بسم الله الرحمن الرحیم

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

مبحث هفتم

روش‌های طراحی الگوریتم

روش جستجوی فضای حالت

Methods of Algorithm Design: State-Space Search

کاظم فولادی قلعه

دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی

دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/algorithm

جستجوی فضای حالت

STATE-SPACE SEARCH

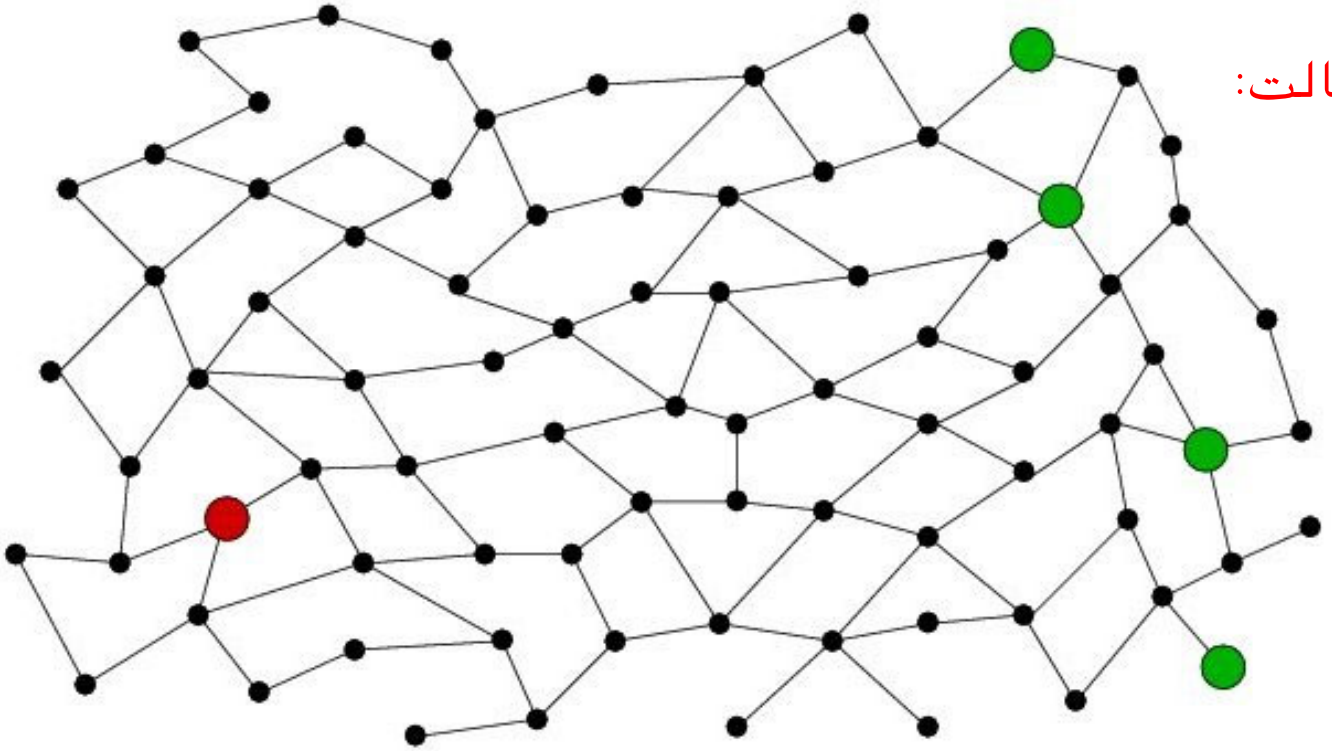
- هدف یافتن **دنباله‌ای از عناصر از یک مجموعه با یک شرط معین است:**

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های ممکن، **فضای حالت** نامیده می‌شود.
- **فضای حالت** را می‌توان به کمک یک **گراف** بازنمایی کرد:
  - گره‌ها: مقادیر متغیرهای مسئله (اجزای دنباله)
  - یال‌ها: رابطه‌ی بین مقادیر (معمولاً رابطه‌ی پدر ـ فرزندی)
  - مسیر: هر مسیر در گراف، یک دنباله را مشخص می‌کند.
  - راه حل: مسیری در گراف با شروع از گره‌ی آغازین به گره‌ی نهایی

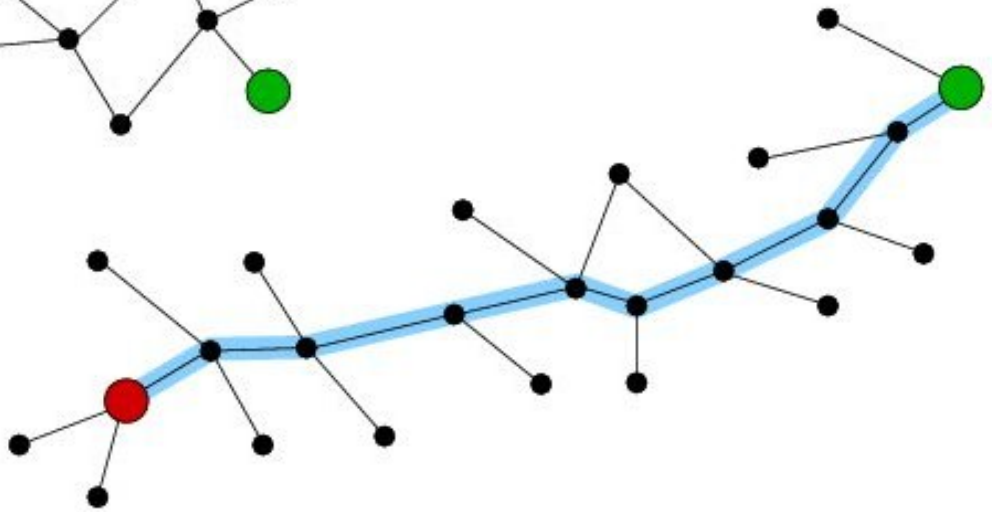
گراف فضای حالت و راه حل

گراف فضای حالت:



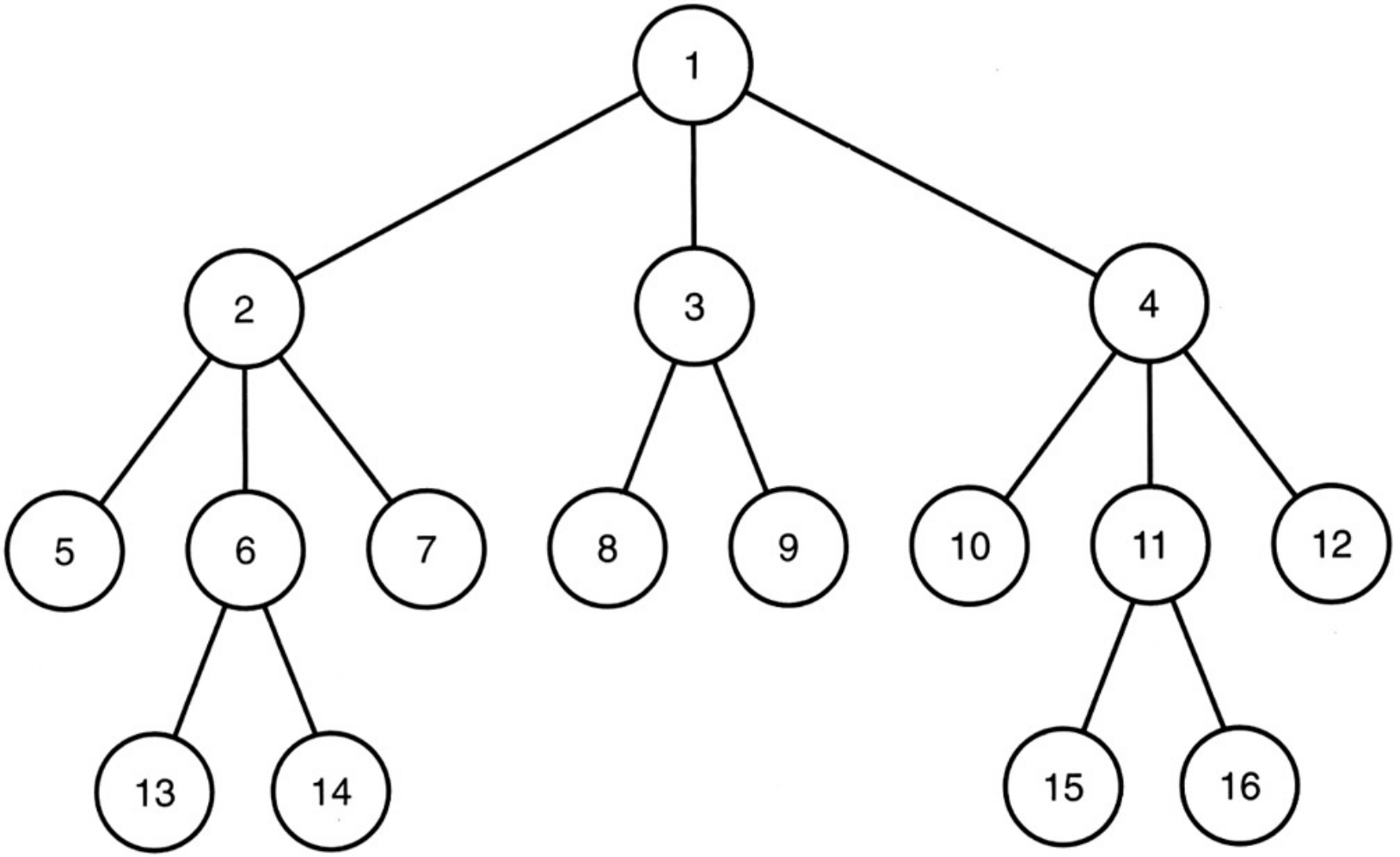
راه حل:

مسیری از حالت آغازین به حالت نهایی



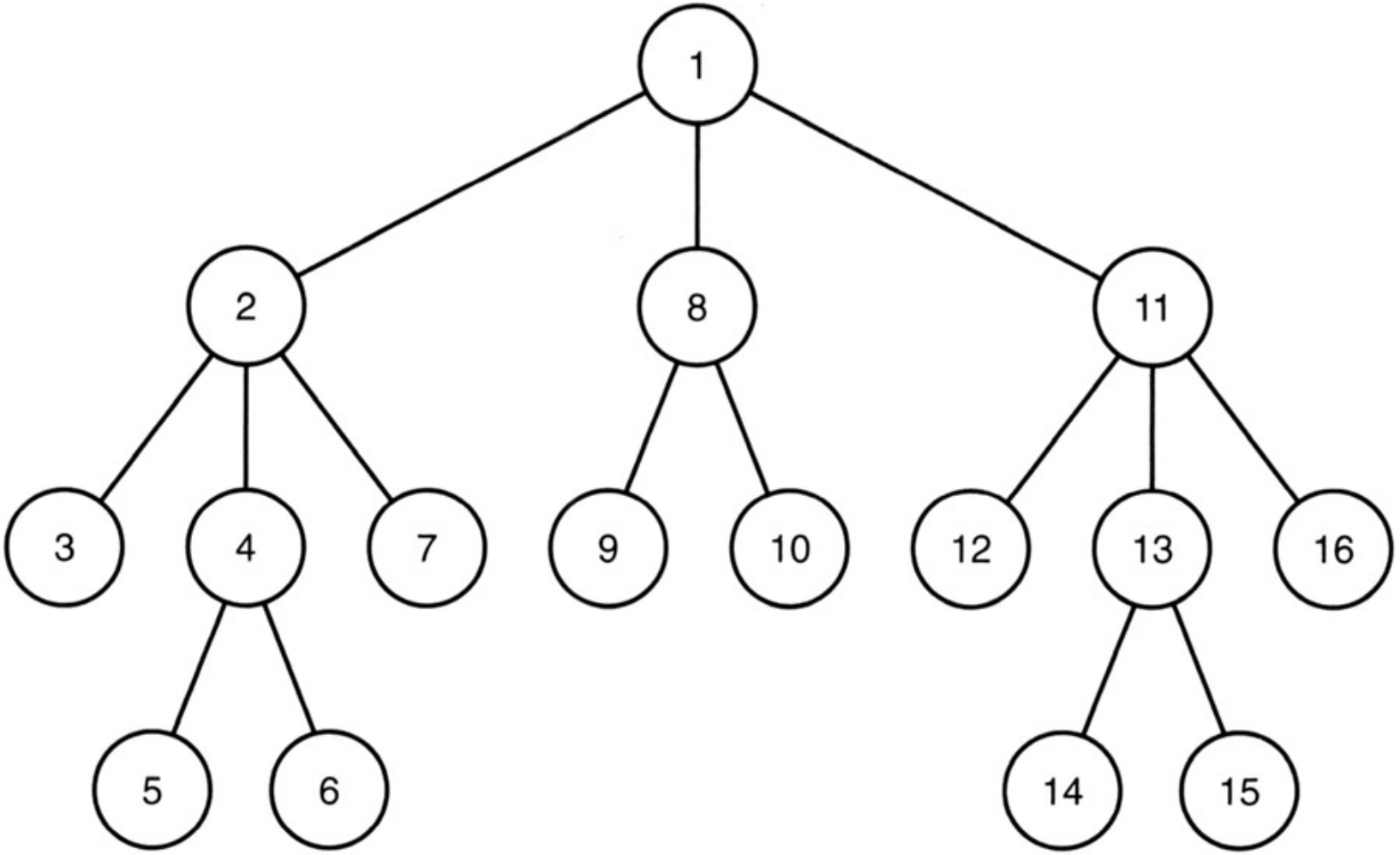
جستجو در فضای حالت با پیمایش عرض ـ اول

BREADTH-FIRST SEARCH



جستجو در فضای حالت با پیمایش عمق ـ اول

DEPTH-FIRST SEARCH



BACKTRACKING SEARCH

جستجوی عقب‌گرد

یکی از تکنیک‌های جستجوی فضای حالت است.

- در این روش، گراف فضای حالت به صورت **عمق اول** پیمایش می‌شود.
- هر گاه به گره‌ای برسیم که امکان رسیدن به جواب از آن وجود ندارد، فرزندان آن گره دیگر بررسی نمی‌شوند.

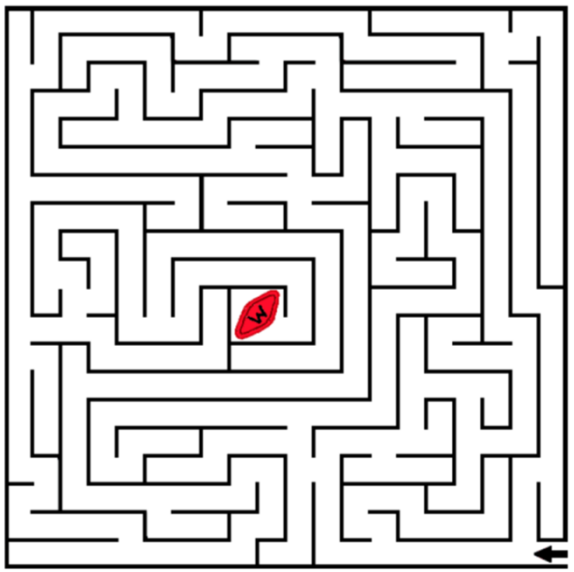
مسئله‌ی مسیر تودرتو

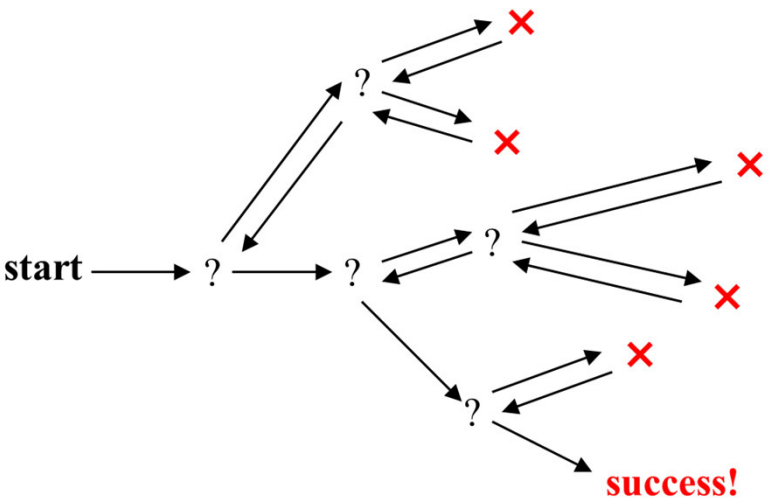
BACKTRACKING SEARCH: MAZE PROBLEM

جستجوی عقب‌گرد

مانند حرکت در یک مسیر تودرتو است

هرگاه از یک مسیر به جواب نرسیدیم، برمی‌گردیم و مسیر دیگری را آزمایش می‌کنیم.
تا جایی بر می‌گردیم که یک گزینه‌ی دیگر برای ادامه بیابیم.





تکنیک عقب‌گرد

شبه‌کد

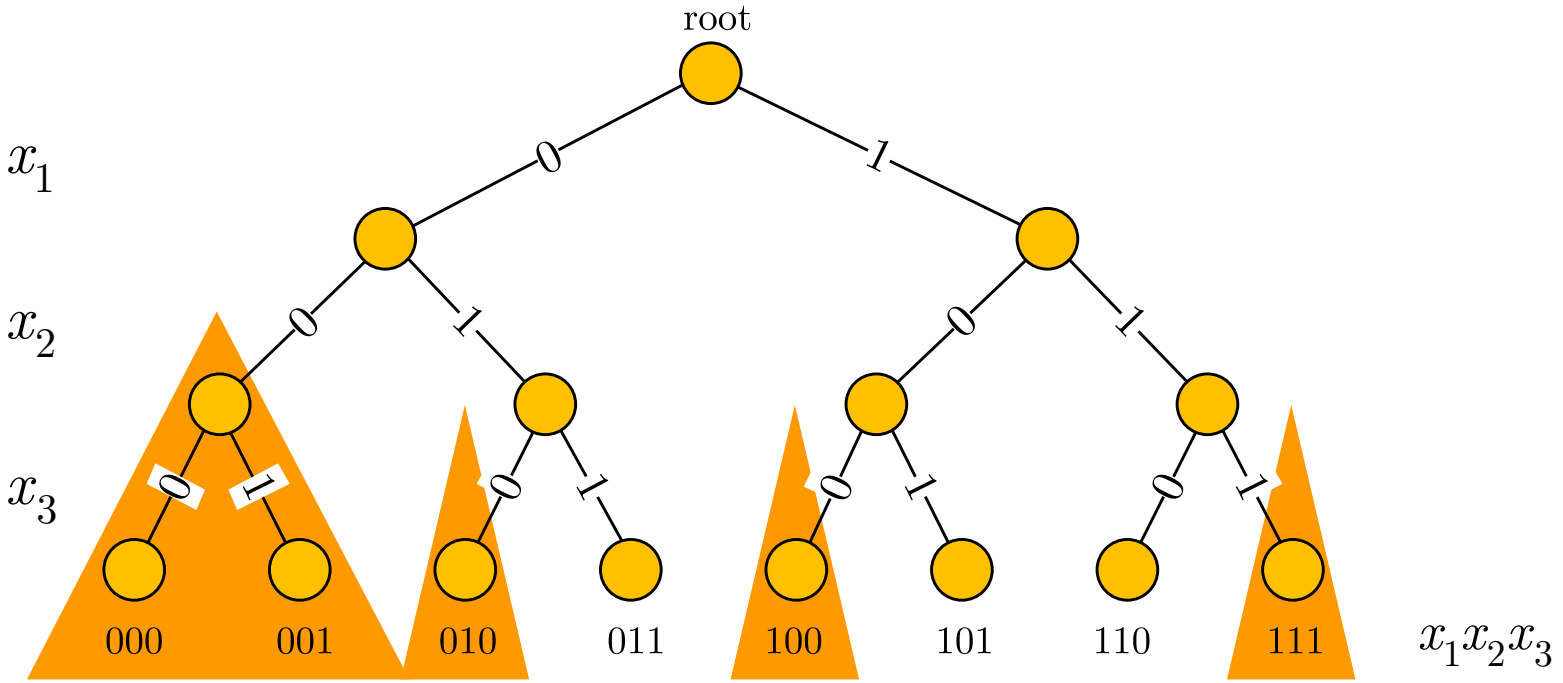
```
BACKTRACKING-SEARCH(v)
    foreach child u of v
        if promising(u) then
            if solution(u) then
                return u
            else
                BACKTRACKING-SEARCH(u)
```

الگوریتم از گره‌ی ریشه شروع می‌شود: $v = \text{root}$

مثال: مسئله‌ی قفل رمزی

یک قفل رمزی شامل n بیت است. می‌خواهیم رمز مربوطه را پیدا کنیم.

