**طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها**

## مبحث نهم

مباحث پیشرفته در ساختمان داده‌ها

# ساختمان‌داده‌هایی برای مجموعه‌های مجزا

# Data Structures for Disjoint Sets


کاظم فولادی قلعه

دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی

دانشگاه تهران


http://courses.fouladi.ir/algorithm

# مجموعه‌های مجزا

## DISJOINT SETS

برخی کاربردها، نیازمند گروه‌بندی $n$ عنصر مجزا در قالب تعدادی مجموعه‌ی مجزا هستند.

دو عملیات مورد نیاز عبارتند از:

| یافتن<br>*Find* | اجتماع<br>*Union* |
| --- | --- |
| یافتن مجموعه‌ای که عنصر داده شده در آن قرار دارد | اجتماع دو مجموعه‌ی داده شده |

هدف، طراحی ساختمان‌داده‌ای برای پشتیبانی کارآمد از دو عملیات فوق است.

# مجموعه‌های مجزا

ساختمان داده

## DISJOINT SETS

ساختمان داده‌ی مجموعه‌های مجزا، خانواده‌ای از مجموعه‌های پویای مجزای را نگهداری می‌کند.

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k\}$$

هر مجموعه توسط نماینده‌ی آن که عضوی از آن مجموعه است، مشخص می‌شود.

*Representative*

در برخی کاربردها اینکه کدام عضو به عنوان نماینده استفاده می‌شود مهم نیست؛ فقط اینکه اگر نماینده‌ی مجموعه‌ی پویا را چند بار بدون تغییر دادن مجموعه درخواست کنیم، باید به پاسخ‌های یکسانی برسیم.

هر عنصر از مجموعه در قالب یک شیئ نمایش داده می‌شود ($x$)

| ایجاد مجموعه | یافتن | اجتماع |
|---|---|---|
| MAKE-SET($x$) | FIND-SET($x$) | UNION($x,y$) |
| یک مجموعه‌ی جدید که تنها عضو آن $x$ است را ایجاد می‌کند. ($x$ نباید عضو مجموعه‌ی دیگری باشد.) | اشاره‌گری به نماینده‌ی مجموعه‌ی شامل $x$ را برمی‌گرداند. | دو مجموعه‌ی پویای مجزا شامل $x$ و $y$ که $S_x$ و $S_y$ نام دارد را در یک مجموعه‌ی جدید که اجتماع دو مجموعه است قرار می‌دهد و سپس $S_x$ و $S_y$ را حذف می‌کند. نماینده‌ی مجموعه‌ی جدید یکی از اعضای $S_x$ یا $S_y$ است. |

# مجموعه‌های مجزا

کاربرد در یافتن مؤلفه‌های همبند یک گراف بدون جهت

## CONNECTED COMPONENTS

```
CONNECTED-COMPONENTS(G)
1  for each vertex v ∈ G.V
2      MAKE-SET(v)
3  for each edge (u, v) ∈ G.E
4      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
5          UNION(u, v)
```

روال CONNECTED-COMPONENTS

- در آغاز هر رأس $v$ در مجموعه‌ی خودش قرار می‌گیرد.
- سپس برای هر یال $(u,v)$، اجتماع مجموعه‌هایی که شامل $u$ و $v$ هستند، تعیین می‌شود.

```
SAME-COMPONENT(u, v)
1  if FIND-SET(u) == FIND-SET(v)
2      return TRUE
3  else return FALSE
```

روال SAME-COMPONENT

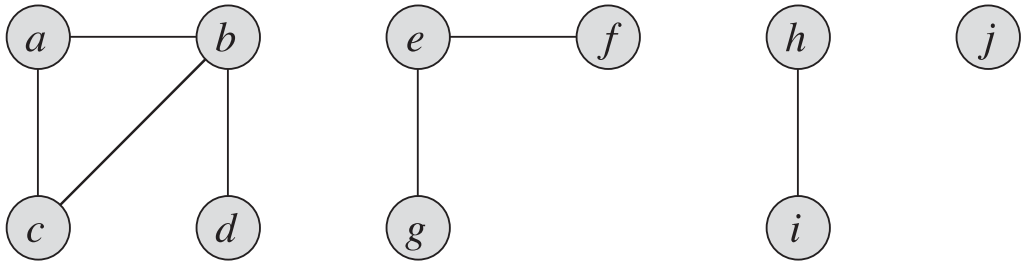
- پس از اجرای روال قبلی، این روال مشخص می‌کند که دو رأس در یک مؤلفه‌ی همبند قرار دارند یا خیر.

# مجموعه‌های مجزا

کاربرد در یافتن مؤلفه‌های همبند یک گراف بدون جهت: مثال

## CONNECTED COMPONENTS

مثال از یک گراف بدون جهت با چهار مؤلفه‌ی همبند:




خانواده‌ی مجموعه‌های مجزا پس از پردازش هر یال توسط روال CONNECTED-COMPONENTS :

| Edge processed | Collection of disjoint sets | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| initial sets | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{c\}$ | $\{d\}$ | $\{e\}$ | $\{f\}$ | $\{g\}$ | $\{h\}$ | $\{i\}$ | $\{j\}$ |
| $(b,d)$ | $\{a\}$ | $\{b,d\}$ | $\{c\}$ | | $\{e\}$ | $\{f\}$ | $\{g\}$ | $\{h\}$ | $\{i\}$ | $\{j\}$ |
| $(e,g)$ | $\{a\}$ | $\{b,d\}$ | $\{c\}$ | | $\{e,g\}$ | $\{f\}$ | | $\{h\}$ | $\{i\}$ | $\{j\}$ |
| $(a,c)$ | $\{a,c\}$ | $\{b,d\}$ | | | $\{e,g\}$ | $\{f\}$ | | $\{h\}$ | $\{i\}$ | $\{j\}$ |
| $(h,i)$ | $\{a,c\}$ | $\{b,d\}$ | | | $\{e,g\}$ | $\{f\}$ | | $\{h,i\}$ | | $\{j\}$ |
| $(a,b)$ | $\{a,b,c,d\}$ | | | | $\{e,g\}$ | $\{f\}$ | | $\{h,i\}$ | | $\{j\}$ |
| $(e,f)$ | $\{a,b,c,d\}$ | | | | $\{e,f,g\}$ | | | $\{h,i\}$ | | $\{j\}$ |
| $(b,c)$ | $\{a,b,c,d\}$ | | | | $\{e,f,g\}$ | | | $\{h,i\}$ | | $\{j\}$ |

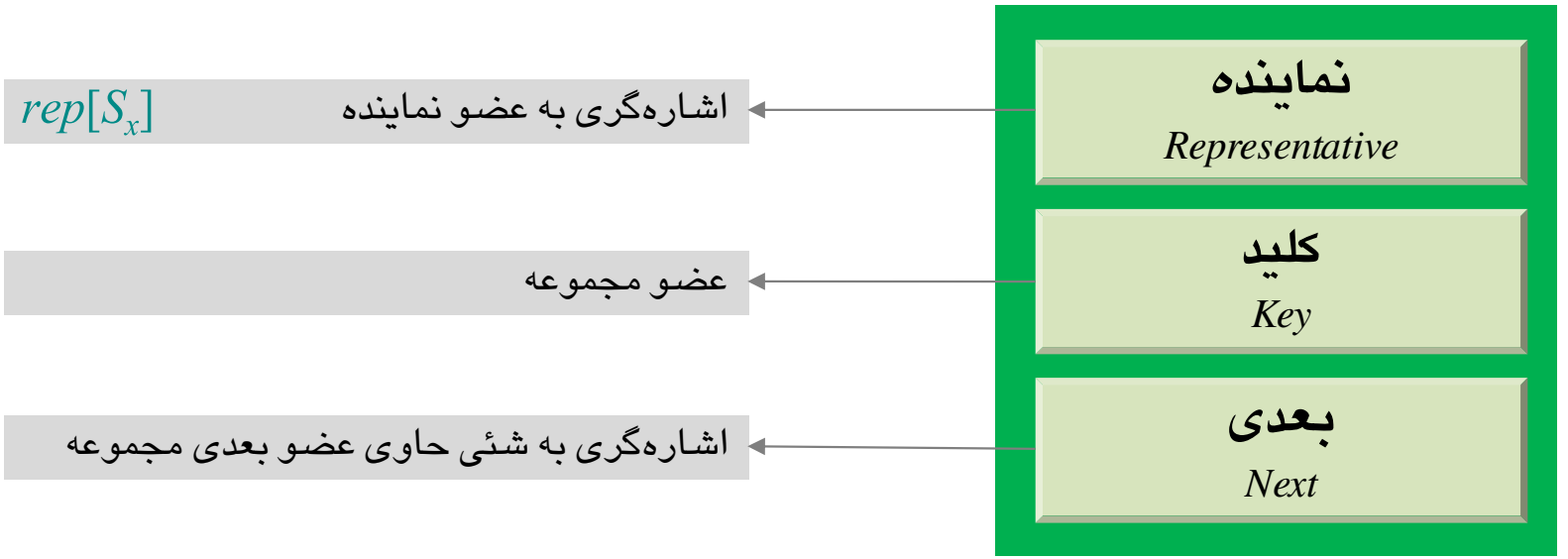
# مجموعه‌های مجزا

## بازنمایی با لیست پیوندی

## DISJOINT SETS

- نمایش هر مجموعه با یک لیست پیوندی
- اولین شیئ در هر لیست پیوندی به عنوان نماینده‌ی مجموعه‌ی آن عمل می‌کند.
- هر لیست دو اشاره‌گر $head$ و $tail$ (اشاره‌گر به سر و ته لیست) دارد.

