بسم الله الرحمن الرحیم

# طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

## مبحث سیزدهم

مطالعه‌ی موضوعی الگوریتم‌ها

# هندسه‌ی محاسباتی

## Computational Geometry


کاظم فولادی قلعه

دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی

دانشگاه تهران

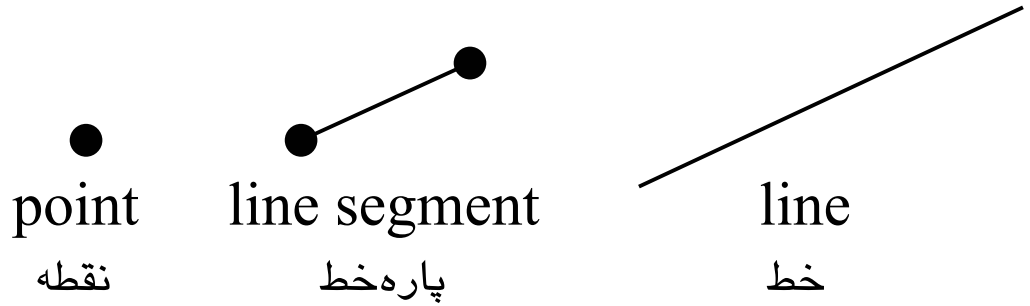

http://courses.fouladi.ir/algorithm

# هندسه‌ی محاسباتی

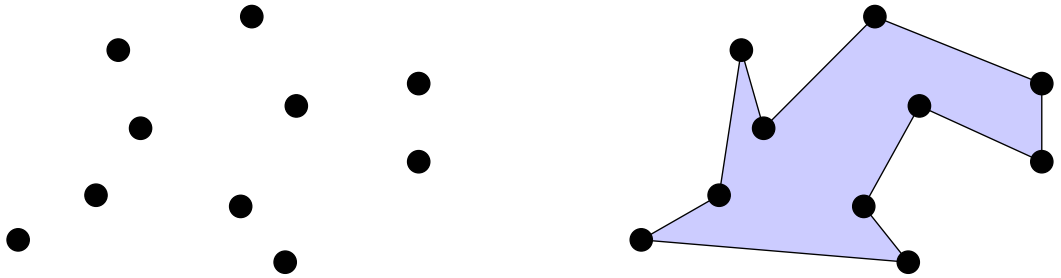
## COMPUTATIONAL GEOMETRY

الگوریتم‌هایی برای حل «مسائل هندسی» در دو بعد و بالاتر

**اشیای مبنا**
*Fundamental Objects*




**ساختارهای پایه**
*Basic Structures*

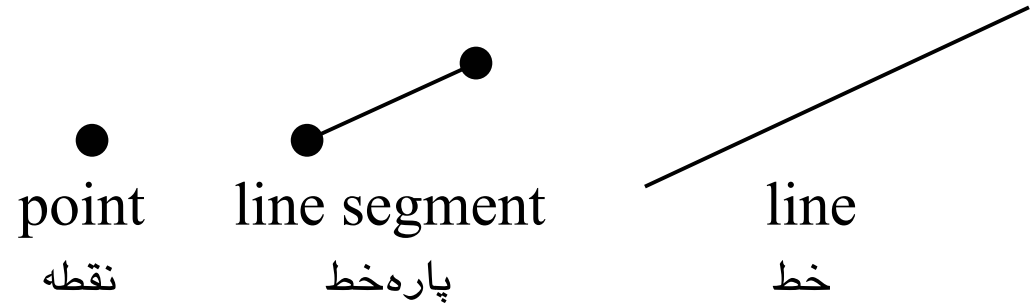


# هندسه‌ی محاسباتی

COMPUTATIONAL GEOMETRY

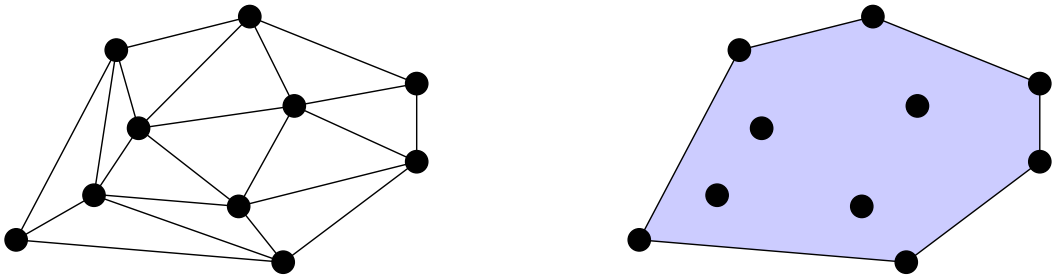
الگوریتم‌هایی برای حل «مسائل هندسی» در دو بعد و بالاتر

**اشیای مبنا**
*Fundamental Objects*




**ساختارهای پایه**
*Basic Structures*

**مسائل معروف**
*Well-known Problems*



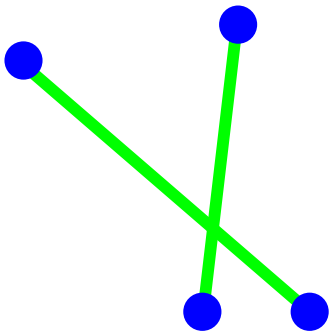
# هندسه‌ی محاسباتی

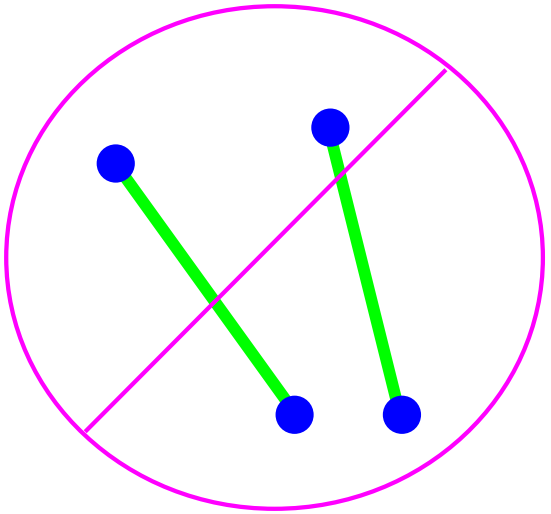
مسئله‌ی نمونه (۱)

COMPUTATIONAL GEOMETRY

## تقاطع دو پاره‌خط
*Segment Intersection*

دو پاره‌خط داده شده است: آیا با هم تقاطع دارند؟





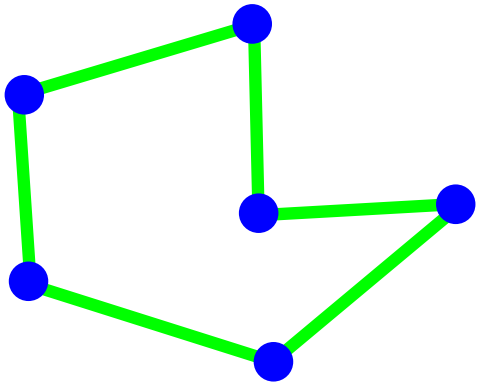
# هندسه‌ی محاسباتی

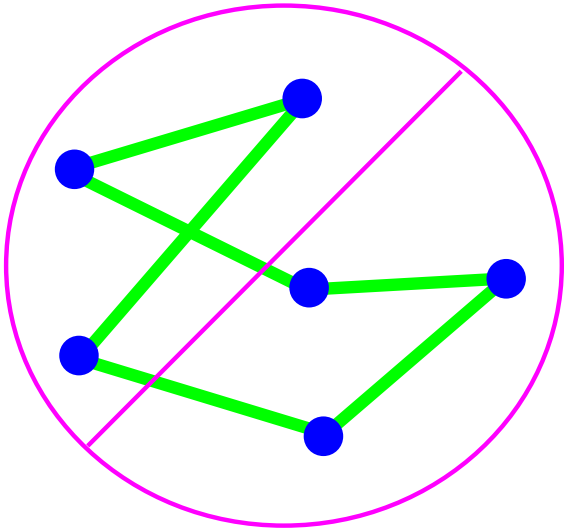
مسئله‌ی نمونه (۲)

COMPUTATIONAL GEOMETRY

## مسیر بسته‌ی ساده
*Simple Closed Path*

یک مجموعه از نقاط داده شده است: یک چندضلعی غیرمتقاطع که رئوس آن همین نقاط باشند، بیابید.