مثلاً: $n = 3$ و می‌دانیم که این رمز شامل دو بیت 1 است.



زیردرخت‌های مشخص شده مربوط به فرزندانی هستند که جواب نمی‌رسند، پس بررسی نمی‌شوند!

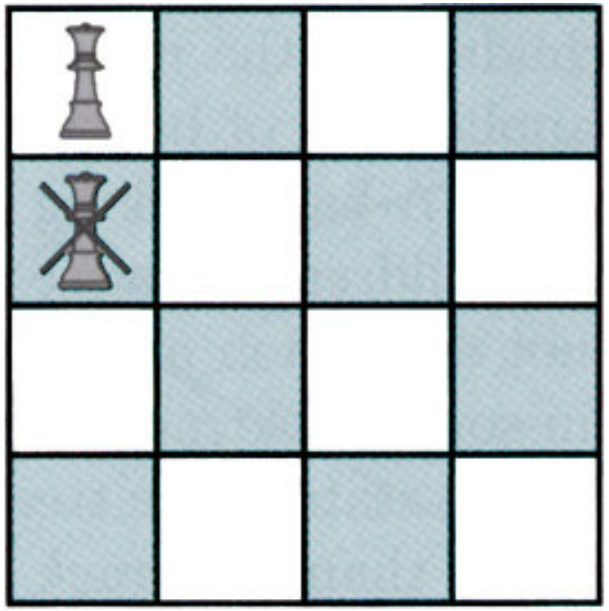
Non-promising = گره‌های غیرامیدبخش

مثال: مسئله‌ی n ـ وزیر

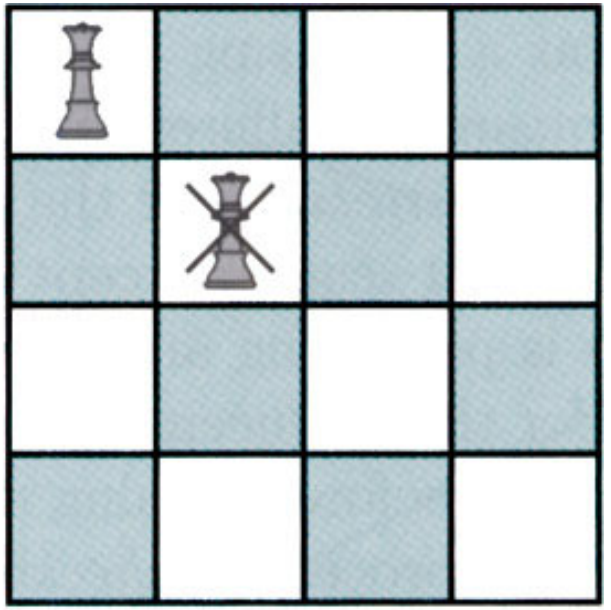
N-QUEENS PROBLEM

می‌خواهیم n وزیر را در یک صفحه‌ی شطرنج $n \times n$ قرار دهیم،
به طوری که هیچ دو وزیری یکدیگر را تهدید نکنند.

مطابق قوانین شطرنج: **هیچ دو وزیری نباید هم سطر، هم ستون یا هم‌قطر باشند.**



(a)



(b)

مثال: مسئله‌ی n ـ وزیر

N-QUEENS PROBLEM

می‌خواهیم n وزیر را در یک صفحه‌ی شطرنج $n \times n$ قرار دهیم،
به طوری که هیچ دو وزیری یکدیگر را تهدید نکنند.

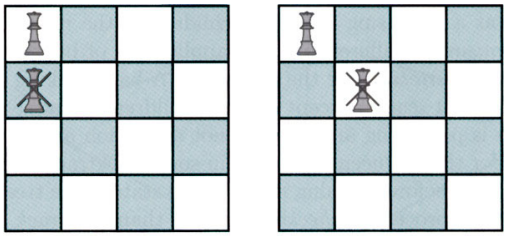
مطابق قوانین شطرنج: **هیچ دو وزیری نباید هم سطر، هم ستون یا هم‌قطر باشند.**

- هر وزیر باید در یک سطر مجزا باشد.
  - پس هر وزیر را به یک سطر نسبت می‌دهیم (شماره‌ی وزیر = شماره‌ی سطر).
- وزیر i و وزیر j نباید در یک ستون باشند:

$$col[i] \neq col[j]$$

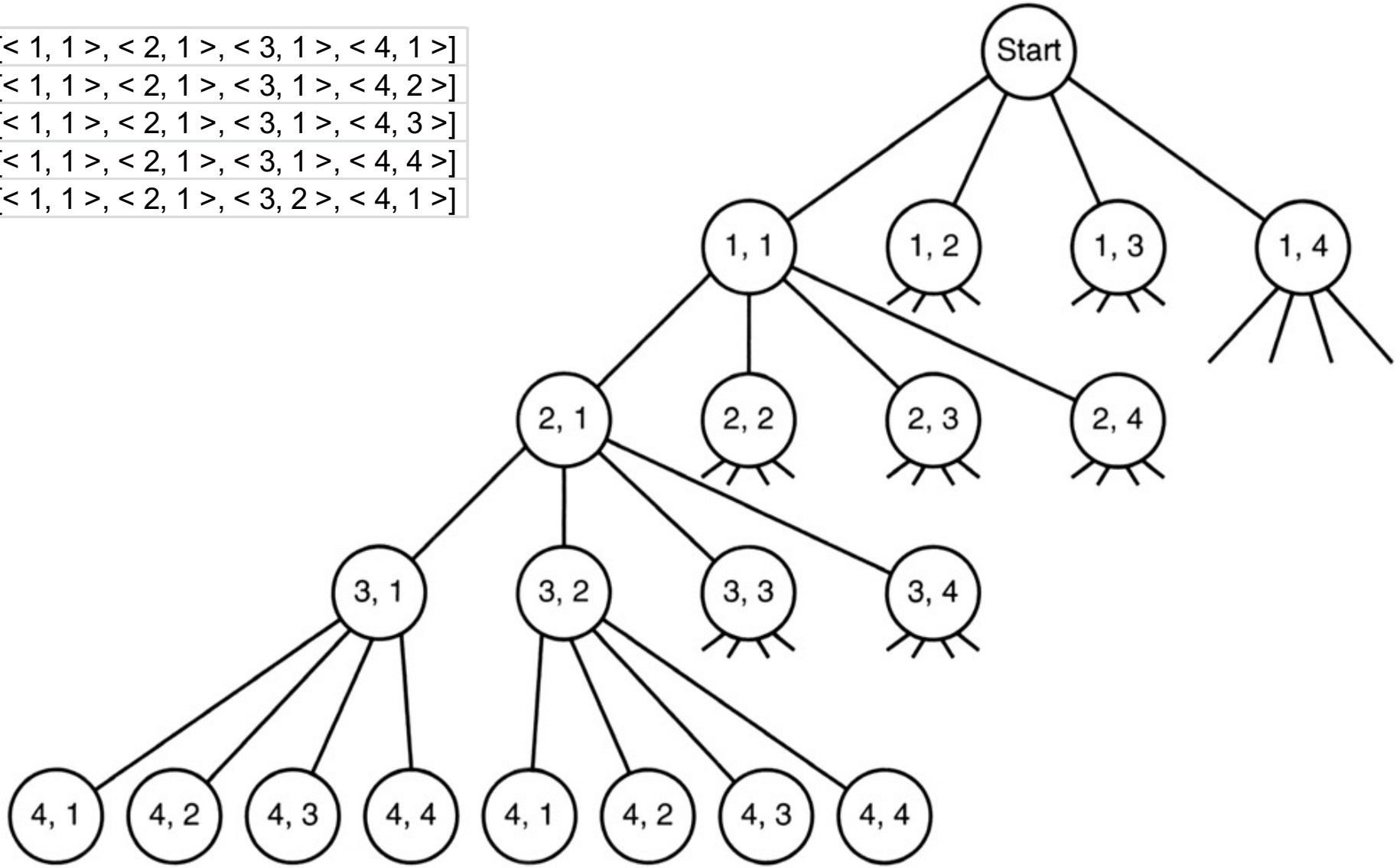
- وزیر i و وزیر j نباید در یک قطر باشند:

$$|col[i] - col[j]| \neq |i - j|$$

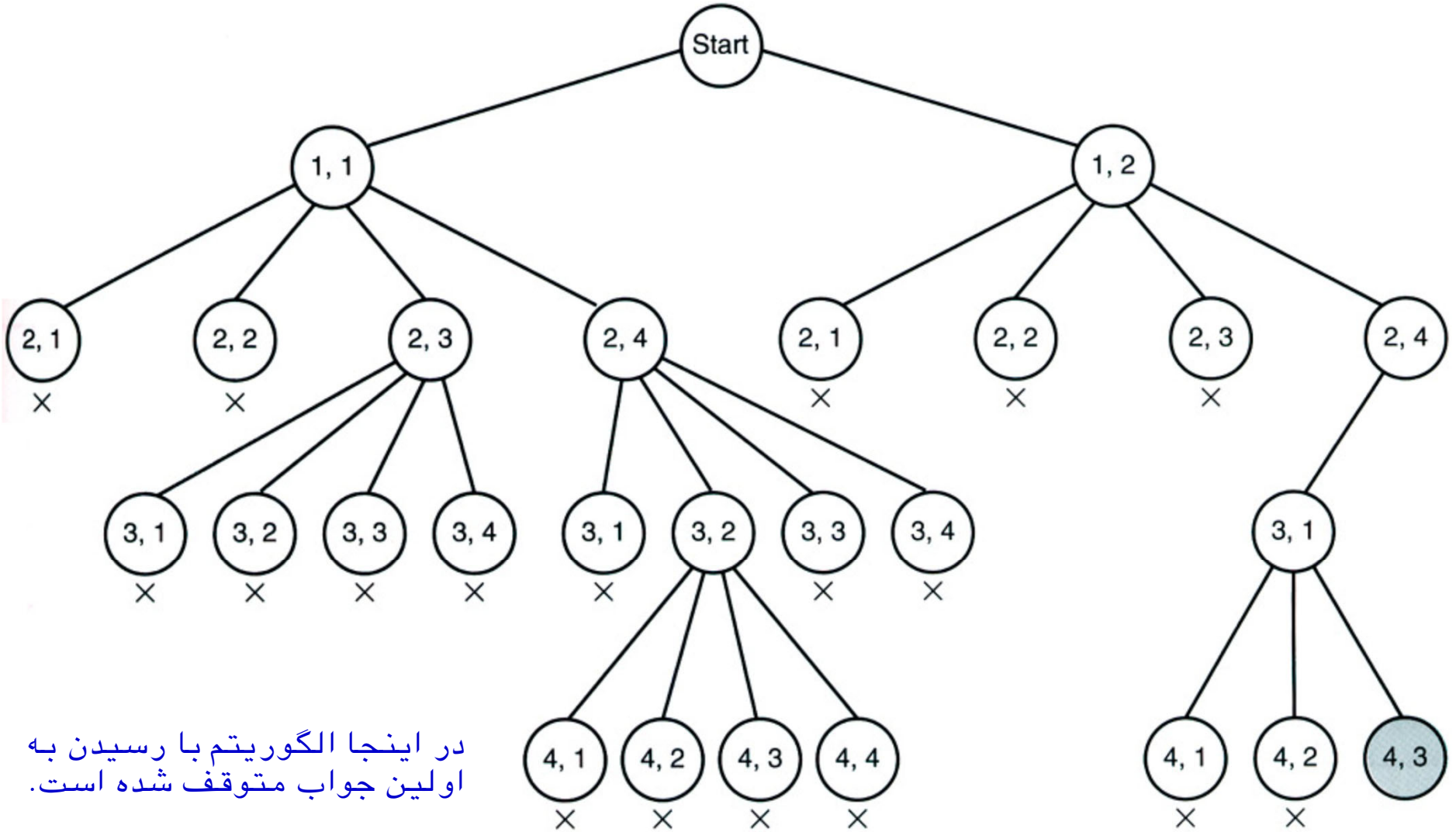

(a) (b)

درخت جستجو: مسئله‌ی ۴-وزیر

[< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 1 >, < 4, 1 >]
[< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 1 >, < 4, 2 >]
[< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 1 >, < 4, 3 >]
[< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 1 >, < 4, 4 >]
[< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 2 >, < 4, 1 >]

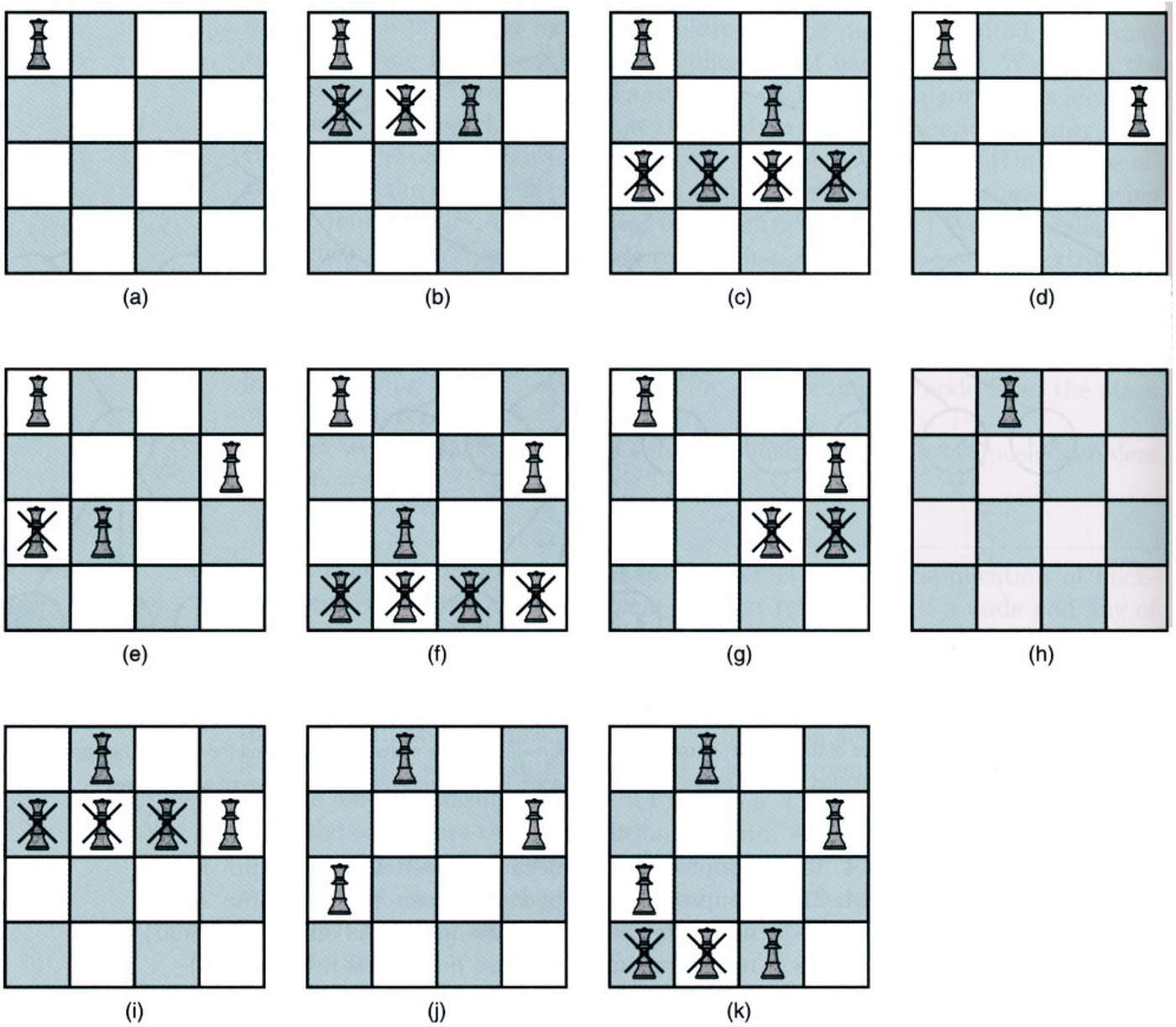


درخت جستجوی هرس شده: مسئله‌ی ۴ـ وزیر

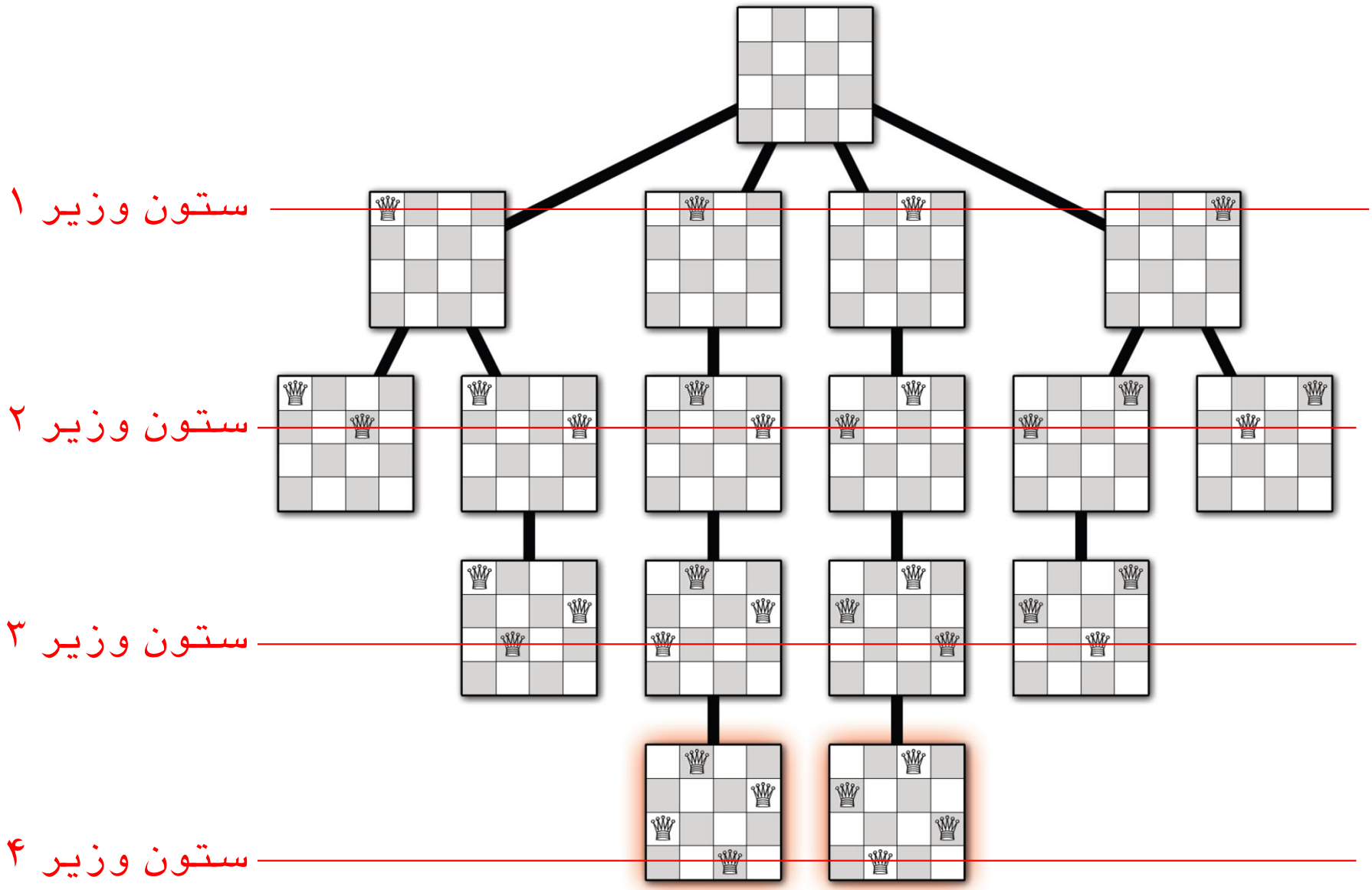


در اینجا الگوریتم با رسیدن به اولین جواب متوقف شده است.