ساختار هر گره‌ی لیست پیوندی

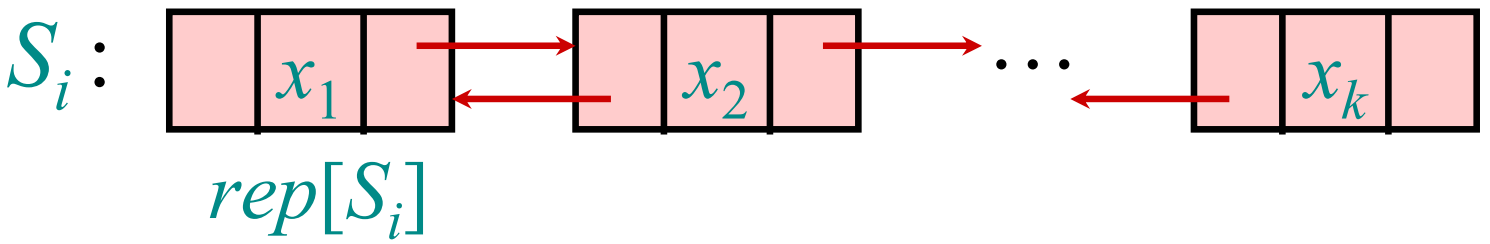


# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی: مثال

DISJOINT SETS

$$S_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

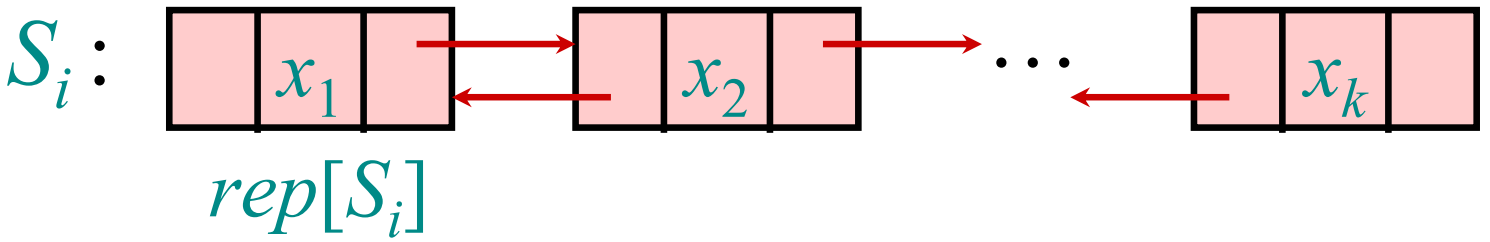


# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی: تحلیل زمان اجرا

## DISJOINT SETS

$$S_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$



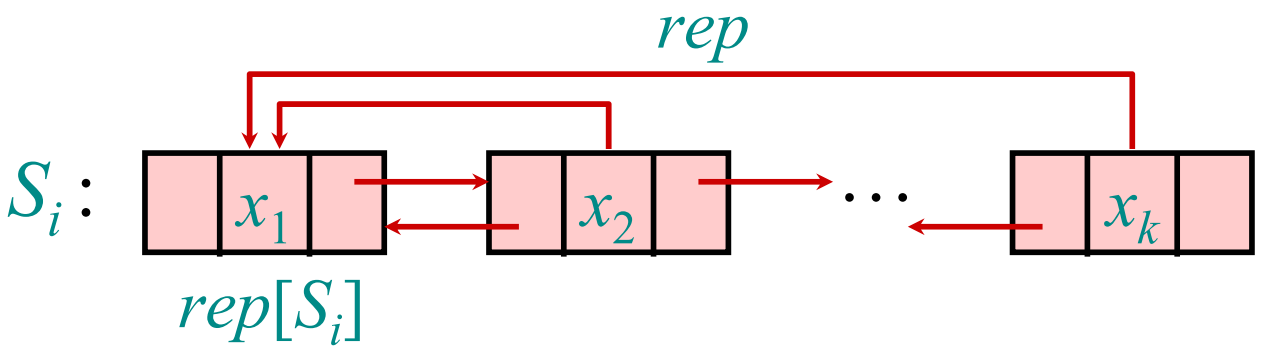

- MAKE-SET($x$) initializes $x$ as a lone node. – $\Theta(1)$
- FIND-SET($x$) walks left in the list containing $x$ until it reaches the front of the list. – $\Theta(n)$
- UNION($x$, $y$) concatenates the lists containing $x$ and $y$, leaving rep. as FIND-SET[$x$]. – $\Theta(n)$

# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی افزوده

## AUGMENTED LINKED-LIST

Store set $S_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ as unordered doubly linked list. Define $rep[S_i]$ to be front of list, $x_1$. Each element $x_j$ also stores pointer $rep[x_j]$ to $rep[S_i]$.




- FIND-SET($x$) returns $rep[x]$. – $\Theta(1)$
- UNION($x$, $y$) concatenates the lists containing $x$ and $y$, and updates the $rep$ pointers for all elements in the list containing $y$. – $\Theta(n)$

# مجموعه‌های مجزا

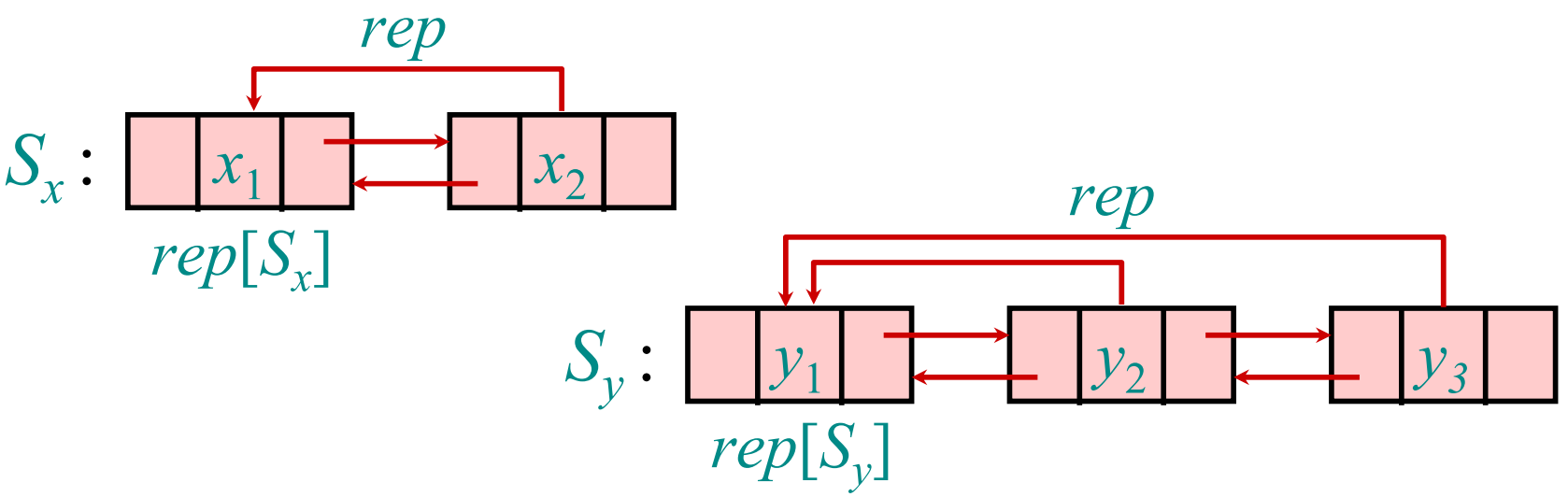
## بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع (۱ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

Each element $x_j$ stores pointer $rep[x_j]$ to $rep[S_i]$.

UNION$(x, y)$

- concatenates the lists containing $x$ and $y$, and
- updates the $rep$ pointers for all elements in the list containing $y$.



# مجموعه‌های مجزا

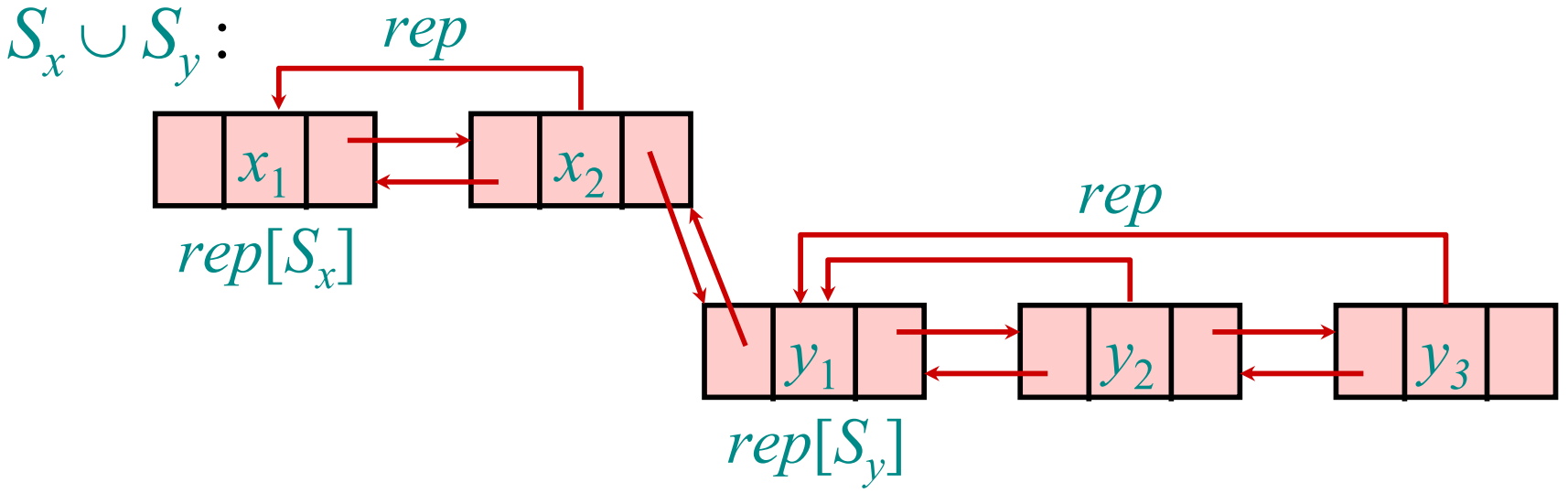
## بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع (۲ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

Each element $x_j$ stores pointer $rep[x_j]$ to $rep[S_i]$.