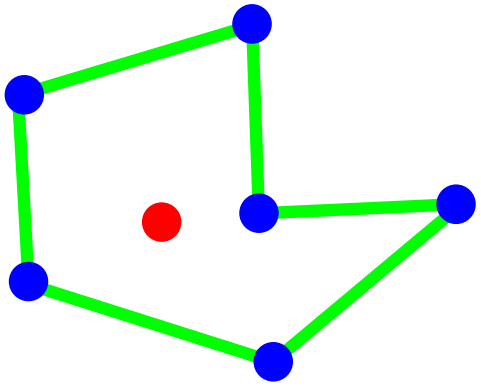
# هندسه‌ی محاسباتی

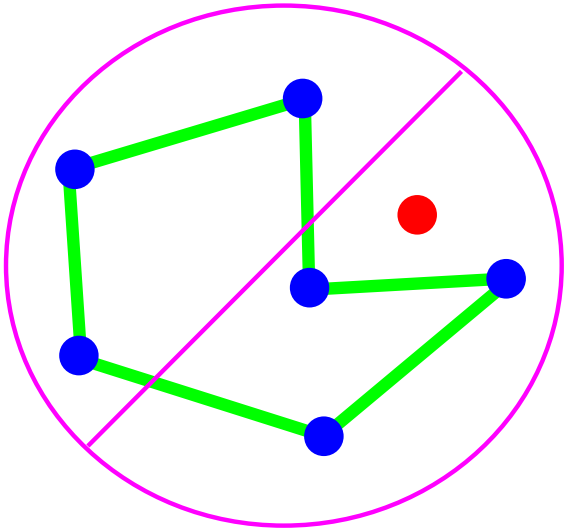
مسئله‌ی نمونه (۳)

COMPUTATIONAL GEOMETRY

## شمول در چندضلعی
*Inclusion in Polygon*

آیا یک نقطه‌ی داده شده داخل چندضلعی است یا خارج آن؟





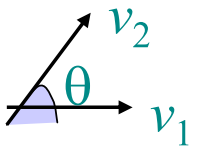
# هندسه‌ی محاسباتی

عملیات ابتدائی: ضرب خارجی

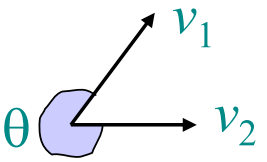
## PRIMITIVE OPERATIONS: CROSSPRODUCT

Given two vectors $v_1 = (x_1, y_1)$ and $v_2 = (x_2, y_2)$,
is their counterclockwise angle $\theta$

- ***convex*** ($< 180^o$),
- ***reflex*** ($> 180^o$), or
- borderline ($0$ or $180^o$)?



convex



reflex

***Crossproduct*** $v_1 \times v_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$
$= |v_1|\,|v_2| \sin\theta$ .

Thus, $\text{sign}(v_1 \times v_2) = \text{sign}(\sin\theta)$ $> 0$ if $\theta$ convex,
$< 0$ if $\theta$ reflex,
$= 0$ if $\theta$ borderline.

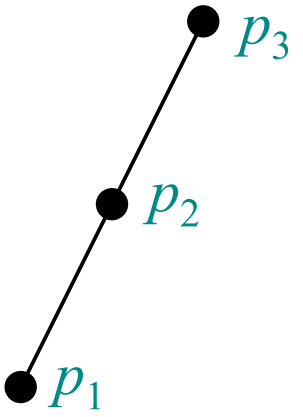
# هندسه‌ی محاسباتی

عملیات ابتدائی: آزمون جهت

## PRIMITIVE OPERATIONS: ORIENTATION TEST

Given three points $p_1, p_2, p_3$ are they

- in ***clockwise (cw) order***,
- in ***counterclockwise (ccw) order***, or
- ***collinear***?



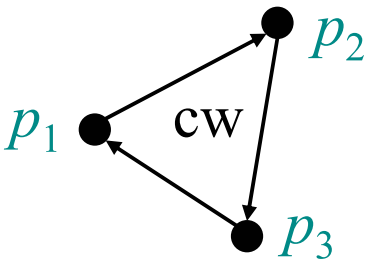
collinear

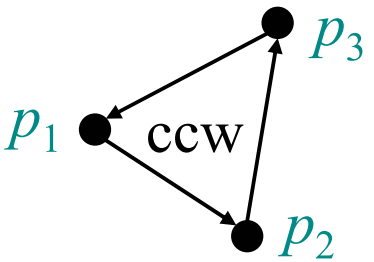
$(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)$

$> 0$ if ccw

$< 0$ if cw

$= 0$ if collinear



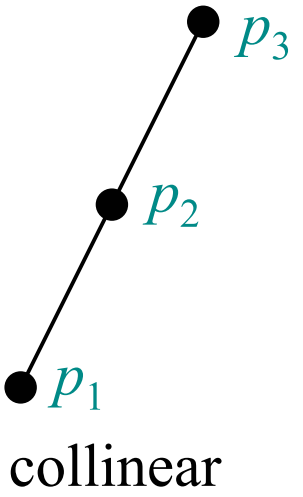
# هندسه‌ی محاسباتی

عملیات ابتدائی: آزمون سمت

## PRIMITIVE OPERATIONS: SIDEDNESS TEST

Given three points $p_1, p_2, p_3$ are they

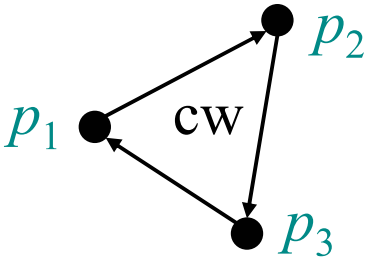
- in ***clockwise (cw) order***,
- in ***counterclockwise (ccw) order***, or
- ***collinear***?

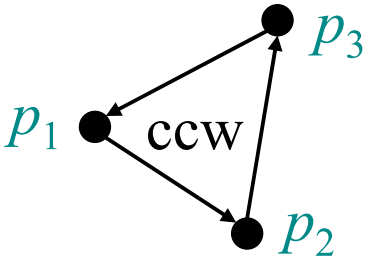


collinear

Let $L$ be the oriented line from $p_1$ to $p_2$.
Equivalently, is the point $p_3$

- ***right*** of $L$,
- ***left*** of $L$, or
- ***on*** $L$?