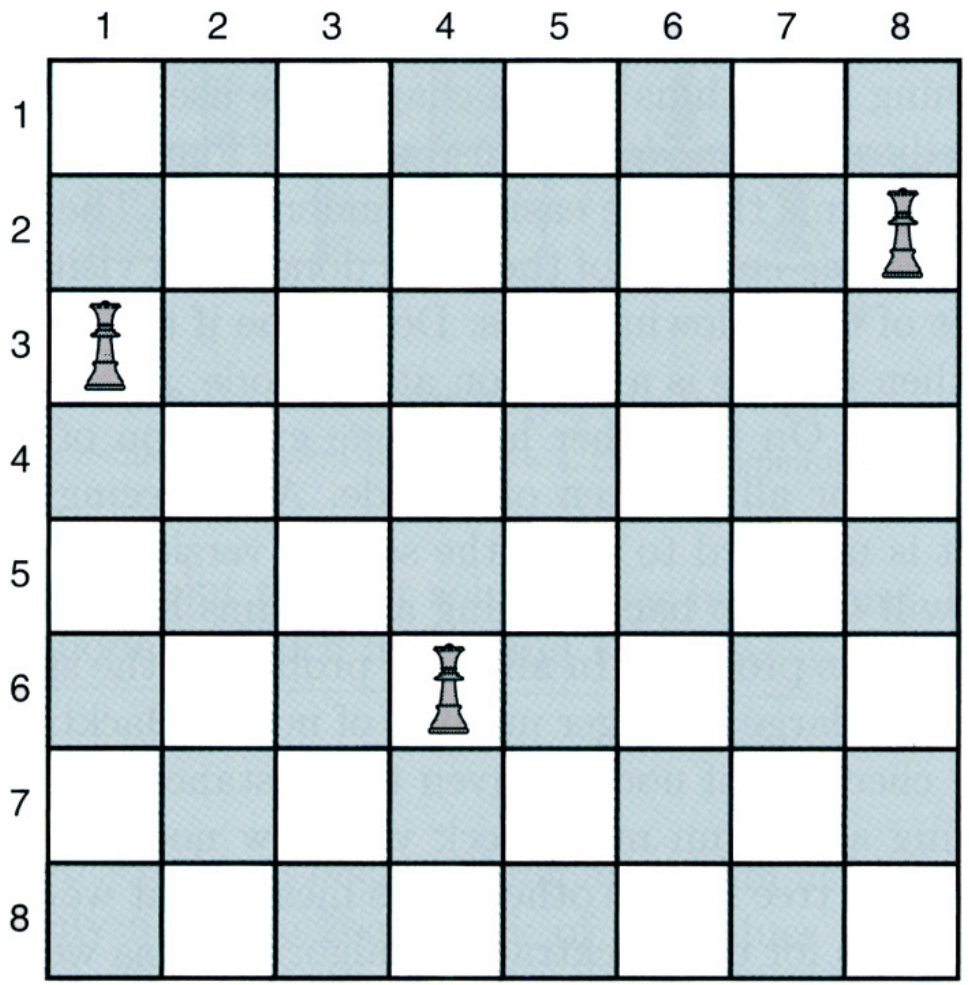
مراحل رسیدن به جواب در مسئله‌ی ۴-وزیر



درخت جستجوی هرس شده: مسئله‌ی ۴ـ وزیر



مسئله‌ی ۸ـ وزیر



مسئله‌ی n ـ وزیر: زمان اجرا

N-QUEENS PROBLEM

زمان اجرا برابر است با تعداد گره‌های بررسی شده در درخت جستجو

1

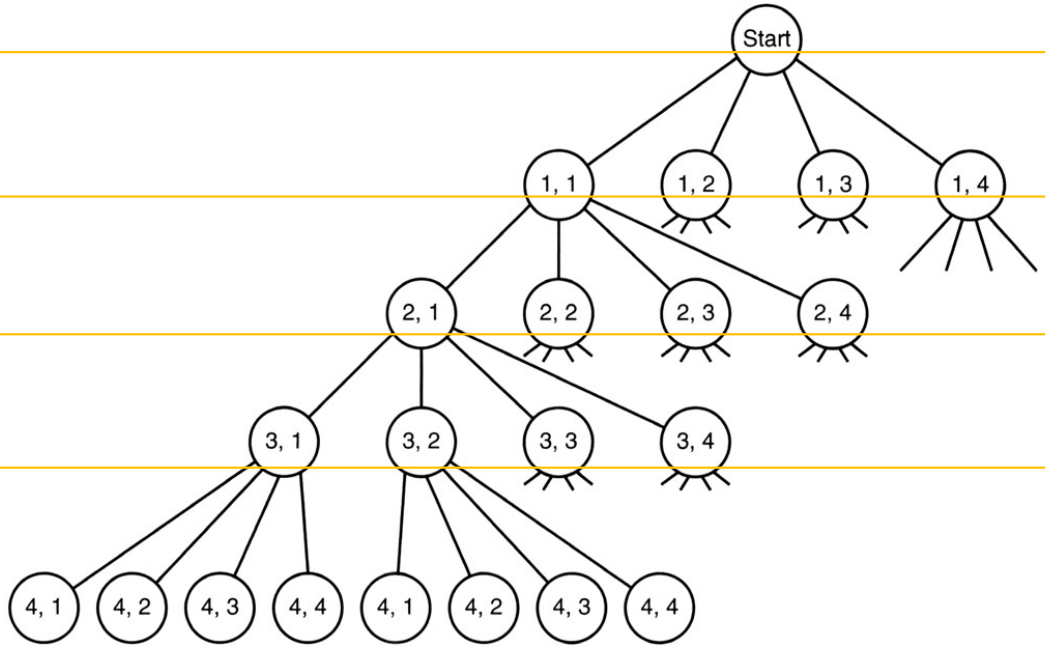
n

n^2

n^3

$\vdots$

n^n



تعداد کل:

$$T(n) \leq 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \in O(n^{n+1})$$

مسئله‌ی n ـ وزیر: زمان اجرا

N-QUEENS PROBLEM

زمان اجرا برابر است با تعداد گره‌های بررسی شده در درخت جستجو

1

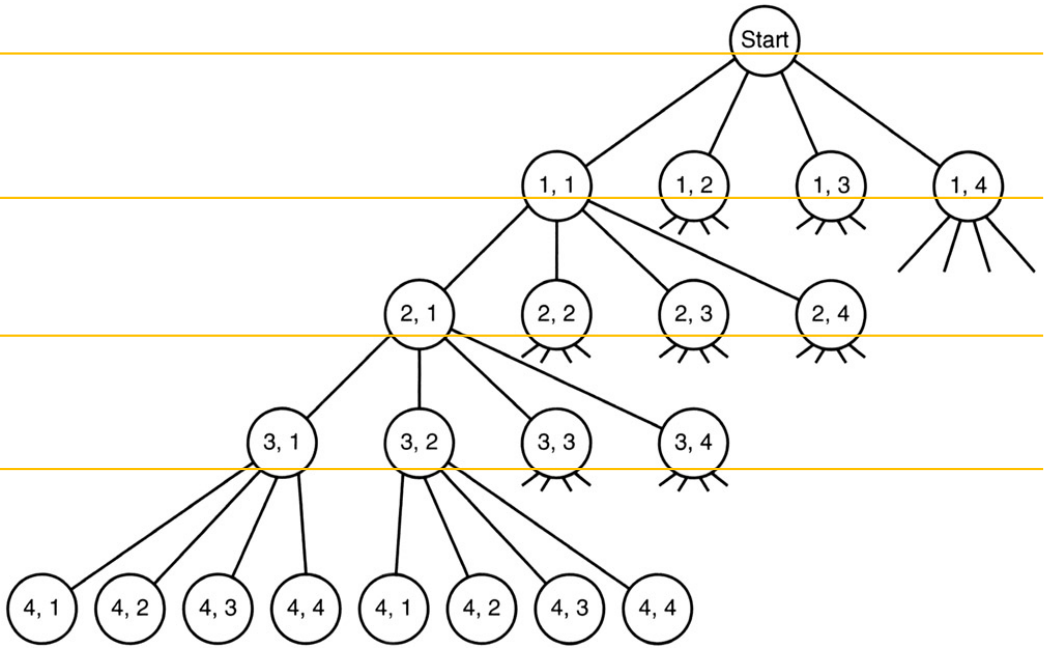
n

$n(n-1)$

$n(n-1)(n-2)$

$\vdots$

$n!$



تعداد کل (با فرض اینکه هیچ دو وزیری در یک ستون قرار ندارند):

$$T(n) \leq 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n! \in O(n!)$$

مسئله‌ی حاصل‌جمع زیرمجموعه‌ها

SUBSET SUM PROBLEM

مجموعه‌ی S با n عضو از اعداد صحیح و عدد صحیح W داده شده است.
می‌خواهیم همه‌ی زیرمجموعه‌های S را بیابیم (A) که حاصل‌جمع عناصر آنها W است.

$$A \subseteq S$$
$$\sum_{a \in A} a = W$$

مثال:

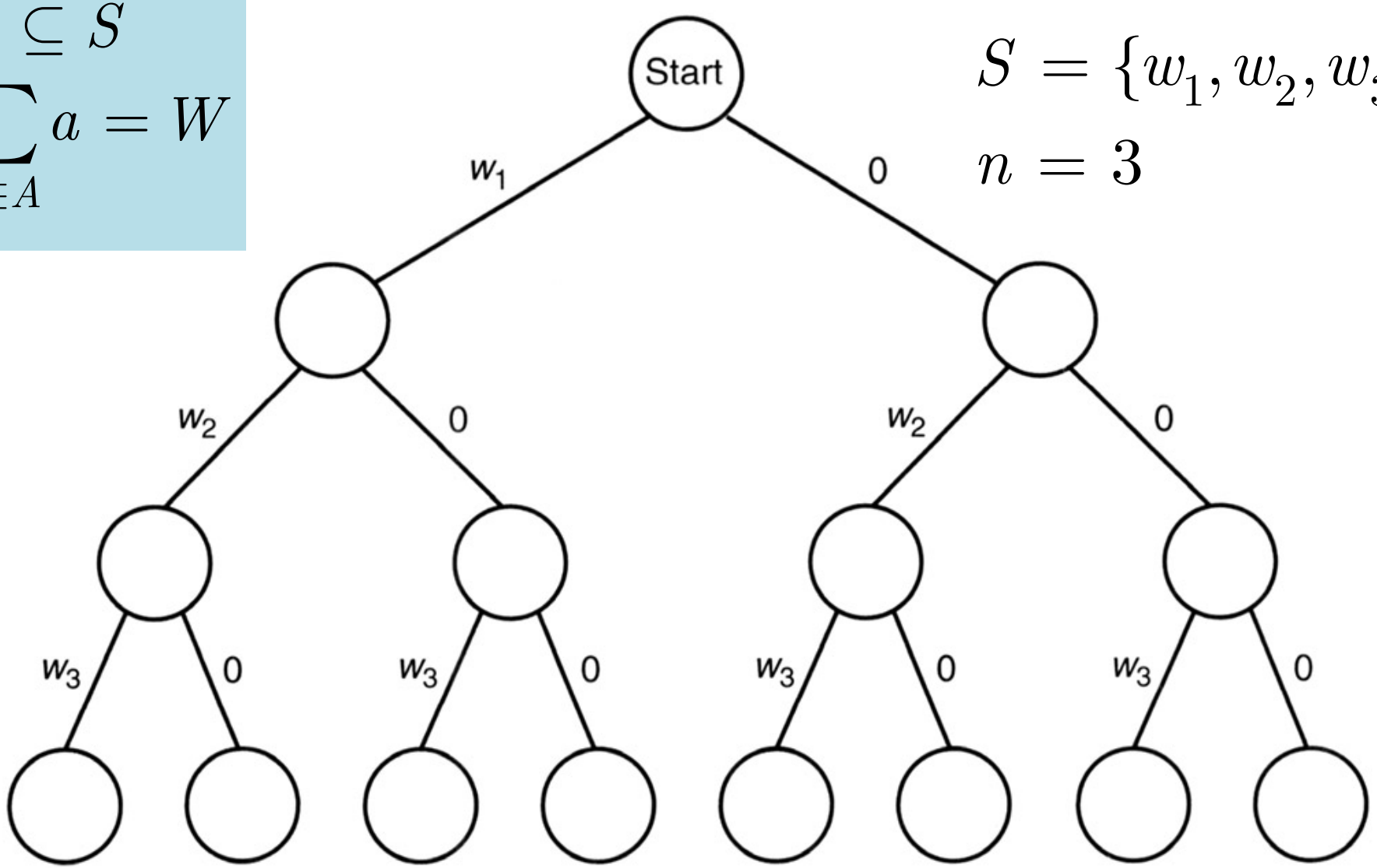
$$W = 6$$
$$S = \{w_1, w_2, w_3\} \quad , w_1 = 2, w_2 = 4, w_3 = 5$$
$$n = 3$$