UNION$(x, y)$

- concatenates the lists containing $x$ and $y$, and
- updates the $rep$ pointers for all elements in the list containing $y$.



# مجموعه‌های مجزا

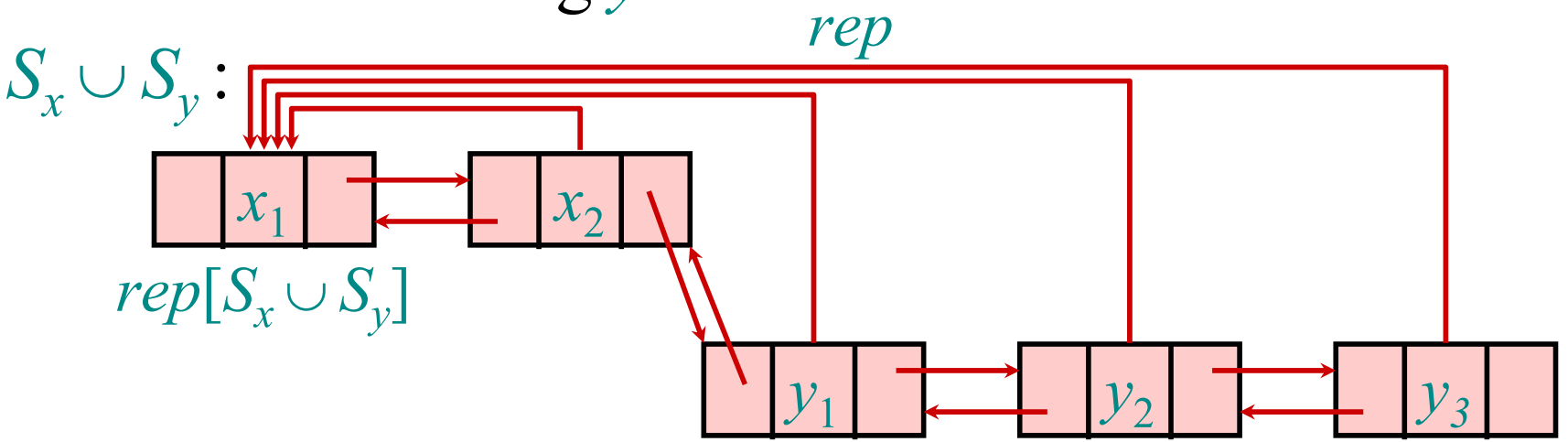
## بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع (۳ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

Each element $x_j$ stores pointer $rep[x_j]$ to $rep[S_i]$.

UNION$(x, y)$

- concatenates the lists containing $x$ and $y$, and
- updates the *rep* pointers for all elements in the list containing $y$.




Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2025 | 3rd Edition
کاظم فولادی

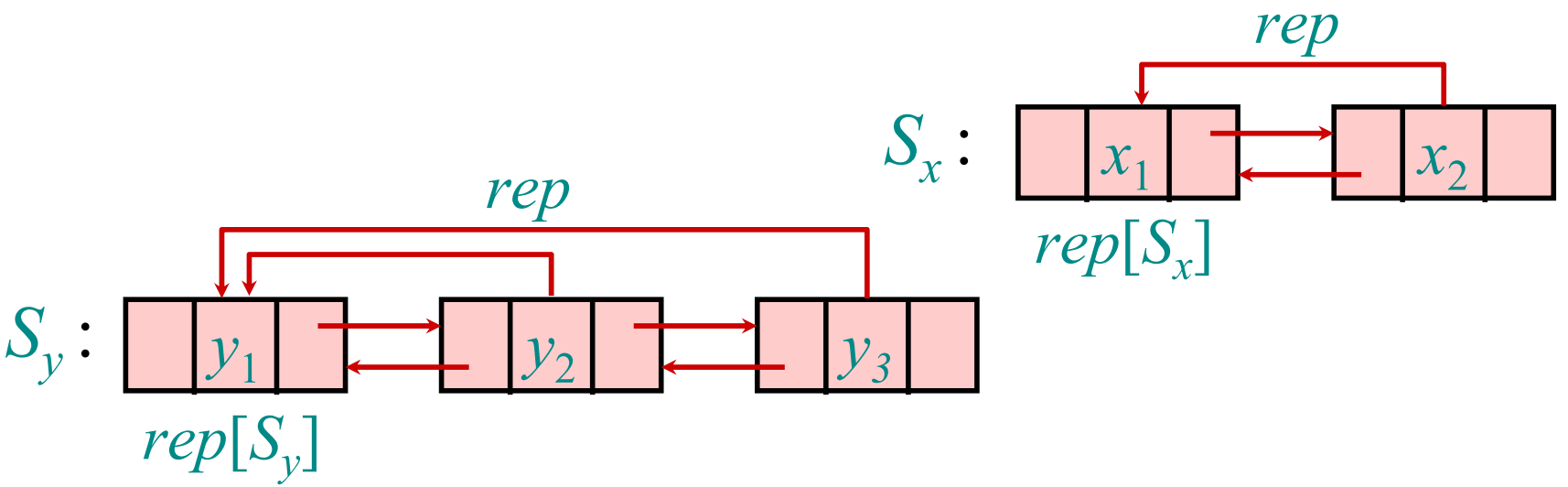
# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع به صورتی دیگر (۱ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

UNION$(x, y)$ could instead

- concatenate the lists containing $y$ and $x$, and
- update the *rep* pointers for all elements in the list containing $x$.



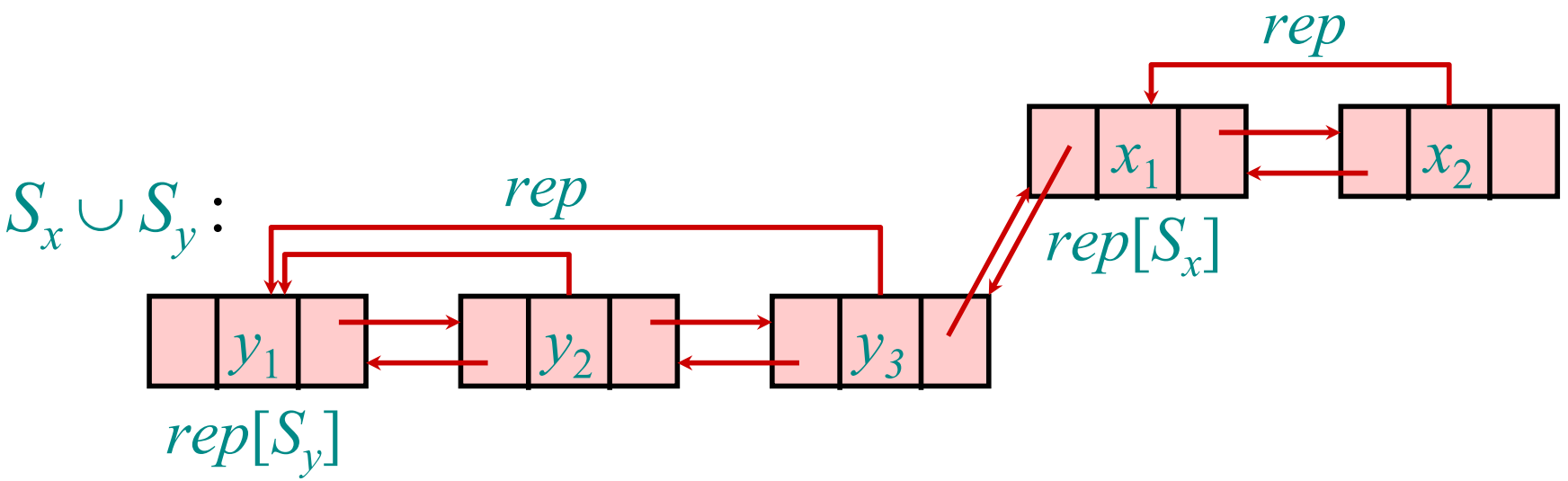
# مجموعه‌های مجزا

## بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع به صورتی دیگر (۲ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

UNION$(x, y)$ could instead

- concatenate the lists containing $y$ and $x$, and
- update the *rep* pointers for all elements in the list containing $x$.




Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2025 | 3rd Edition
کاظم فولادی

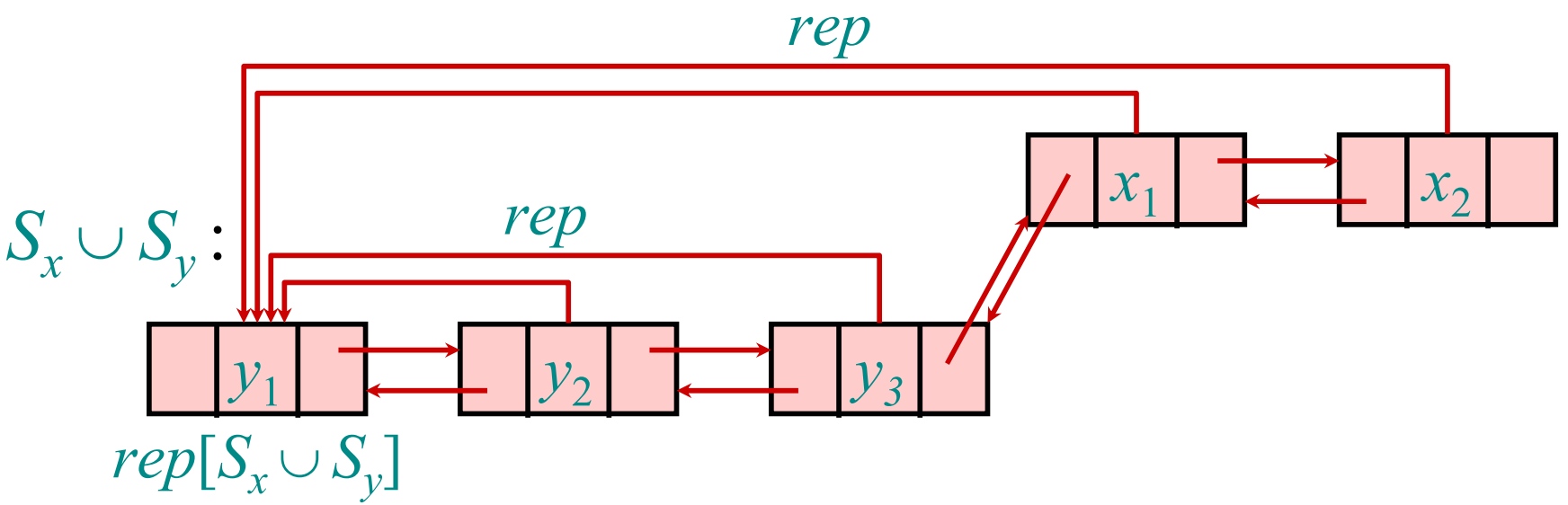
# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی افزوده: عملیات اجتماع به صورتی دیگر (۳ از ۳)

AUGMENTED LINKED-LIST

UNION$(x, y)$ could instead

- concatenate the lists containing $y$ and $x$, and
- update the *rep* pointers for all elements in the list containing $x$.

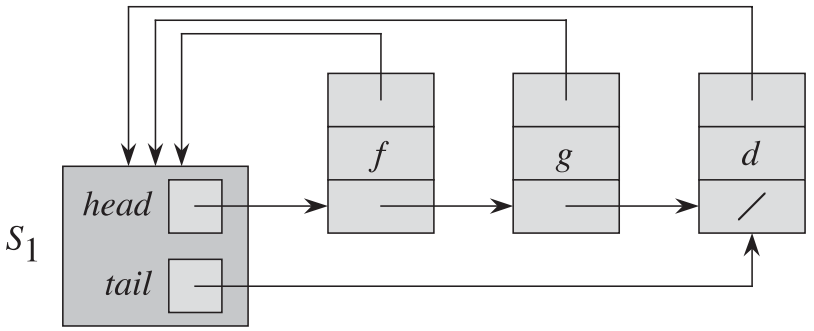


# مجموعه‌های مجزا

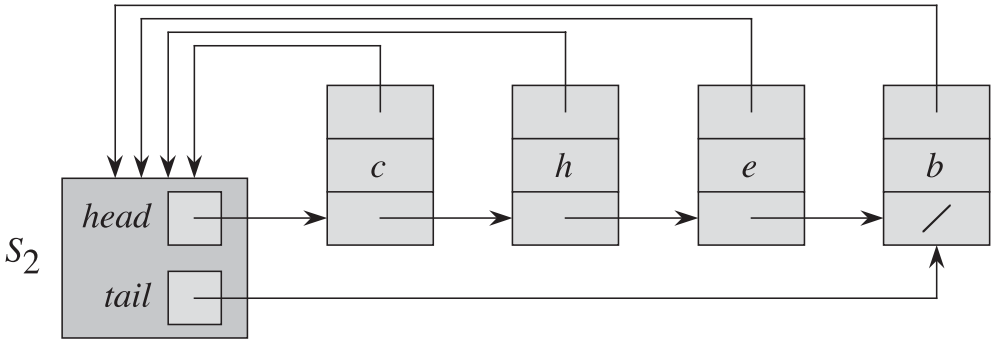
## بازنمایی با لیست پیوندی: مثال

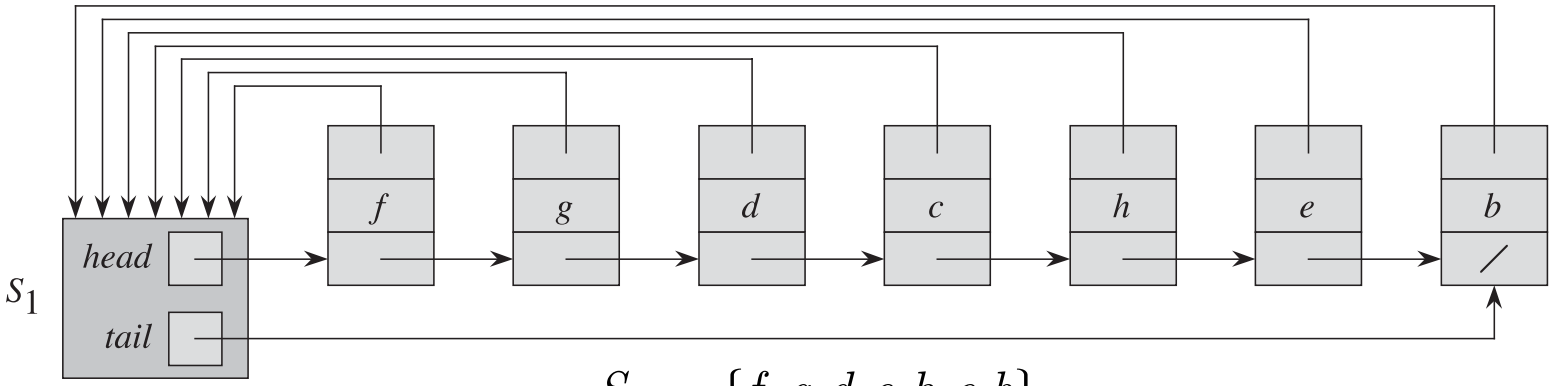
DISJOINT SETS

$S_1 = \{f, g, d\}$




$S_2 = \{c, h, e, b\}$



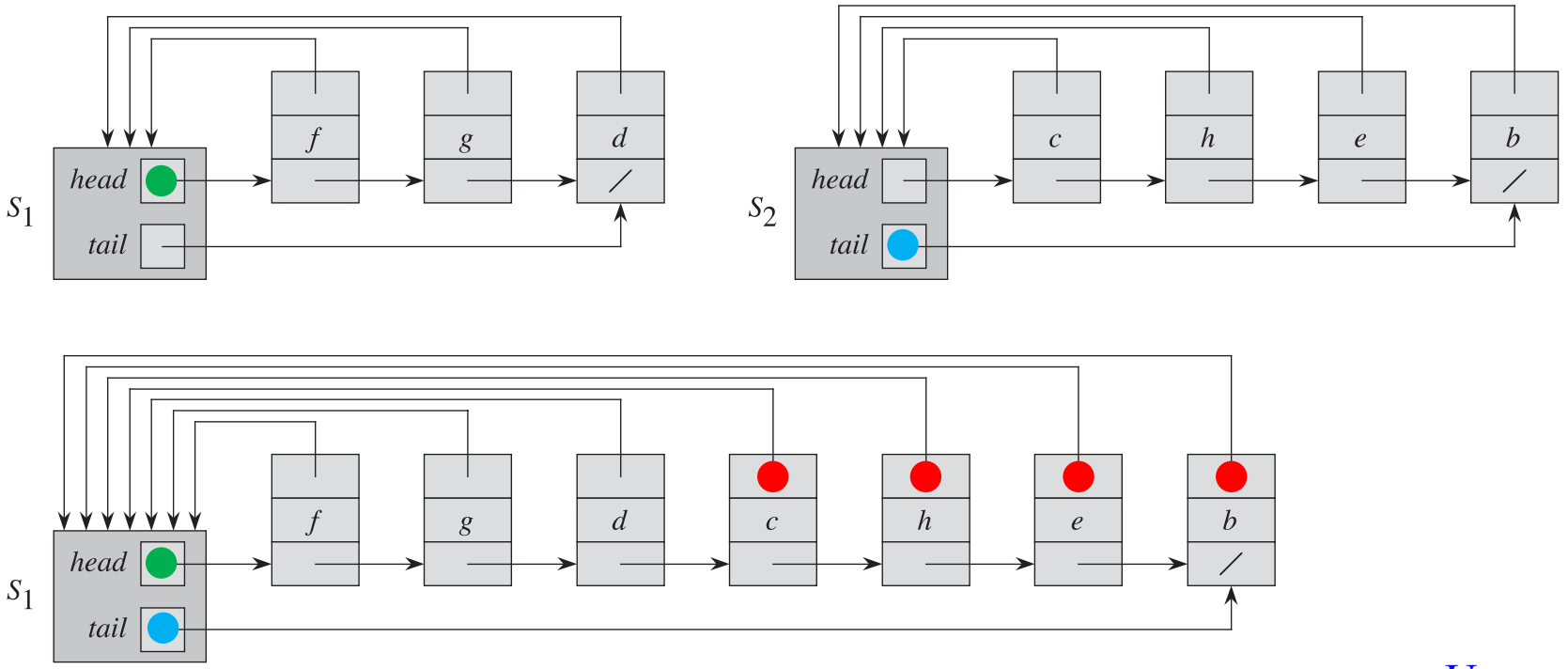




$S_1 = \{f, g, d, c, h, e, b\}$

با انجام عمل اجتماع، دو مجموعه‌ی اول حذف شده، و یک مجموعه‌ی جدید از اجتماع آن دو ساخته می‌شود.

