_1[n]$ ، را تعیین کنید.

۲) دنباله‌ی خودهمبستگی (autocorrelation) یک سیگنال $x[n]$ به صورت

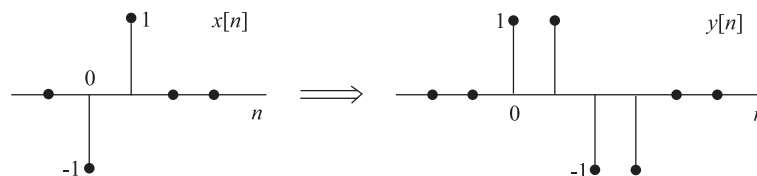
$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k]$$

تعریف می‌شود.

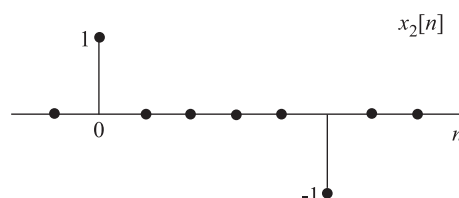
(الف) نشان دهید که برای یک انتخاب مناسب سیگنال $g[n]$ ، $R_x[n] = x[n] * g[n]$ ، و انتخاب مناسب برای $g[n]$ را مشخص کنید.

(ب) نشان دهید که تبدیل فوریه‌ی $R_x[n]$ مساوی است با $|X(e^{j\omega})|^2$.

۳) سیگنال‌های $x[n]$ و $y[n]$ که در شکل زیر نشان داده شده است، ورودی و خروجی متناظر با آن برای یک سیستم LTI است.

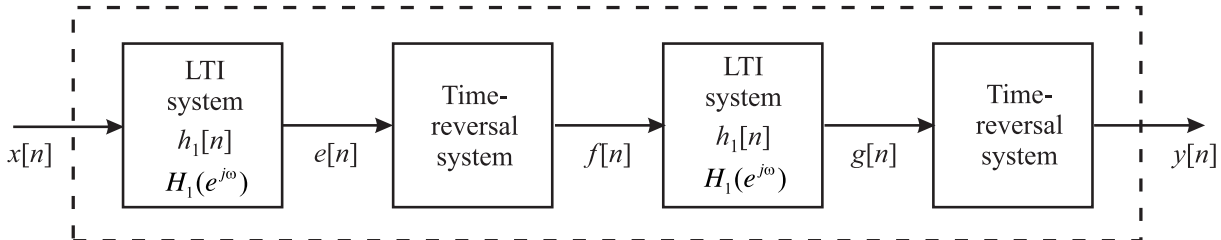


(الف) پاسخ سیستم به دنباله‌ی $x_2[n]$ که در شکل زیر نشان داده شده است، را بیابید.



۴) با توجه به تعریف علی بودن یک سیستم، نشان دهید که برای یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، علی بودن نتیجه می‌دهد که پاسخ ضربه $h[n]$ برای $n < 0$ صفر است. یک رویکرد می‌تواند این باشد که نشان دهیم اگر $h[n]$ برای $n < 0$ صفر نباشد، آنگاه سیستم نمی‌تواند علی باشد. همچنین نشان دهیم اگر $h[n]$ برای $n < 0$ صفر باشد، آنگاه سیستم لزوماً علی خواهد بود.

۵) اتصال آبشاری (cascade) سیستم‌های گسسته-زمان در شکل زیر را در نظر بگیرید. سیستم‌های وارون‌گر زمان (time-reversal) با معادلات $f[n] = e[-n]$ و $y[n] = g[-n]$ تعریف می‌شود. فرض کنید که در سرتاسر مسئله $x[n]$ و $h_1[n]$ دنباله‌های حقیقی هستند.



الف) $E(e^{j\omega}), F(e^{j\omega}), G(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$ را بر حسب $X(e^{j\omega}), H_1(e^{j\omega})$ بیان کنید.

ب) نتیجه‌ی قسمت قبل باید شما را متقاعد کرده باشد که کل سیستم LTI است. پاسخ فرکانسی کل سیستم $H(e^{j\omega})$ را بیابید.

ج) عبارتی برای پاسخ ضربه‌ی کل سیستم $h[n]$ بر حسب $h_1[n]$ بیابید.

۶) * (اختیاری) فرض کنید $e[n]$ یک دنباله‌ی نویز سفید و $s[n]$ یک دنباله‌ی ناهمبسته با $e[n]$ باشد. نشان دهید که دنباله‌ی

$$y[n] = s[n]e[n]$$

سفید است، یعنی

$$E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m]$$

که در آن A یک مقدار ثابت است.