$$A = \{w_1, w_2\}$$

مسئله‌ی حاصل‌جمع زیرمجموعه‌ها: مثال

$$A \subseteq S$$
$$\sum_{a \in A} a = W$$

$$S = \{w_1, w_2, w_3\}$$
$$n = 3$$



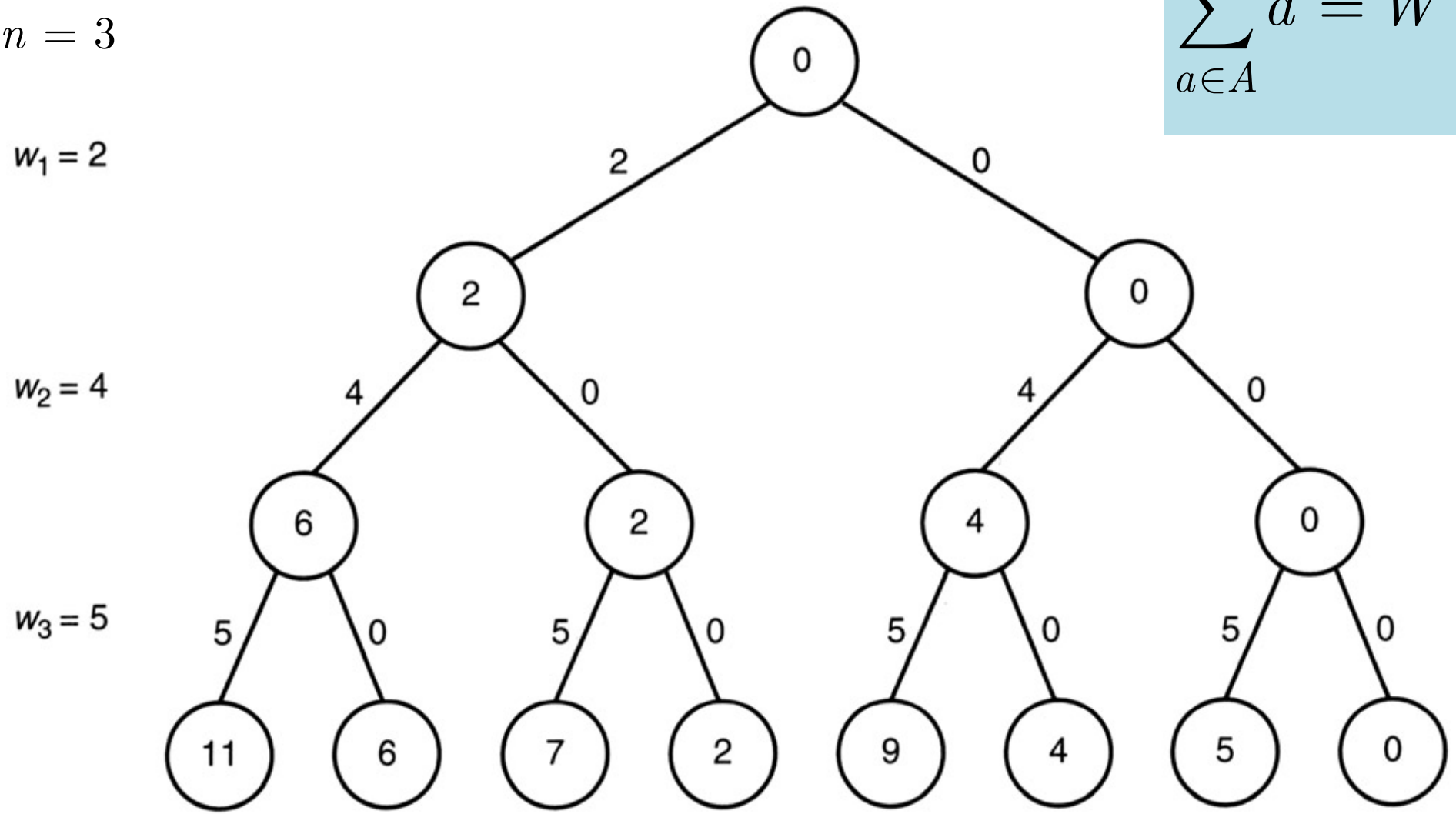
مسئله‌ی حاصل‌جمع زیرمجموعه‌ها: مثال

$W = 6$

$S = \{w_1, w_2, w_3\} \quad , w_1 = 2, w_2 = 4, w_3 = 5$

$n = 3$

$$A \subseteq S$$
$$\sum_{a \in A} a = W$$

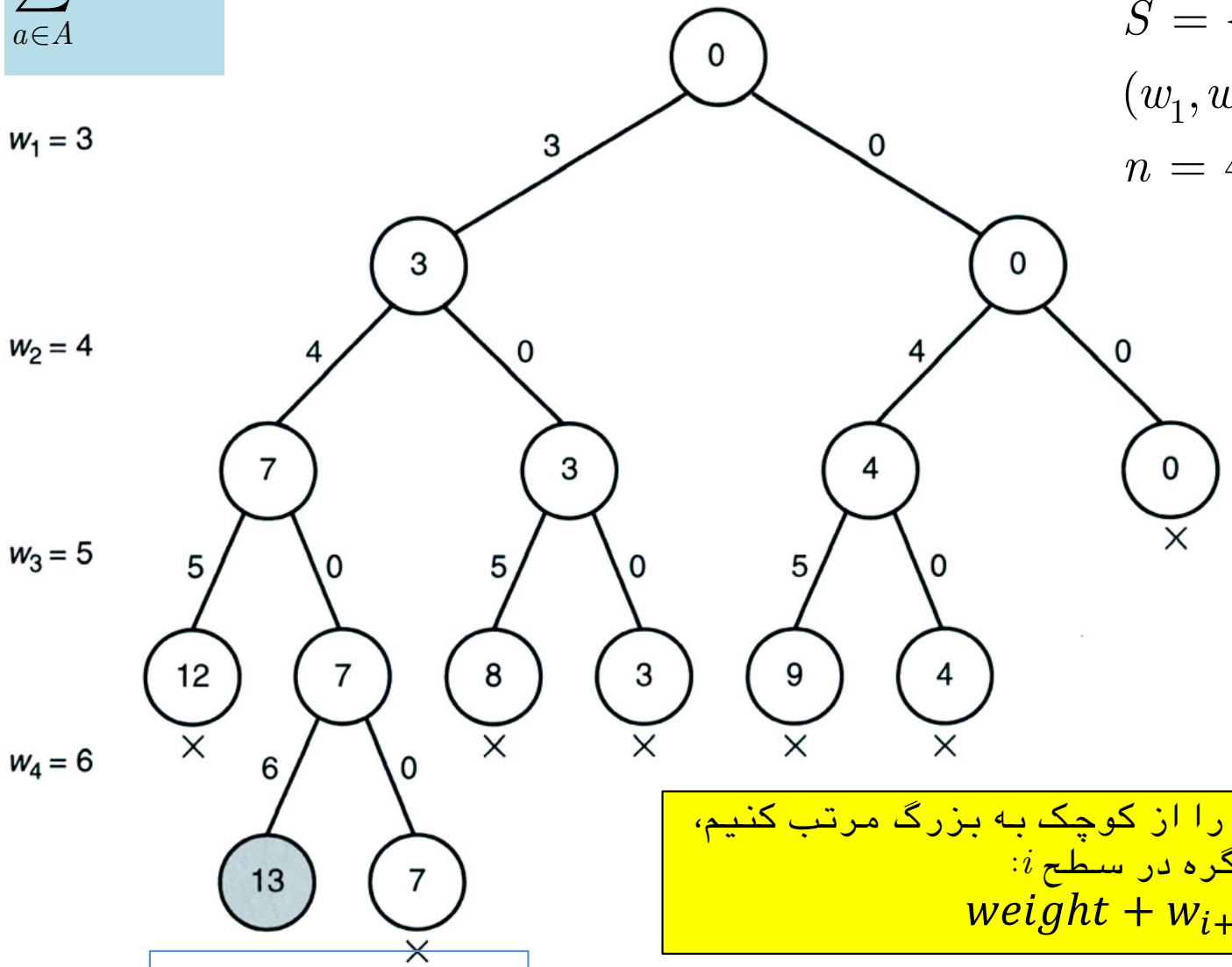


$$A = \{w_1, w_2\}$$

مسئله‌ی حاصل‌جمع زیرمجموعه‌ها: مثال

$$A \subseteq S$$
$$\sum_{a \in A} a = W$$

$$W = 13$$
$$S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (3, 4, 5, 6)$$
$$n = 4$$



$$A = \{w_1, w_2, w_4\}$$

اگر قبل از جستجو وزن‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم،
شرط امیدبخش بودن یک گره در سطح i:

$$weight + w_{i+1} \leq W$$

مسئله‌ی حاصل‌جمع زیرمجموعه‌ها: زمان اجرا

زمان اجرا برابر است با تعداد گره‌های بررسی شده در درخت جستجو

1

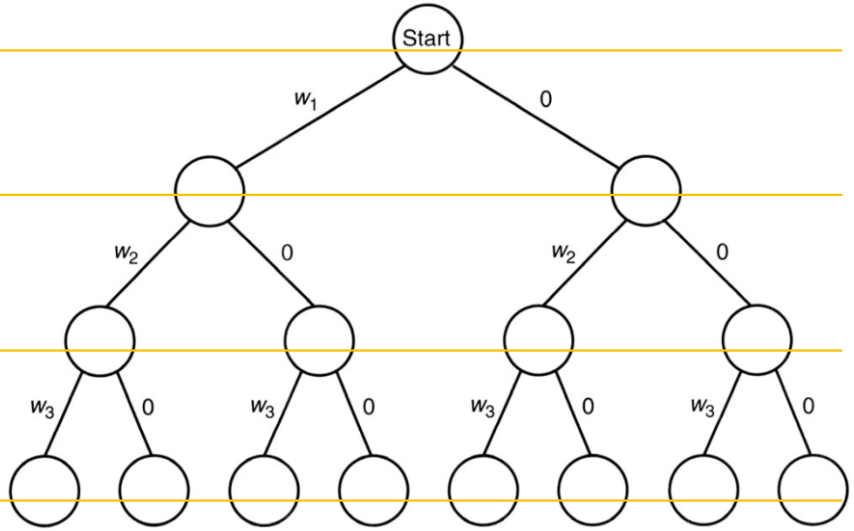
2

2^2

2^3

$\vdots$

2^n



تعداد کل:

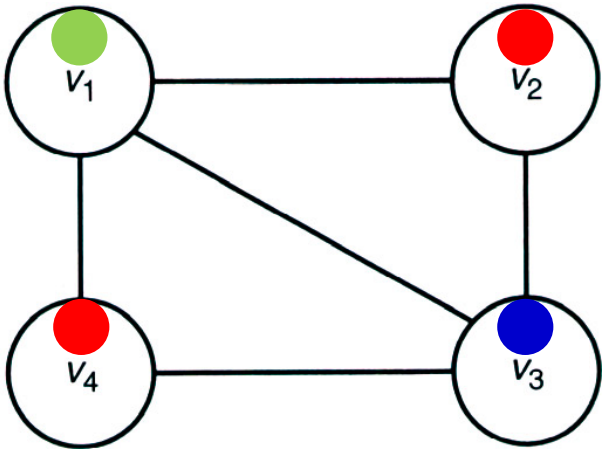
$$T(n) \leq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \in O(2^{n+1})$$

مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف

GRAPH M-COLORING

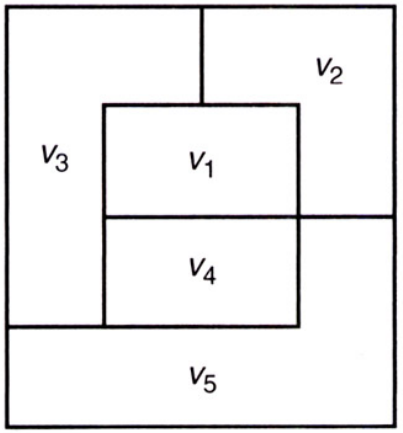
یک گراف با n رأس داریم.
می‌خواهیم آن را با حداکثر m رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم؛
به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

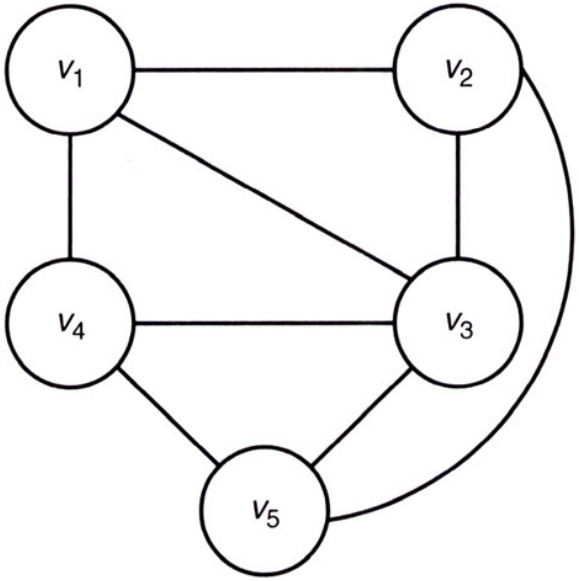
Vertex	*Color*
v_1	color 1
v_2	color 2
v_3	color 3
v_4	color 2



هدف یافتن همه‌ی رنگ‌آمیزی‌های ممکن است.

رنگ‌آمیزی نقشه با رنگ‌آمیزی گراف مسطح متناظر با آن





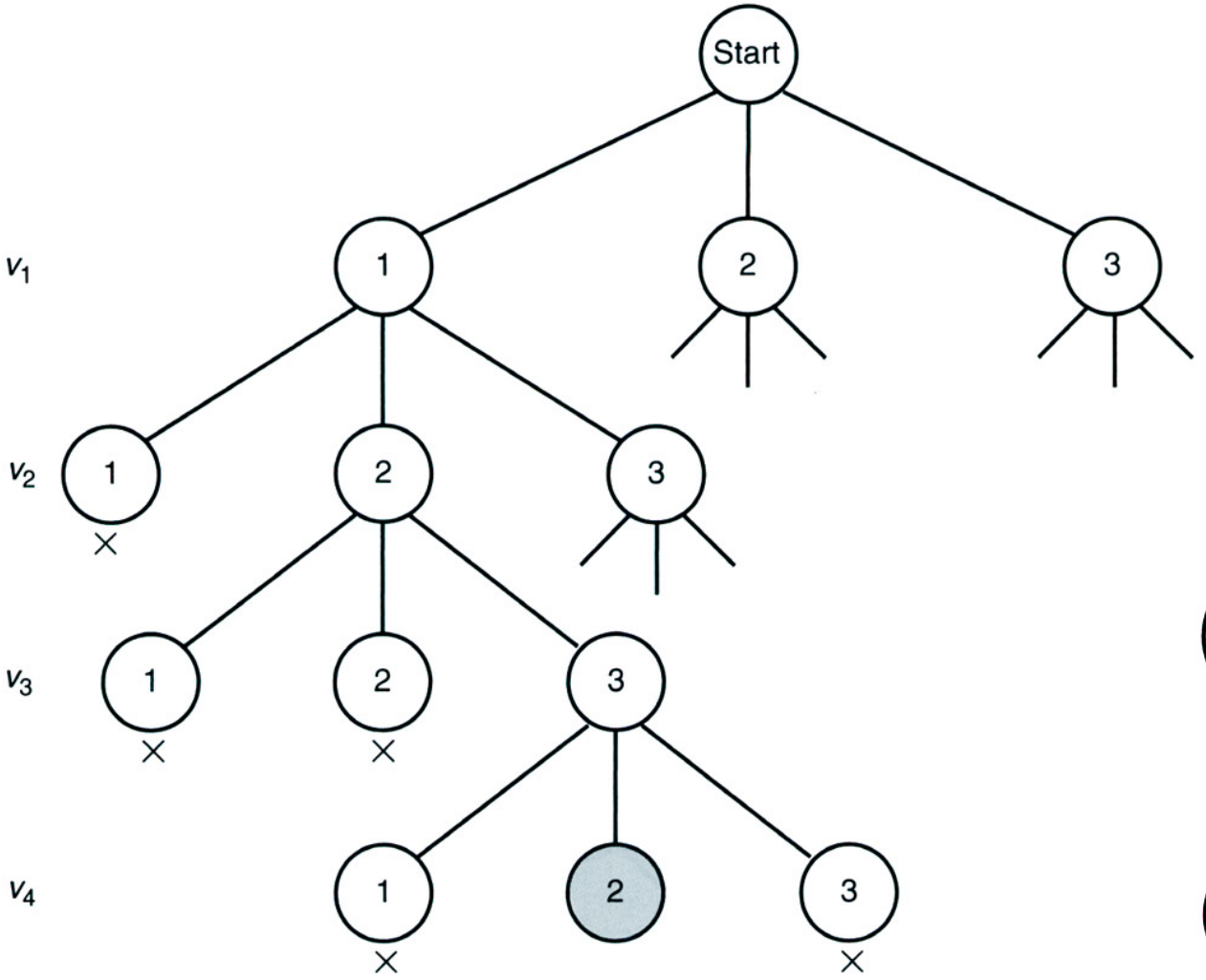
یکی از کاربردهای رنگ‌آمیزی گراف:

رنگ‌آمیزی یک نقشه به طوری که نواحی مجاور، همرنگ نباشند.