# مجموعه‌های مجزا

## بازنمایی با لیست پیوندی: پیاده‌سازی عمل اجتماع




### عملیات UNION$(x,y)$

- لیست $y$ را به انتهای لیست $x$ اضافه می‌کند.
- نماینده‌ی مجموعه‌ی جدید، عنصری است که در آغاز نماینده‌ی مجموعه‌ی حاوی $x$ بوده است.
- پس باید اشاره‌گر به نماینده، برای هر شیئی که ابتدا در $y$ بوده است، به‌هنگام شود.

(زمان این کار بر حسب طول لیست $y$ خطی است.)

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2025 | 3rd Edition
کاظم فولادی

# مجموعه‌های مجزا

## بازنمایی با لیست پیوندی: تحلیل سرشکنی

| Operation | Number of objects updated |
|---|---|
| MAKE-SET($x_1$) | 1 |
| MAKE-SET($x_2$) | 1 |
| ⋮ | ⋮ |
| MAKE-SET($x_n$) | 1 |
| UNION($x_2, x_1$) | 1 |
| UNION($x_3, x_2$) | 2 |
| UNION($x_4, x_3$) | 3 |
| ⋮ | ⋮ |
| UNION($x_n, x_{n-1}$) | $n-1$ |

- دنباله‌ای از $m$ عملیات روی $n$ شیئ داریم که $m = 2n - 1$
- $n$ عملیات اول، MAKE-SET است
- $n - 1$ عملیات بعدی UNION است.

- زمان اجرای $n$ عملیات اول $\Theta(n)$ است.
- سپس $n - 1$ عملیات UNION($x_i$,$x_{i+1}$) شیئ $i$ام را به‌هنگام می‌کند.
- تعداد کل اشیایی که توسط UNION به‌هنگام می‌شود عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$$

- پس پیاده‌سازی UNION به زمان $\Theta(n^2)$ نیاز دارد و هزینه‌ی سرشکنی این $m$ عملیات برابر است با:

$$T(n) = \Theta(n^2) \,/\, (2n-1) = \Theta(n)$$

(زمان متوسط اجتماع در بدترین حالت به‌ازای هر فراخوانی $\Theta(n)$ است، زیرا لیست طولانی‌تر به لیست کوتاه‌تر اضافه می‌شود.)

# مجموعه‌های مجزا

## بازنمایی با لیست پیوندی: هیوریستیک اجتماع وزن‌دار

WEIGHTED-UNION HEURISTIC

روش هیوریستیک اجتماع وزن‌دار (وزن هر لیست = تعداد عناصر آن لیست)،
**همیشه لیست کوتاه‌تر را به لیست طولانی‌تر اضافه می‌کند.**

⇓

اگر هر دو مجموعه $\Omega(n)$ عضو داشته باشد،
عملیات UNION (اجتماع) $\Omega(n)$ زمان مصرف می‌کند.

**قضیه**

دنباله‌ای از $m$ عملیات
- MAKE-SET
- FIND-SET
- UNION

داریم که $n$ تای آن، MAKE-SET است.

با استفاده از بازنمایی لیست پیوندی مجموعه‌های مجزا
و روش هیوریستیک اجتماع وزن‌دار،
این دنباله از عملیات به زمان زیر نیاز دارد:

$$O(m + n \log n)$$

# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی: هیوریستیک اجتماع وزن‌دار

WEIGHTED-UNION HEURISTIC

To save work, concatenate smaller list onto the end of the larger list. Cost = $\Theta$(length of smaller list). Augment list to store its ***weight*** (# elements).

Let $n$ denote the overall number of elements (equivalently, the number of MAKE-SET operations).
Let $m$ denote the total number of operations.
Let $f$ denote the number of FIND-SET operations.

**Theorem:** Cost of all UNION's is $O(n \lg n)$.

**Corollary:** Total cost is $O(m + n \lg n)$.

# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با لیست پیوندی: هیوریستیک اجتماع وزن‌دار

WEIGHTED-UNION HEURISTIC

To save work, concatenate smaller list onto the end of the larger list. Cost = $\Theta(1 + \text{length of smaller list})$.

**Theorem:** Total cost of UNION's is $O(n \lg n)$.

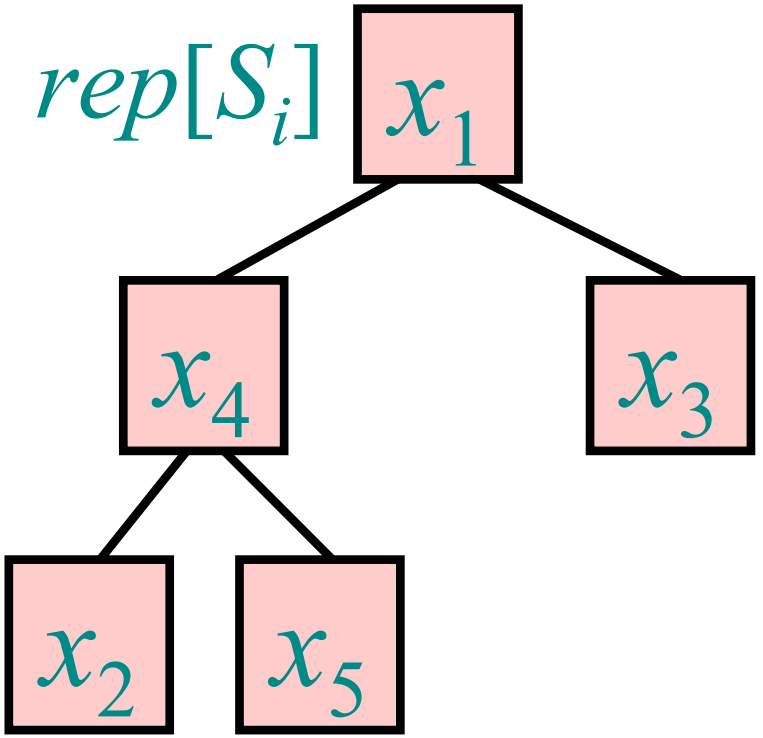
*Proof.* Monitor an element $x$ and set $S_x$ containing it. After initial MAKE-SET($x$), $weight[S_x] = 1$. Each time $S_x$ is united with set $S_y$, $weight[S_y] \geq weight[S_x]$, pay 1 to update $rep[x]$, and $weight[S_x]$ at least doubles (increasing by $weight[S_y]$). Each time $S_y$ is united with smaller set $S_y$, pay nothing, and $weight[S_x]$ only increases. Thus pay $\leq \lg n$ for $x$. □

# مجموعه‌های مجزا

بازنمایی با درخت‌های متوازن

## BALANCED-TREE REPRESENTATION

$$S_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$



# مجموعه‌های مجزا

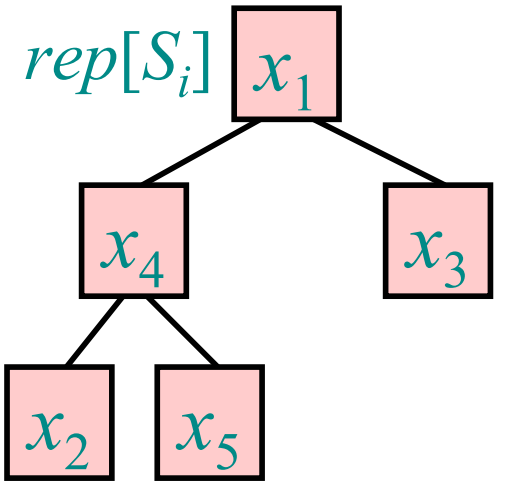
بازنمایی با درخت‌های متوازن: تحلیل زمان اجرا

## BALANCED-TREE REPRESENTATION

$$S_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

- MAKE-SET($x$) initializes $x$ as a lone node. – $\Theta(1)$
- FIND-SET($x$) walks up the tree containing $x$ until it reaches the root. – $\Theta(\lg n)$
- UNION($x$, $y$) concatenates the trees containing $x$ and $y$, changing rep. – $\Theta(\lg n)$

$S_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$



# مجموعه‌های مجزا

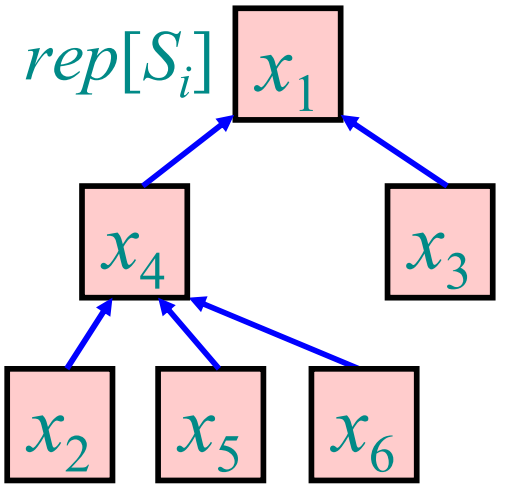
بازنمایی با درخت‌ها

## BALANCED-TREE REPRESENTATION

Store each set $S_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ as an unordered, potentially unbalanced, not necessarily binary tree, storing only *parent* pointers. $rep[S_i]$ is the tree root.