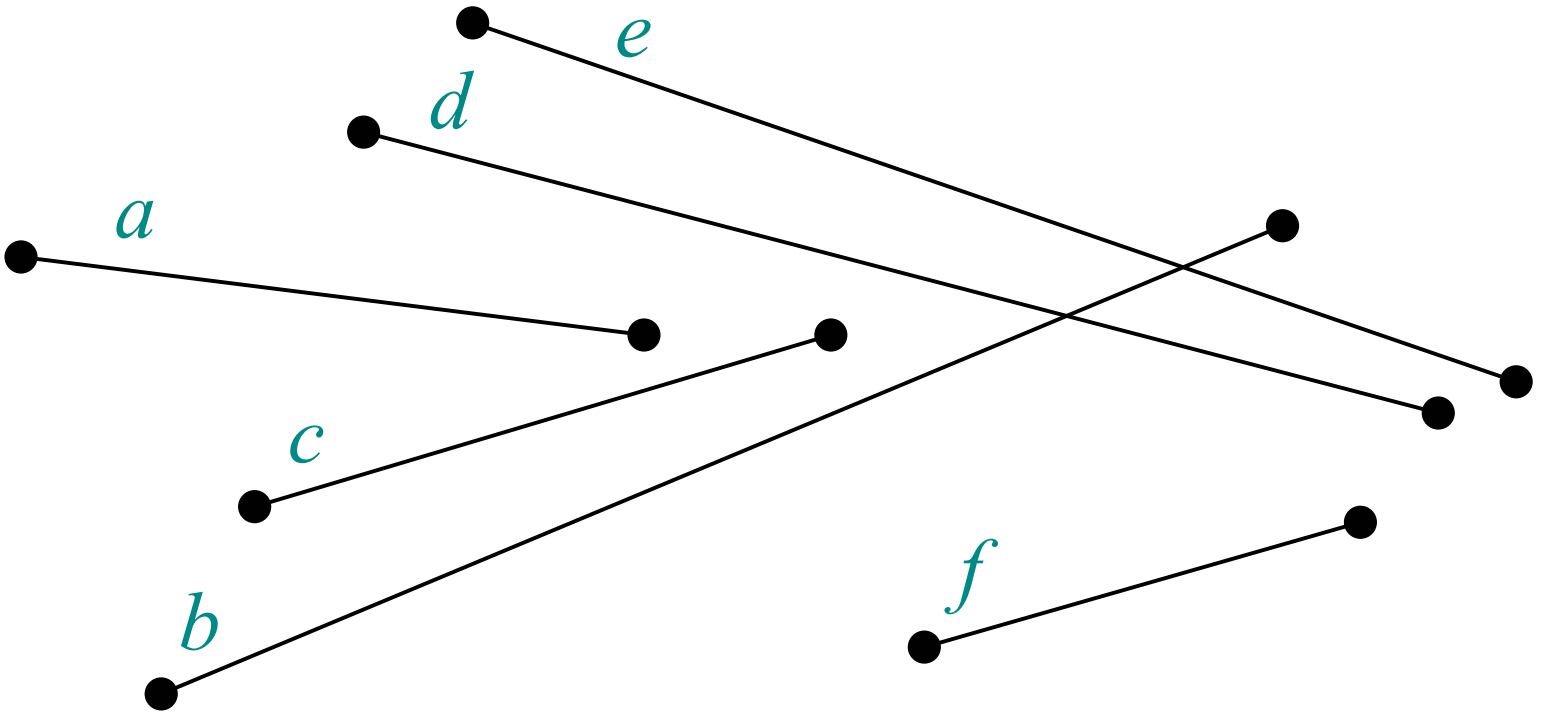
# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها

LINE-SEGMENT INTERSECTION

### تقاطع پاره‌خط‌ها
*Line-Segment Intersection*

$n$ پاره‌خط داده شده است. آیا هیچ دو پاره‌خطی وجود دارند که یکدیگر را قطع کنند؟

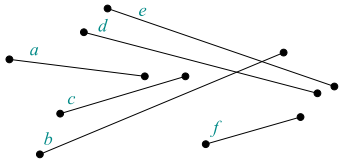



الگوریتم ناشیانه از مرتبه‌ی $O(n^2)$ است.

# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها: الگوریتم خط روبش

LINE-SEGMENT INTERSECTION




### تقاطع پاره‌خط‌ها
*Line-Segment Intersection*

$n$ پاره‌خط داده شده است. آیا هیچ دو پاره‌خطی وجود دارند که یکدیگر را قطع کنند؟

### الگوریتم خط روبش
*Sweep-Line Algorithm*

**۱) یافتن نقاط رویداد**

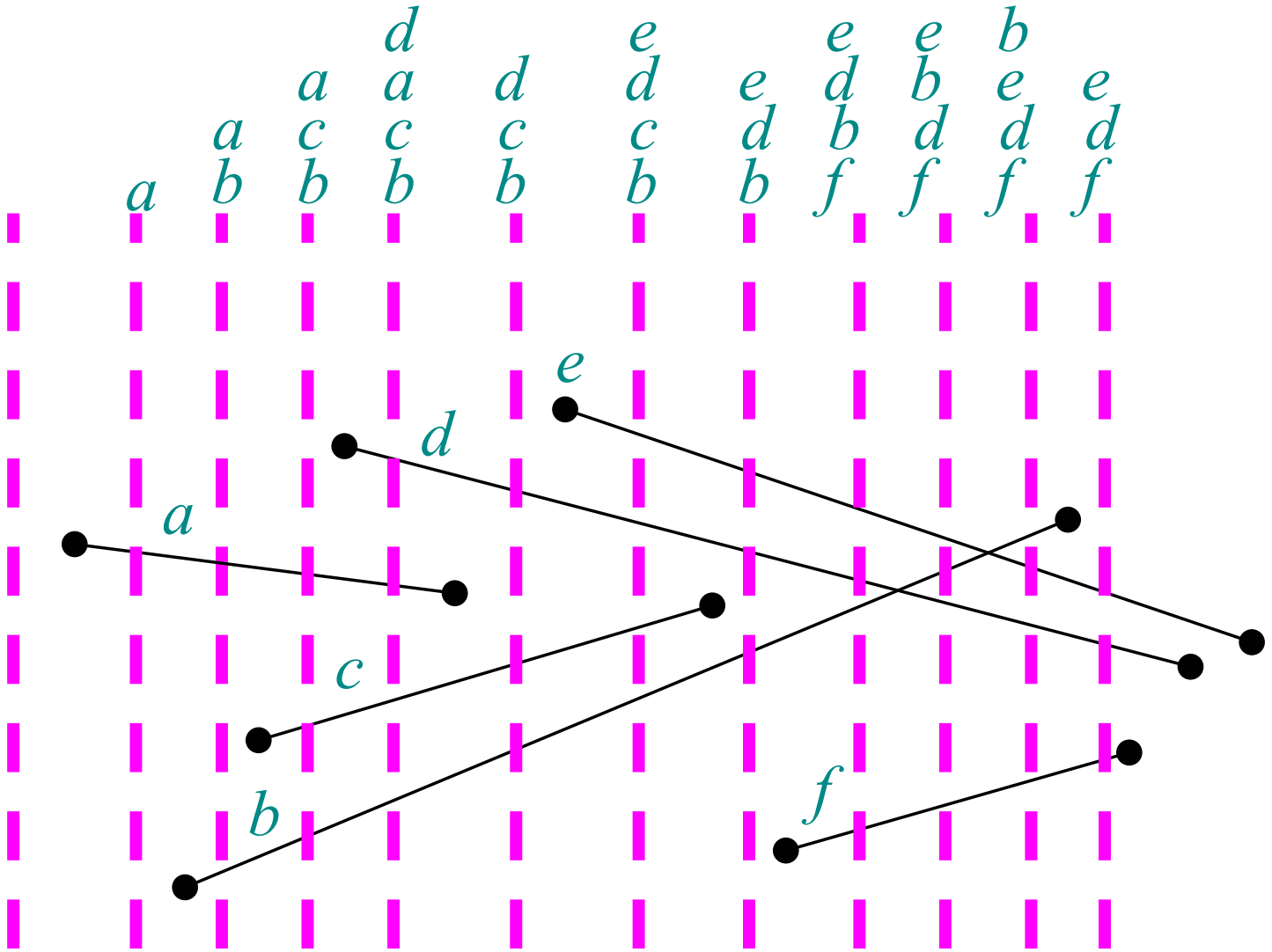
- یک خط عمودی را از سمت چپ به راست حرکت دهید (روبش)
  (به لحاظ مفهومی، مختصات محور $x$ را با زمان جایگزین می‌کنیم.)
- یک مجموعه‌ی پویا $S$ از پاره‌خط‌هایی که با خط روبش تقاطع می‌کنند ایجاد می‌کنیم
  و عناصر را به ترتیب با مختصات $y$ محل تقاطع مرتب می‌کنیم.
- ترتیب‌ها تغییر می‌کنند هرگاه:
  - به یک پاره‌خط جدید برخورد کنیم، یا
  - پاره‌خط موجود تمام شود، یا
  - دو پاره‌خط تقاطع کنند.