- MAKE-SET($x$) initializes $x$ as a lone node. – $\Theta(1)$
- FIND-SET($x$) walks up the tree containing $x$ until it reaches the root. – $\Theta(depth[x])$
- UNION($x$, $y$) concatenates the trees containing $x$ and $y$…

$S_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$



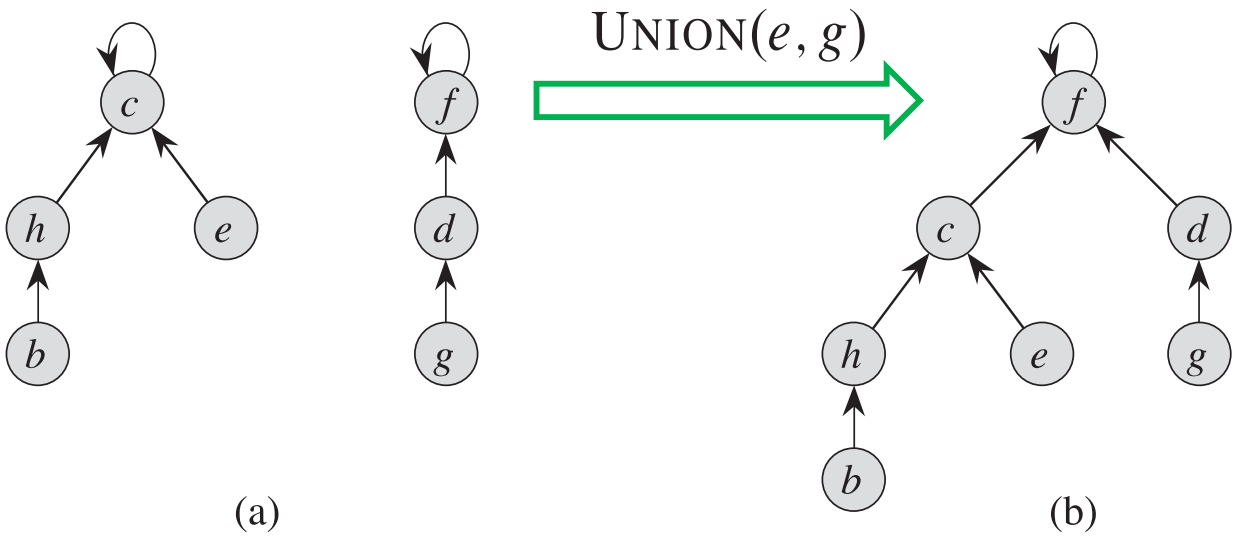
# جنگل مجموعه‌های مجزا

## DISJOINT SETS FOREST

یک پیاده‌سازی سریع‌تر مجموعه‌های مجزا،
بازنمایی آنها به صورت درخت‌های ریشه‌دار است:

- هر **گره** نشان‌دهنده‌ی یک عضو است.
- هر **درخت** نشان‌دهنده‌ی یک مجموعه است.

- هر عضو فقط به والدش اشاره می‌کند.
- ریشه‌ی هر درخت، نماینده‌ی مجموعه است.
- ریشه‌ی درخت به خودش اشاره می‌کند.



# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک اجتماع بر حسب رتبه

## UNION BY RANK

```
MAKE-SET(x)
1  x.p = x
2  x.rank = 0
```

```
UNION(x, y)
1  LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))
```

```
LINK(x, y)
1  if x.rank > y.rank
2        y.p = x
3  else x.p = y
4        if x.rank == y.rank
5              y.rank = y.rank + 1
```

رتبه‌ی هر گره در مجموعه‌های مجزا = $\lfloor \log n \rfloor$

ریشه‌ی درخت با تعداد گره‌ی کمتر
به ریشه‌ی درخت با تعداد گره‌ی بیشتر اشاره می‌کند.

**برای پیاده‌سازی:**
به‌جای ردیابی صریح اندازه‌ی زیردرخت حاصل از هر گره،
برای هر گره‌ی $x$، رتبه‌ی $rank[x]$ را نگه می‌داریم:
$rank[x]$ = کران بالای ارتفاع گره

- وقتی مجموعه‌ی تک‌عنصری ایجاد می‌شود، رتبه‌ی اولیه‌ی این گره، صفر است.
- هنگام اجرای اجتماع، ریشه‌ای با رتبه‌ی کوچک‌تر به ریشه‌ای با رتبه‌ی بزرگ‌تر اشاره می‌کند.
  (ولی خود رتبه‌ها تغییر نمی‌کنند.)
- هنگام اجرای اجتماع، اگر رتبه‌ی ریشه‌ها، یکسان بود، به‌طور دلخواه یکی از ریشه‌ها به‌عنوان والد انتخاب می‌شود و رتبه‌ی آن یک واحد افزایش می‌یابد.

# جنگل مجموعه‌های مجزا

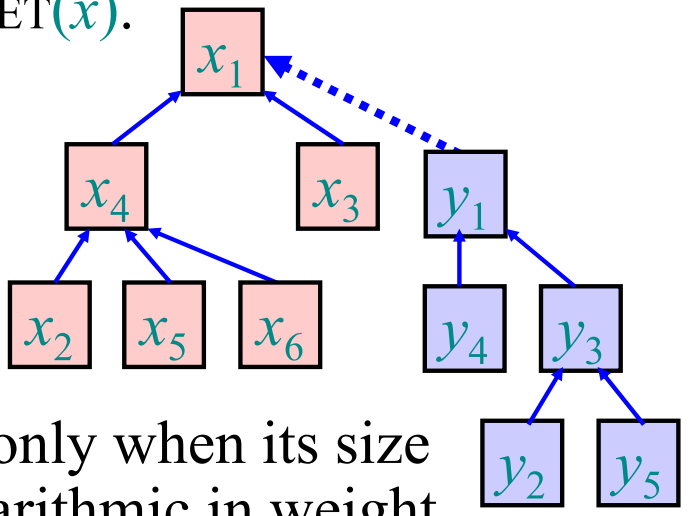
روش هیوریستیک اجتماع بر حسب رتبه

## UNION BY RANK

Let $n$ denote the overall number of elements (equivalently, the number of MAKE-SET operations).
Let $m$ denote the total number of operations.
Let $f$ denote the number of FIND-SET operations.

UNION$(x, y)$ can use a simple concatenation strategy: Make root FIND-SET$(y)$ a child of root FIND-SET$(x)$.
$\Rightarrow$ FIND-SET$(y)$ = FIND-SET$(x)$.

Merge tree with smaller weight into tree with larger weight.




Height of tree increases only when its size doubles, so height is logarithmic in weight.
Thus total cost is $O(m + f \lg n)$.

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2025 | 3rd Edition
کاظم فولادی

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک اجتماع بر حسب رتبه: تحلیل زمان اجرا

UNION BY RANK

**Theorem:** Total cost of FIND-SET's is $O(m \lg n)$.

*Proof:* Amortization by potential function.
The ***weight*** of a node $x$ is # nodes in its subtree.
Define $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_i \lg weight[x_i]$.
UNION$(x_i, x_j)$ increases potential of root FIND-SET$(x_i)$ by at most $\lg weight[\text{root FIND-SET}(x_j)] \le \lg n$.
Each step down $p \to c$ made by FIND-SET$(x_i)$, except the first, moves $c$'s subtree out of $p$'s subtree.
Thus if $weight[c] \ge \frac{1}{2}\, weight[p]$, $\phi$ decreases by $\ge 1$, paying for the step down. There can be at most $\lg n$ steps $p \to c$ for which $weight[c] < \frac{1}{2}\, weight[p]$. □

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن

## PATH COMPRESSION

```
MAKE-SET(x)
1  x.p = x
2  x.rank = 0
```

```
UNION(x, y)
1  LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))
```

```
LINK(x, y)
1  if x.rank > y.rank
2        y.p = x
3  else x.p = y
4        if x.rank == y.rank
5              y.rank = y.rank + 1
```

The FIND-SET procedure with path compression

```
FIND-SET(x)
1  if x ≠ x.p
2        x.p = FIND-SET(x.p)
3  return x.p
```

فشرده‌سازی مسیر در حین عمل FIND-SET استفاده می‌شود.

باید هر گره در **مسیر یافتن**، مستقیماً به ریشه اشاره کند.