  **نقاط انتهایی پاره‌خط**
  *Segment Endpoints*
- بنابراین، **نقاط رویداد** کلیدی، نقاط انتهایی پاره‌خط هستند.

# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها: الگوریتم خط روبش: مثال

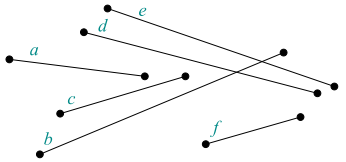
LINE-SEGMENT INTERSECTION



# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها: الگوریتم خط روبش

LINE-SEGMENT INTERSECTION




### تقاطع پاره‌خط‌ها
*Line-Segment Intersection*

$n$ پاره‌خط داده شده است. آیا هیچ دو پاره‌خطی وجود دارند که یکدیگر را قطع کنند؟

### الگوریتم خط روبش
*Sweep-Line Algorithm*

۲) یافتن **نقاط تقاطع**

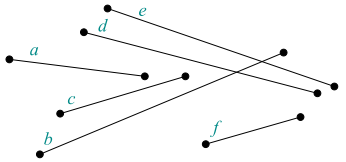
نقاط رویداد را به‌ترتیب با مرتب‌سازی نقاط انتهایی پاره‌خط بر اساس مختصات $x$ و حلقه‌ی زیر پردازش می‌کنیم:

- برای یک نقطه‌ی انتهایی چپ پاره‌خط $s$:
  - پاره‌خط $s$ را به مجموعه‌ی پویای $S$ اضافه می‌کنیم.
  - تقاطع میان $s$ و همسایه‌های آن در $S$ را بررسی می‌کنیم.
- برای یک نقطه‌ی انتهایی راست پاره‌خط $s$:
  - پاره‌خط $s$ را از مجموعه‌ی پویای $S$ حذف می‌کنیم.
  - تقاطع میان $s$ و همسایه‌های آن در $S$ را بررسی می‌کنیم.

# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها: الگوریتم خط روبش: تحلیل زمان اجرا

LINE-SEGMENT INTERSECTION




**تقاطع پاره‌خط‌ها**
*Line-Segment Intersection*

$n$ پاره‌خط داده شده است. آیا هیچ دو پاره‌خطی وجود دارند که یکدیگر را قطع کنند؟

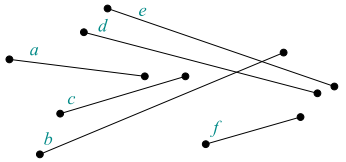
با استفاده از **درخت قرمز–سیاه** برای ذخیره‌سازی مجموعه‌ی پویای $S$:

کل زمان اجرا: $O(n \log n)$

# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی تقاطع پاره‌خط‌ها: الگوریتم خط روبش: اثبات درستی الگوریتم خط روبش

LINE-SEGMENT INTERSECTION




**تقاطع پاره‌خط‌ها**
*Line-Segment Intersection*

$n$ پاره‌خط داده شده است. آیا هیچ دو پاره‌خطی وجود دارند که یکدیگر را قطع کنند؟

**قضیه** اگر تقاطعی وجود داشته باشد، الگوریتم خط روبش، آن را می‌یابد.

*Proof:* Let $X$ be the leftmost intersection point.
Assume for simplicity that

- only two segments $s_1$, $s_2$ pass through $X$, and
- no two points have the same $x$-coordinate.

At some point before we reach $X$,
$s_1$ and $s_2$ become consecutive in the order of $S$.
Either initially consecutive when $s_1$ or $s_2$ inserted,
or became consecutive when another deleted. □

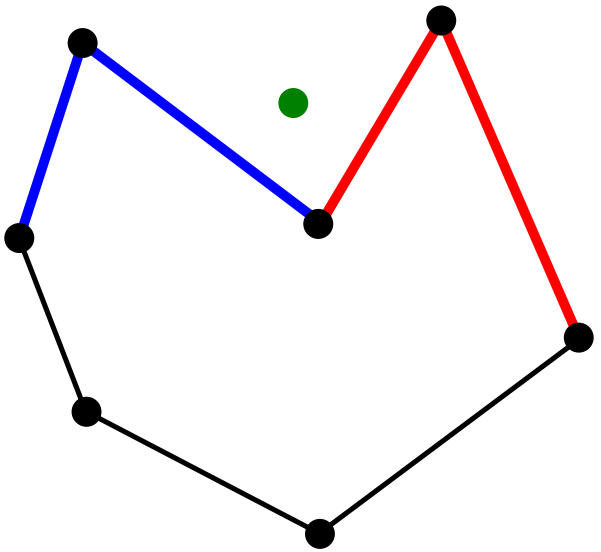
# هندسه‌ی محاسباتی

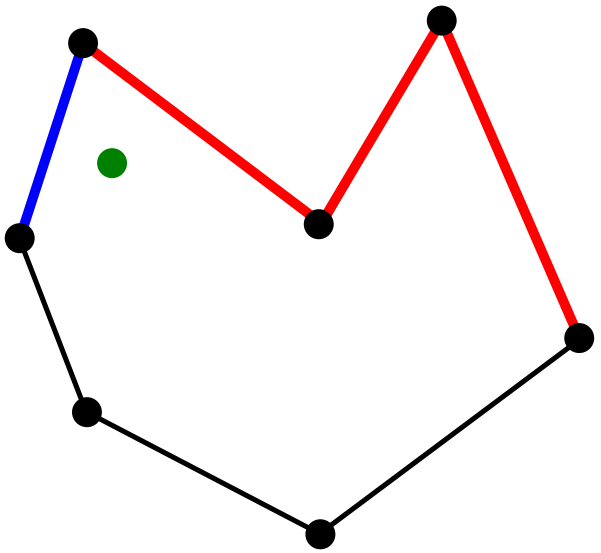
## مسئله‌ی شمول نقطه

## POINT INCLUSION

**شمول نقطه**
*Point Inclusion*

یک چندضلعی و یک نقطه داده شده است. آیا این نقطه داخل چندضلعی است یا خارج آن؟





مفهوم «جهت» می‌تواند به حل این مسئله در زمان خطی کمک کند.

# هندسه‌ی محاسباتی

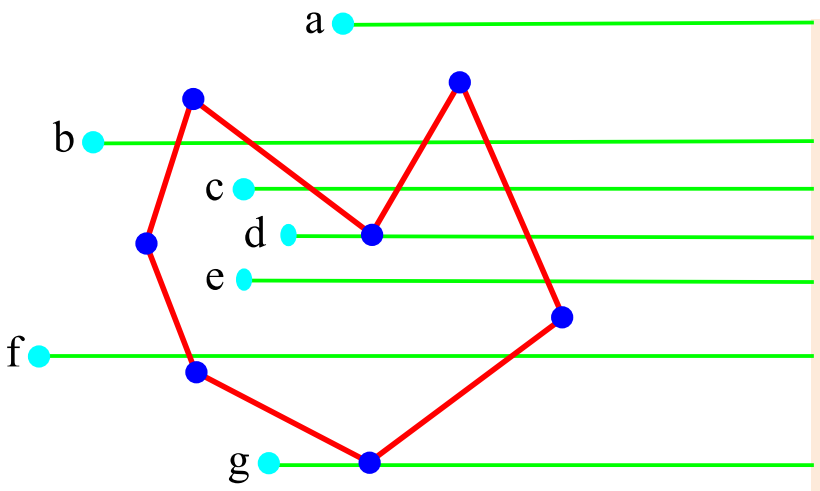
مسئله‌ی شمول نقطه

## POINT INCLUSION

**شمول نقطه**
*Point Inclusion*

یک چندضلعی و یک نقطه داده شده است. آیا این نقطه داخل چندضلعی است یا خارج آن؟

**الگوریتم شمارش**
*Counting Algorithm*




حالت‌های تکین: تقاطع با رئوس چندضلعی (مثل d و g)
راه حل؟: دو بار شمردن تقاطع با رئوس چندضلعی؟؟

- یک خط افقی از هر نقطه به سمت راست آن می‌کشیم و آن را تا بی‌نهایت امتداد می‌دهیم.
- تعداد دفعاتی که خط، چندضلعی را قطع می‌کند، می‌شماریم:
  - اگر **زوج** بود ⇐ نقطه **خارج** چندضلعی است.
  - اگر **فرد** بود ⇐ نقطه **داخل** چندضلعی است.

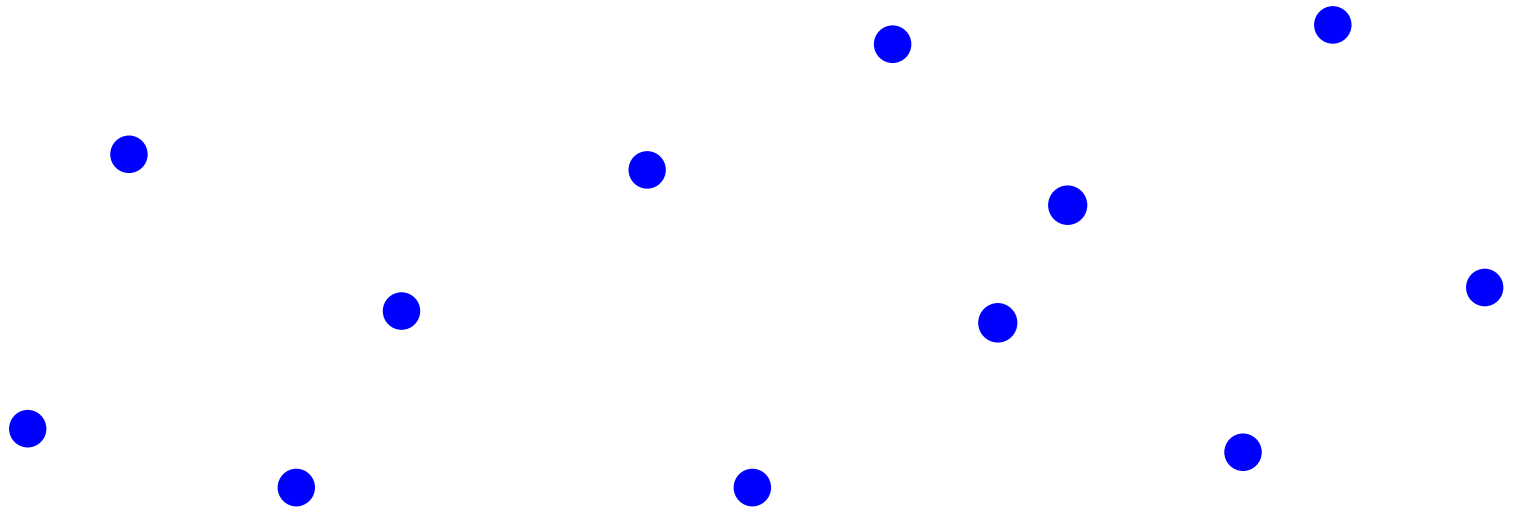
# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط

CLOSEST PAIR OF POINTS

### نزدیک‌ترین جفت نقاط
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

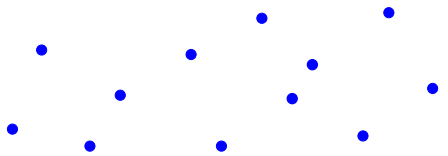


الگوریتم ناشیانه از مرتبه‌ی $O(n^2)$ است.

# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط

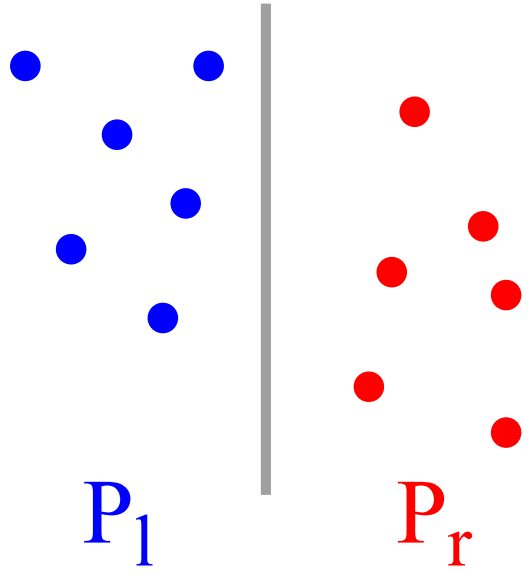
CLOSEST PAIR OF POINTS



**نزدیک‌ترین جفت نقاط**
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

**الگوریتم تقسیم و غلبه**
*Divide & Conquer Algorithm*



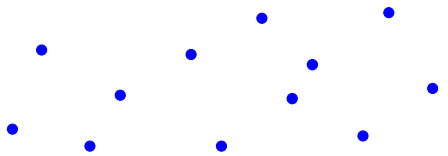

- **مرحله ۱)** نقاط را برحسب مختصات $x$ آنها مرتب می‌کنیم و بر این اساس آنها را به دو نیمه تقسیم می‌کنیم.
- **مرحله ۲)** نزدیک‌ترین دو نقطه یکی از سه حالت زیر را دارند:
  - هر دو در نیمه‌ی اول هستند.
  - هر دو در نیمه‌ی دوم هستند.
  - یکی در نیمه‌ی اول و دیگری در نیمه‌ی دوم قرار دارد.

  که می‌نیمم آنها پاسخ مسئله است.

# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط

CLOSEST PAIR OF POINTS

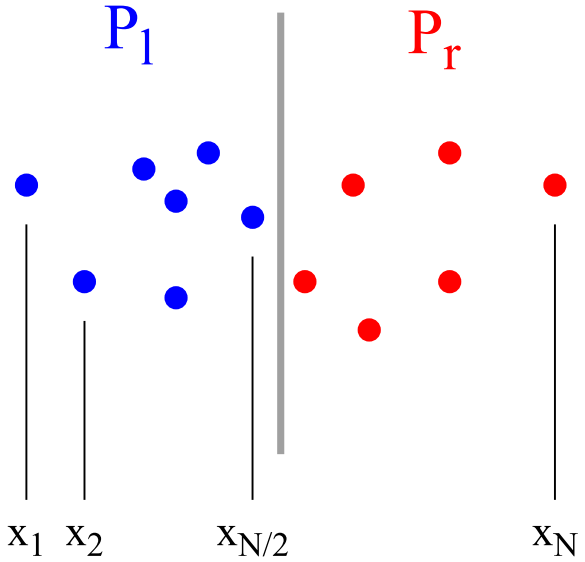


**نزدیک‌ترین جفت نقاط**
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

$p_1\ p_2 \cdots p_{N/2} \cdots p_{N/2+1} \cdots p_N$

**الگوریتم تقسیم و غلبه**
*Divide & Conquer Algorithm*

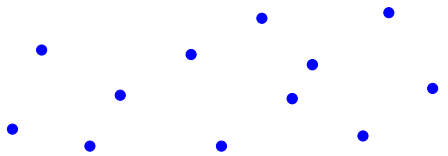



- **مرحله ۱)** نقاط را برحسب مختصات $x$ آنها مرتب می‌کنیم و بر این اساس آنها را به دو نیمه تقسیم می‌کنیم.

# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط

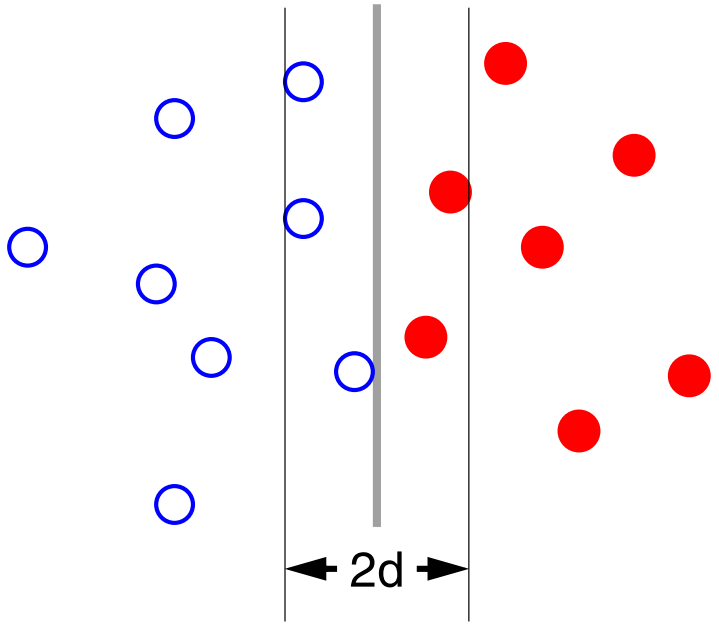
CLOSEST PAIR OF POINTS



### نزدیک‌ترین جفت نقاط
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

### الگوریتم تقسیم و غلبه
*Divide & Conquer Algorithm*




- **مرحله ۲)** نزدیک‌ترین جفت نقاط را به‌صورت بازگشتی محاسبه می‌کنیم و می‌نیمم فاصله‌های $d_l$ و $d_r$ را در

$$P_l = \{p_1, p_2, \dots, p_{n/2}\}$$
$$P_r = \{p_{n/2+1}, \dots, p_n\}$$

می‌یابیم.

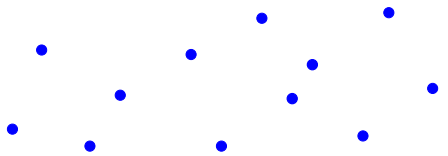
سپس، نزدیک‌ترین جفت و نزدیک‌ترین فاصله در نوار مرکزی به عرض $2d$ را می‌یابیم که در آن $d = \min(d_l, d_r)$

زیرا بدیهی است که جفت‌های زیر نمی‌توانند نزدیک‌تر از $d$ باشند:

# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط

CLOSEST PAIR OF POINTS



**نزدیک‌ترین جفت نقاط**
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

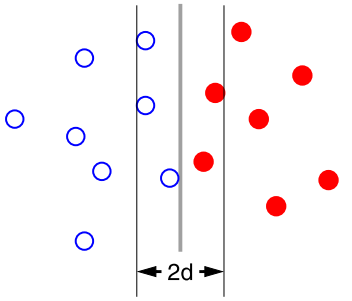
**الگوریتم تقسیم و غلبه**
*Divide & Conquer Algorithm*

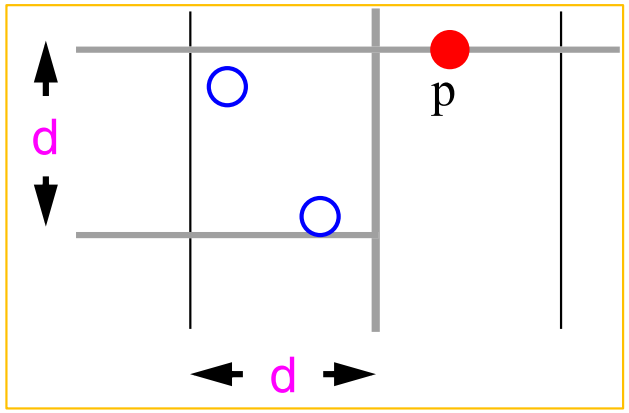
- **مرحله ۲) زیرمسئله:**

برای هر نقطه‌ی $p$ در این نوار، فاصله‌های $d(p,q)$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $p$ و $q$ دارای رنگ‌های متفاوت هستند و

$$y(p) - d \le y(q) \le y(p)$$

بنابراین، بیش از چهار مقایسه برای هر نقطه لازم نیست!

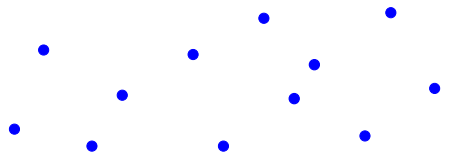


# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت نقاط : تحلیل زمان اجرای الگوریتم تقسیم و غلبه

CLOSEST PAIR OF POINTS



## نزدیک‌ترین جفت نقاط
*Closest Pair of Points*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
دو نقطه‌ی $p$ و $q$ متعلق به $P$ را بیابید که فاصله‌ی $d(p,q)$ آنها می‌نیمم باشد.

## الگوریتم تقسیم و غلبه
*Divide & Conquer Algorithm*

با توجه به مرتب‌سازی $n$ نقطه بر حسب مختصات $y$ برای هر مرتبه:

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n) + \Theta(1) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log^2 n)$$