فشرده‌سازی مسیر، رتبه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

**برای پیاده‌سازی:**

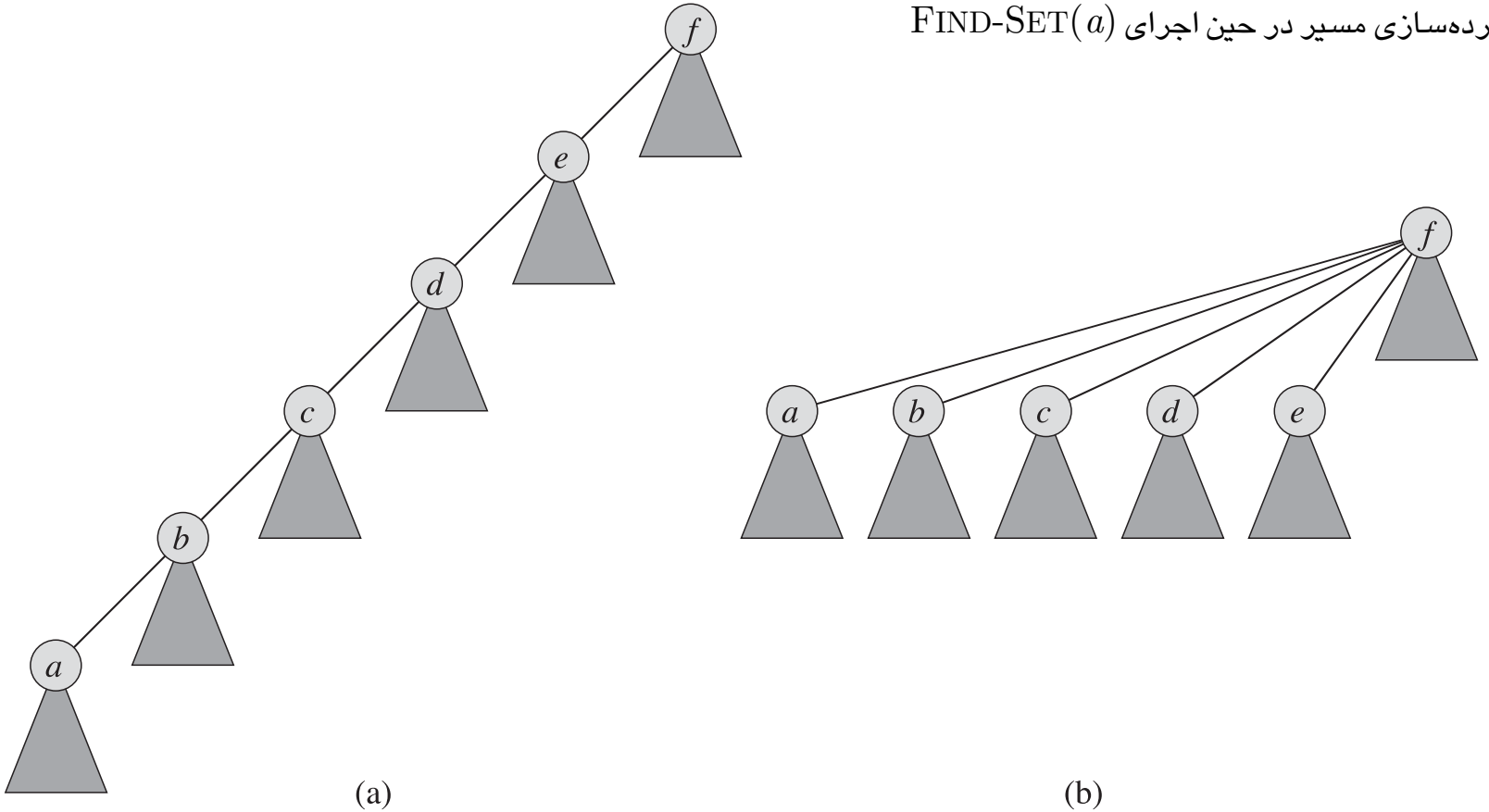
- در مرحله‌ی اول، در **مسیر یافتن** به سمت بالا می‌رود تا به ریشه برسد.
- در مرحله‌ی دوم، در **مسیر یافتن** به سمت پایین می‌رود تا هر گره را به‌هنگام کند.

# جنگل مجموعه‌های مجزا

## روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن

## PATH COMPRESSION

فشرده‌سازی مسیر در حین اجرای FIND-SET($a$)




درخت بازنمایی کننده‌ی یک مجموعه قبل از اجرای FIND-SET($a$)

درخت بازنمایی کننده‌ی همان مجموعه بعد از اجرای FIND-SET($a$) با فشرده‌سازی مسیر

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2025 | 3rd Edition
کاظم فولادی

# جنگل مجموعه‌های مجزا

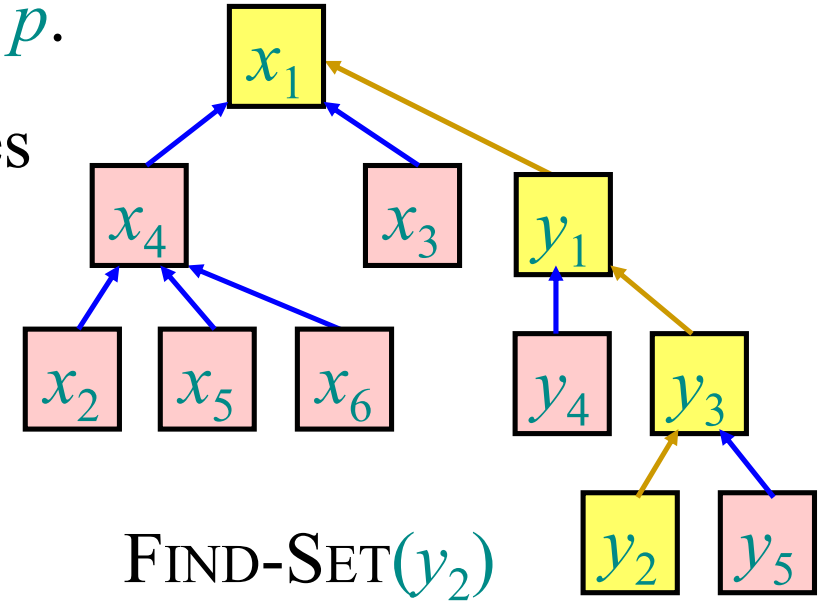
روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن

## PATH COMPRESSION

When we execute a FIND-SET operation and walk up a path $p$ to the root, we know the representative for all the nodes on path $p$.

***Path compression*** makes all of those nodes direct children of the root.

Cost of FIND-SET($x$) is still $\Theta(depth[x])$.

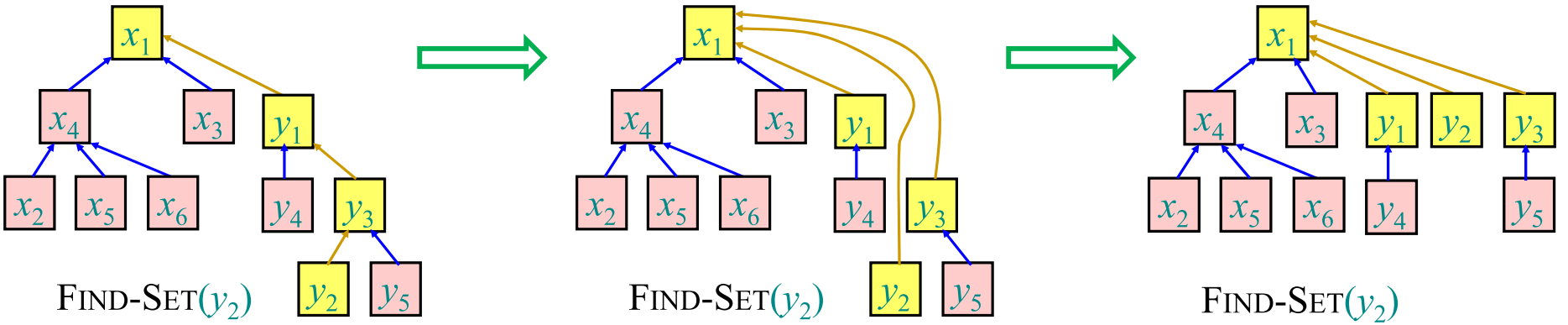



FIND-SET($y_2$)

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن

## PATH COMPRESSION



# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن: تحلیل زمان اجرا

## PATH COMPRESSION

**قضیه**

دنباله‌ای از $m$ عملیات
- MAKE-SET
- FIND-SET
- UNION

داریم.
با فرض اینکه تمام عملیات UNION قبل از FIND-SET انجام شود،
با استفاده از بازنمایی درختی مجموعه‌های مجزا
و روش فشرده‌سازی مسیر + اجتماع برحسب رتبه،
این دنباله از عملیات در بدترین حالت به زمان زیر نیاز دارد:

$$O(m)$$

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن: تحلیل زمان اجرا

PATH COMPRESSION

**Theorem:** If all UNION operations occur before all FIND-SET operations, then total cost is $O(m)$.

*Proof:* If a FIND-SET operation traverses a path with $k$ nodes, costing $O(k)$ time, then $k - 2$ nodes are made new children of the root. This change can happen only once for each of the $n$ elements, so the total cost of FIND-SET is $O(f + n)$. □

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن: تحلیل زمان اجرا

## PATH COMPRESSION

**قضیه**

دنباله‌ای از $m$ عملیات
- MAKE-SET
- FIND-SET
- UNION

داریم که
- $n$ تای آن، MAKE-SET است.
- در نتیجه حداکثر $n-1$ تای آن UNION است.
- $f$ تای آن، FIND-SET است.