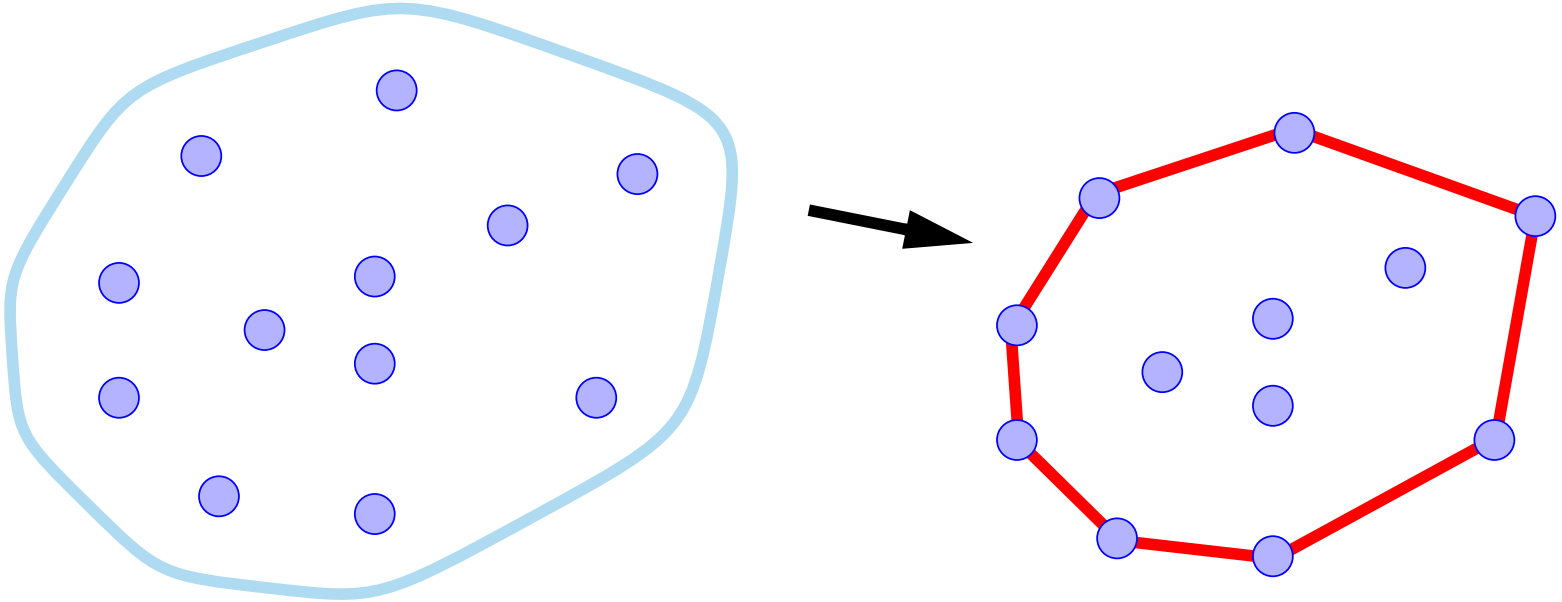
# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی پوش محدب

## CONVEX HULL

**پوش محدب**
*Convex Hull*

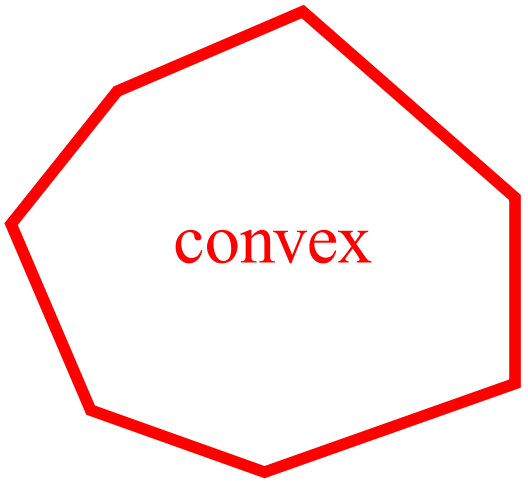
یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
پوش محدب، کوچک‌ترین چندضلعی محدب است که حاوی همه‌ی نقاط $P$ می‌باشد.

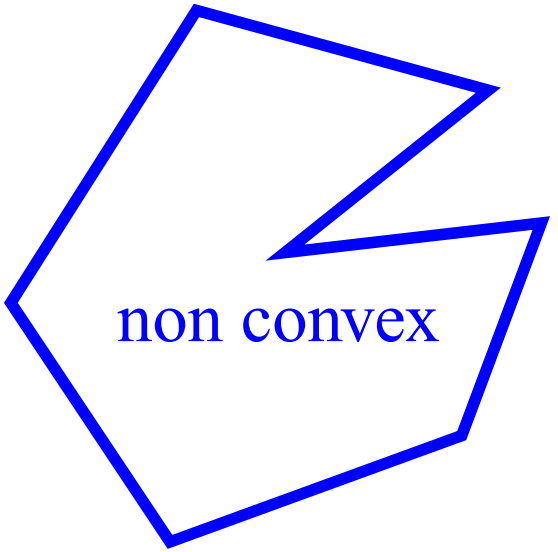


# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی پوش محدب : چندضلعی محدب

## CONVEX HULL

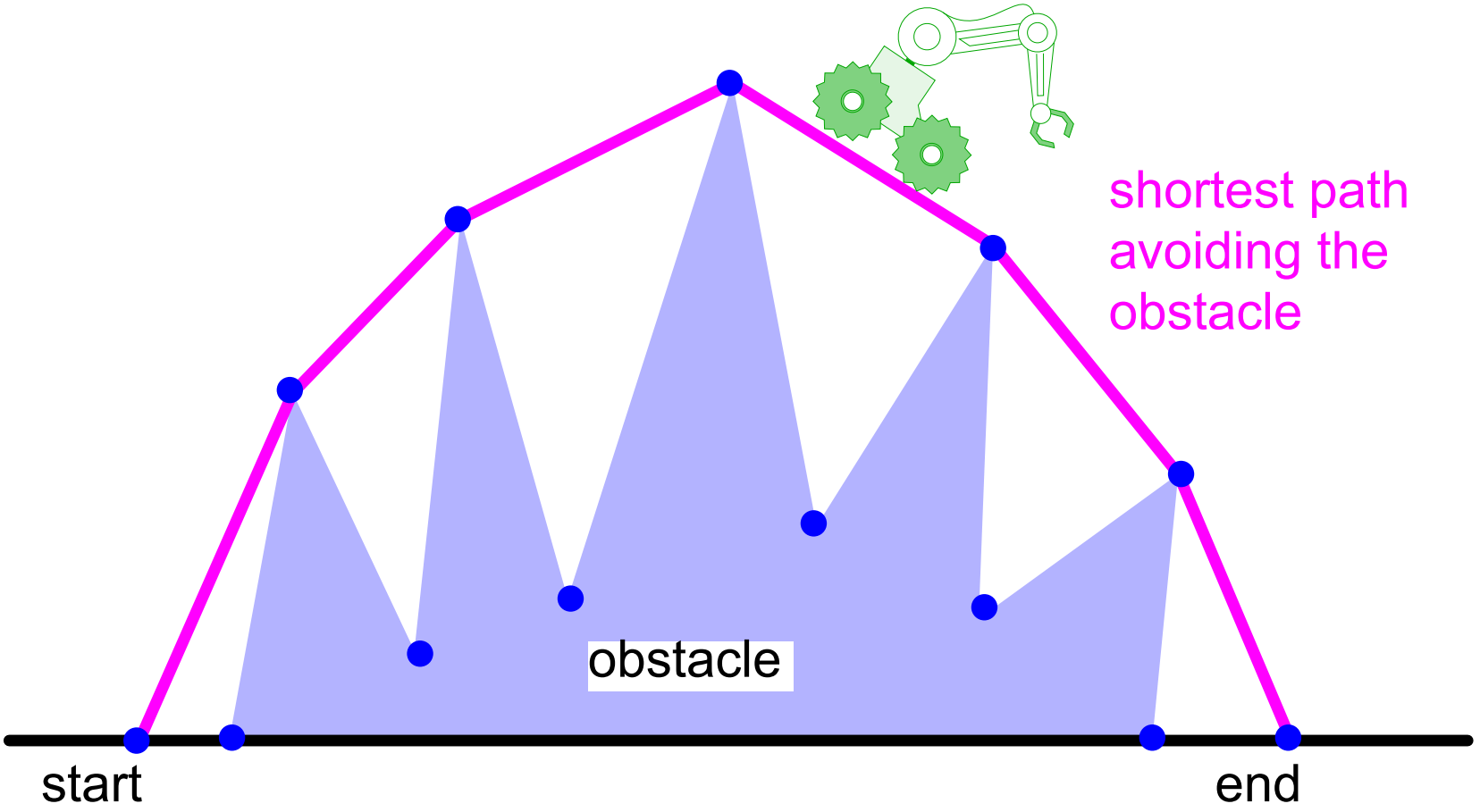


# هندسه‌ی محاسباتی

مسئله‌ی پوش محدب: کاربرد

## CONVEX HULL




کوتاه‌ترین مسیر برای حرکت روبات به‌منظور اجتناب از موانع

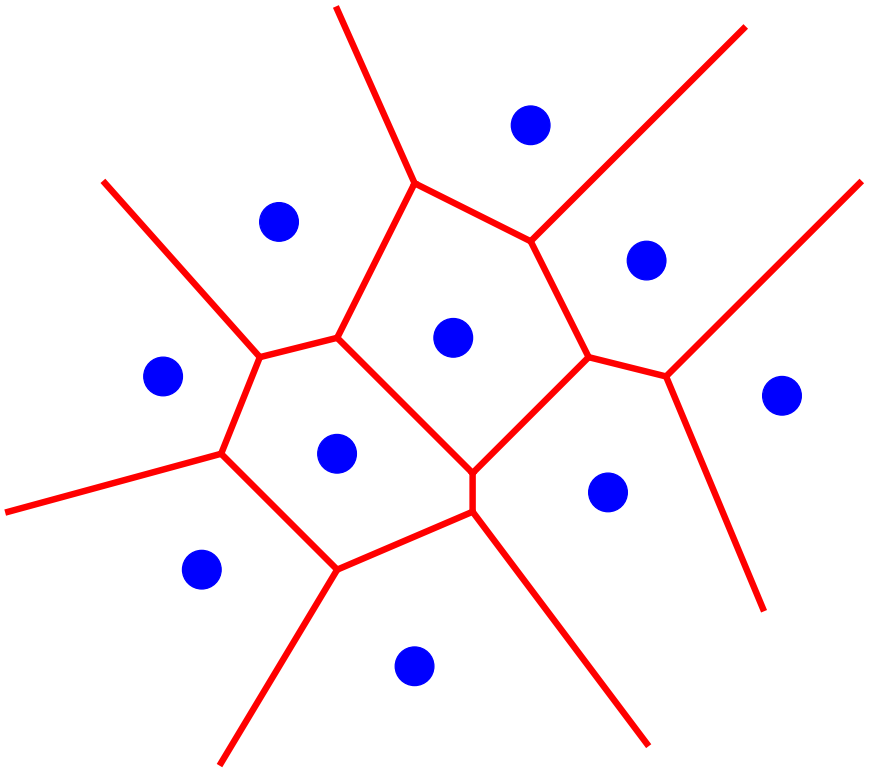
# هندسه‌ی محاسباتی

## مسئله‌ی نمودار ورونوی

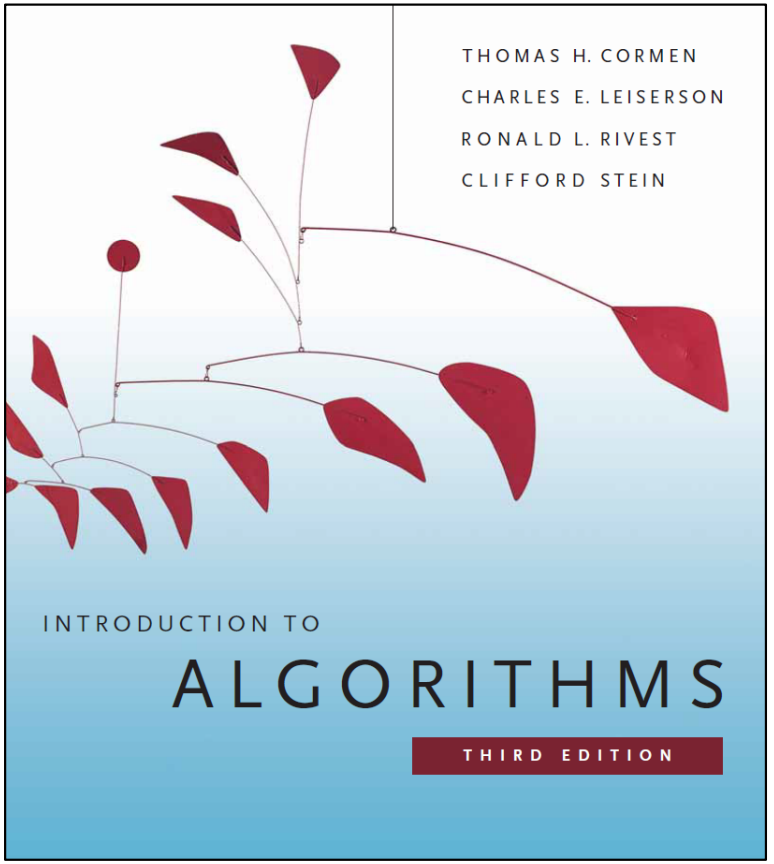
VORONOI DIAGRAM

**نمودار ورونوی**
*Voronoi Diagram*

یک مجموعه‌ی $P$ از $n$ نقطه داده شده است.
نواحی دارای فاصله‌ی نزدیک‌تر با هر یک از نقطه‌های داده‌شده را بیابید.



# مرجع




T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein,
**Introduction to Algorithms**,
3rd Edition, MIT Press, 2009.

**Chapter 33**

## 33 Computational Geometry

Computational geometry is the branch of computer science that studies algorithms for solving geometric problems. In modern engineering and mathematics, computational geometry has applications in such diverse fields as computer graphics, robotics, VLSI design, computer-aided design, molecular modeling, metallurgy, manufacturing, textile layout, forestry, and statistics. The input to a computational-geometry problem is typically a description of a set of geometric objects, such as a set of points, a set of line segments, or the vertices of a polygon in counterclockwise order. The output is often a response to a query about the objects, such as whether any of the lines intersect, or perhaps a new geometric object, such as the convex hull (smallest enclosing convex polygon) of the set of points.

In this chapter, we look at a few computational-geometry algorithms in two dimensions, that is, in the plane. We represent each input object by a set of points $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, where each $p_i = (x_i, y_i)$ and $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. For example, we represent an $n$-vertex polygon $P$ by a sequence $\langle p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \rangle$ of its vertices in order of their appearance on the boundary of $P$. Computational geometry can also apply to three dimensions, and even higher-dimensional spaces, but such problems and their solutions can be very difficult to visualize. Even in two dimensions, however, we can see a good sample of computational-geometry techniques.

Section 33.1 shows how to answer basic questions about line segments efficiently and accurately: whether one segment is clockwise or counterclockwise from another that shares an endpoint, which way we turn when traversing two adjoining line segments, and whether two line segments intersect. Section 33.2 presents a technique called "sweeping" that we use to develop an $O(n \lg n)$-time algorithm for determining whether a set of $n$ line segments contains any intersections. Section 33.3 gives two "rotational-sweep" algorithms that compute the convex hull (smallest enclosing convex polygon) of a set of $n$ points: Graham's scan, which runs in time $O(n \lg n)$, and Jarvis's march, which takes $O(nh)$ time, where $h$ is the number of vertices of the convex hull. Finally, Section 33.4 gives