با استفاده از بازنمایی درختی مجموعه‌های مجزا
و روش فشرده‌سازی مسیر (به‌تنهایی)،
این دنباله از عملیات در بدترین حالت به زمان زیر نیاز دارد:

$$\Theta\left(n + f \cdot (1 + \log_{2+\frac{f}{n}} n)\right)$$

# جنگل مجموعه‌های مجزا

روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن: تحلیل زمان اجرا

## PATH COMPRESSION

**قضیه**

دنباله‌ای از $m$ عملیات
- MAKE-SET
- FIND-SET
- UNION

داریم که
- $n$ تای آن، MAKE-SET است.
- در نتیجه حداکثر $n - 1$ تای آن UNION است.
- $f$ تای آن، FIND-SET است.

با استفاده از بازنمایی درختی مجموعه‌های مجزا
و روش فشرده‌سازی مسیر + اجتماع بر حسب رتبه،
این دنباله از عملیات در بدترین حالت به زمان زیر نیاز دارد:

$$O(m \cdot \alpha(n))$$

$\alpha(n)$ معکوس تابع آکرمن، تابعی با رشد بسیار کند است
که در هر کاربرد واقعی از مجموعه‌های مجزا $\alpha(n) \leq 4$ است.

# Ackermann's function $A$

Define $A_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{if } k = 0, \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{if } k \geq 1. \end{cases}$ – iterate $j$+1 times

$A_0(j) = j + 1$ $\quad A_0(1) = 2$

$A_1(j) \sim 2\,j$ $\quad A_1(1) = 3$

$A_2(j) \sim 2j\ 2^j > 2^j$ $\quad A_2(1) = 7$

$A_3(1) = 2047$

$A_3(j) > 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^j}}}}}}\Big\}\, j$

$A_4(j)$ is a lot bigger. $\quad A_4(1) > 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2047}}}}}}}\Big\}\, 2048$

Define $\alpha(n) = \min\{k : A_k(1) \geq n\} \leq 4$ for practical $n$.

# جنگل مجموعه‌های مجزا

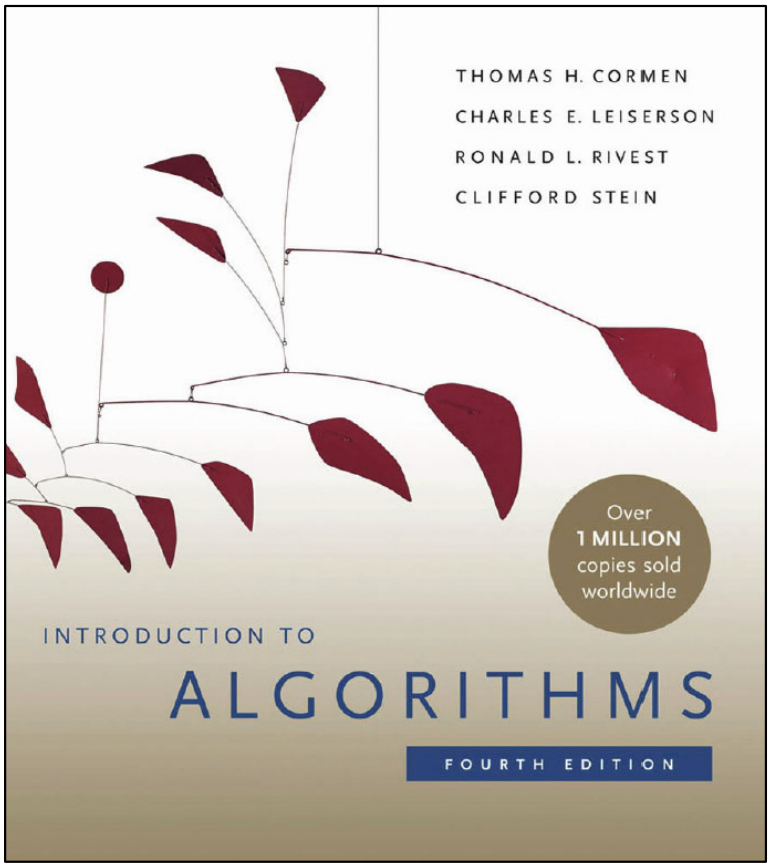
روش هیوریستیک فشرده‌سازی مسیر برای یافتن: تحلیل زمان اجرا

PATH COMPRESSION

**Theorem:** In general, total cost is $O(m\,\alpha(n))$.

*(long, tricky proof – see Section 21.4 of CLRS)*

# مرجع




T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein,
**Introduction to Algorithms**,
4th Edition, MIT Press, 2022.

**Chapter 19**

## 19 Data Structures for Disjoint Sets

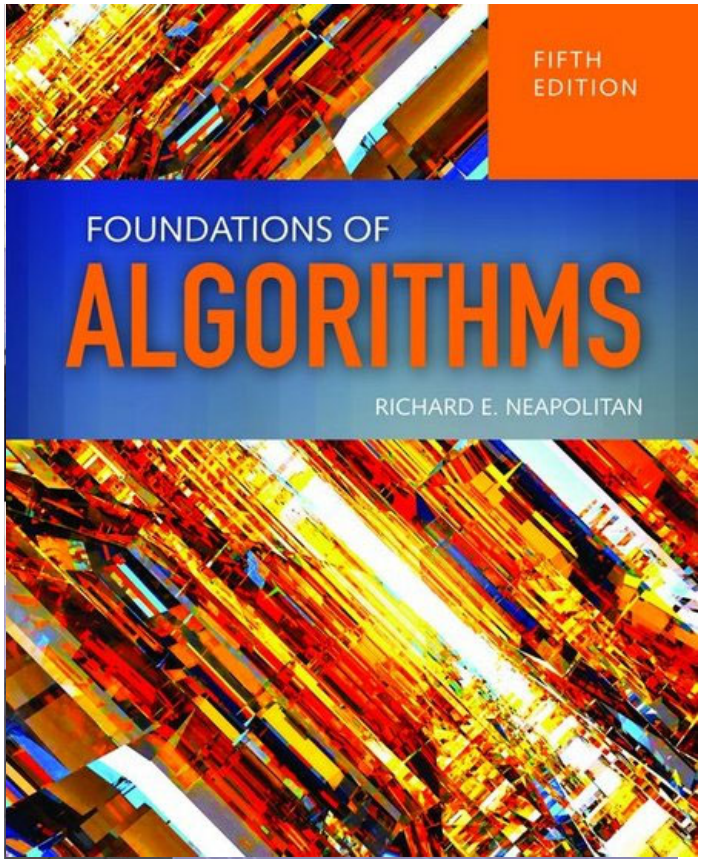
Some applications involve grouping $n$ distinct elements into a collection of disjoint sets—sets with no elements in common. These applications often need to perform two operations in particular: finding the unique set that contains a given element and uniting two sets. This chapter explores methods for maintaining a data structure that supports these operations.

Section 19.1 describes the operations supported by a disjoint-set data structure and presents a simple application. Section 19.2 looks at a simple linked-list implementation for disjoint sets. Section 19.3 presents a more efficient representation using rooted trees. The running time using the tree representation is theoretically superlinear, but for all practical purposes it is linear. Section 19.4 defines and discusses a very quickly growing function and its very slowly growing inverse, which appears in the running time of operations on the tree-based implementation, and then, by a complex amortized analysis, proves an upper bound on the running time that is just barely superlinear.

### 19.1 Disjoint-set operations

A *disjoint-set data structure* maintains a collection $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ of disjoint dynamic sets. To identify each set, choose a *representative*, which is some member of the set. In some applications, it doesn't matter which member is used as the representative; it matters only that if you ask for the representative of a dynamic set twice without modifying the set between the requests, you get the same answer both times. Other applications may require a prespecified rule for choosing the representative, such as choosing the smallest member in the set (for a set whose elements can be ordered).

# مرجع




R.E. Neapolitan,
**Foundations of Algorithms**,
5th Edition, Jones and Bartlett Publishers, 2015.

**Appendix C**

# Appendix C

## Data Structures for Disjoint Sets

Kruskal's algorithm (Algorithm 4.2 in Section 4.1.2) requires that we create disjoint subsets, each containing a distinct vertex in a graph, and repeatedly merge the subsets until all the vertices are in the same set. To implement this algorithm, we need a data structure for disjoint sets. There are many other useful applications of disjoint sets. For example, they can be used in Section 4.3 to improve the time complexity of Algorithm 4.4 (Scheduling with Deadlines).

Recall that an ***abstract data type*** consists of data objects along with permissible operations on those objects. Before we can implement a disjoint set abstract data type, we need to specify the objects and operations that are needed. We start with a universe $U$ of elements. For example, we could have

$$U = \{A, B, C, D, E\}.$$

We then want a procedure *makeset* that makes a set out of a member of $U$. The disjoint sets in Figure C. 1(a) should be created by the following calls:

```
for (each x ∈ U)
   makeset(x);
```

We need a type set_pointer and a function *find* such that if $p$ and $q$ are of type set_pointer and we have the calls

```
p = find('B');
q = find('C');
```

then $p$ should point to the set containing B, and $q$ should point to the set containing C. This is illustrated in Figure C.1(a). We also need a procedure *merge* to merge two sets into one. For example, if we do

```
p = find('B');
q = find('C');
merge(p, q);
```

643