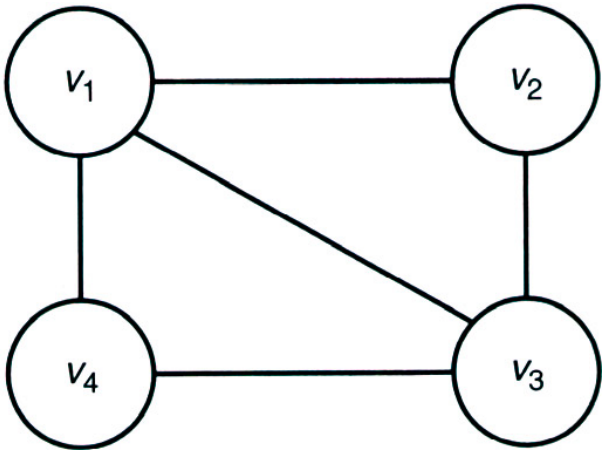
مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف

مثال

در هر سطح، یکی از رئوس را رنگ‌آمیزی می‌کنیم:



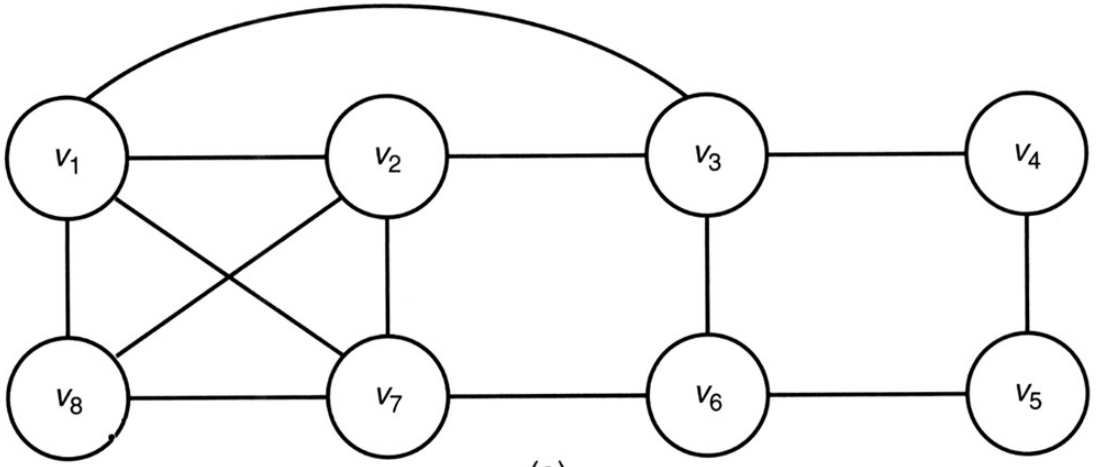
$$m = 3$$



مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف

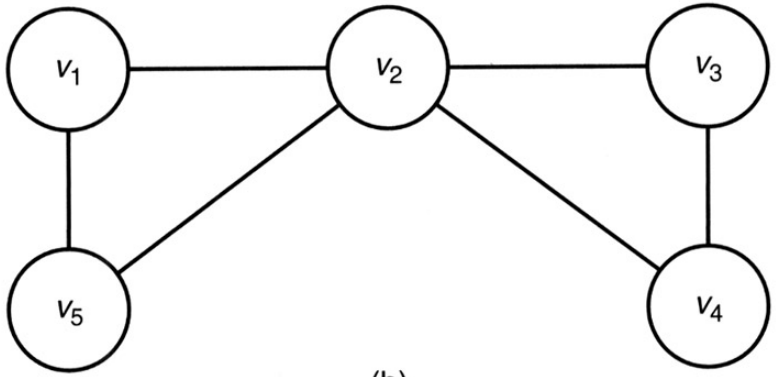
مثال

گراف زیر را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید:



(a)

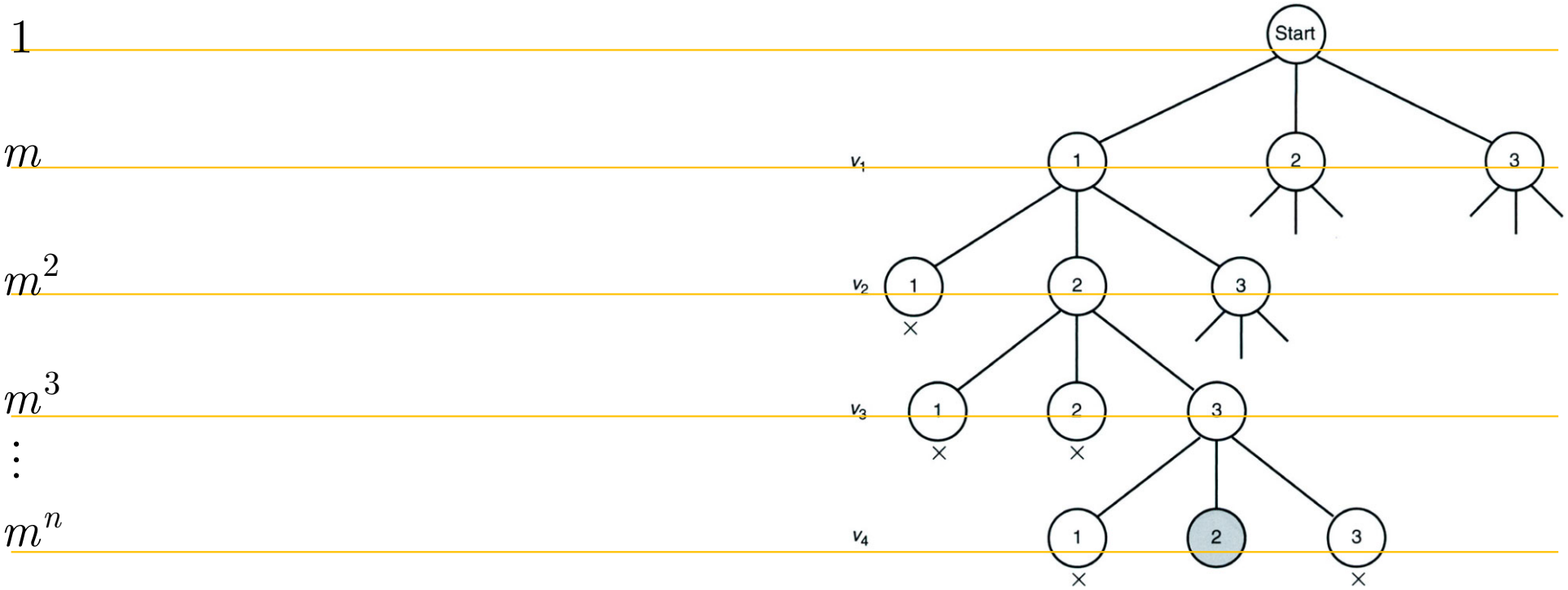
گراف زیر را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید:



(b)

مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف: زمان اجرا

زمان اجرا برابر است با تعداد گره‌های بررسی شده در درخت جستجو



تعداد کل: $T(n,m) \leq 1 + m + m^2 + m^3 + \cdots + m^n \in O(m^{n+1})$

مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1

0/1- KNAPSACK

قطعه	وزن	ارزش
i	w_i	p_i
1	2	40$
2	5	30$
3	10	50$
4	5	10$

n قطعه با وزن‌ها و ارزش‌های مختلف داریم.
یک کوله‌پشتی با ظرفیت W موجود است.
می‌خواهیم قطعه‌هایی را انتخاب کنیم که

- کوله‌پشتی تا حد امکان پر شود، و
- مجموع ارزش کل ظرف ماکزیمم شود.

راه حل با استفاده از تغییریافته‌ی الگوریتم عقب‌گرد:
یک متغیر مانند best بهترین مقدار تابع هزینه تا آن گره را در خود نگه می‌دارد.

مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1

روش عقب‌گرد:
قطعات را به ترتیب نزولی نسبت ارزش به وزن در هر مرحله در نظر می‌گیریم.
در هر سطح درخت، یک قطعه را بررسی می‌کنیم.
به روش حریصانه، قطعات را برمی‌داریم:
- ارزش آن را به $profit$ می‌افزاییم (منفعت کل)
- وزن آن را به $totalweight$ می‌افزاییم (وزن کل)

تا به قطعه‌ای برسیم که اگر آن را برداریم، $totalweight > W$ شود.

$$weight = \sum_{j=1}^{i} w_j \qquad profit = \sum_{j=1}^{i} p_j$$

اگر گره در سطح i ام باشد و
گره‌ای که باعث تجاوز حاصلجمع وزن‌ها از W می‌شود در سطح k باشد،

$$total\,weight = weight + \sum_{j=i+1}^{k-1} w_j$$

bound = کران منفعت

$$bound = profit + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j + (W - total\,weight) \times \frac{p_k}{w_k}$$

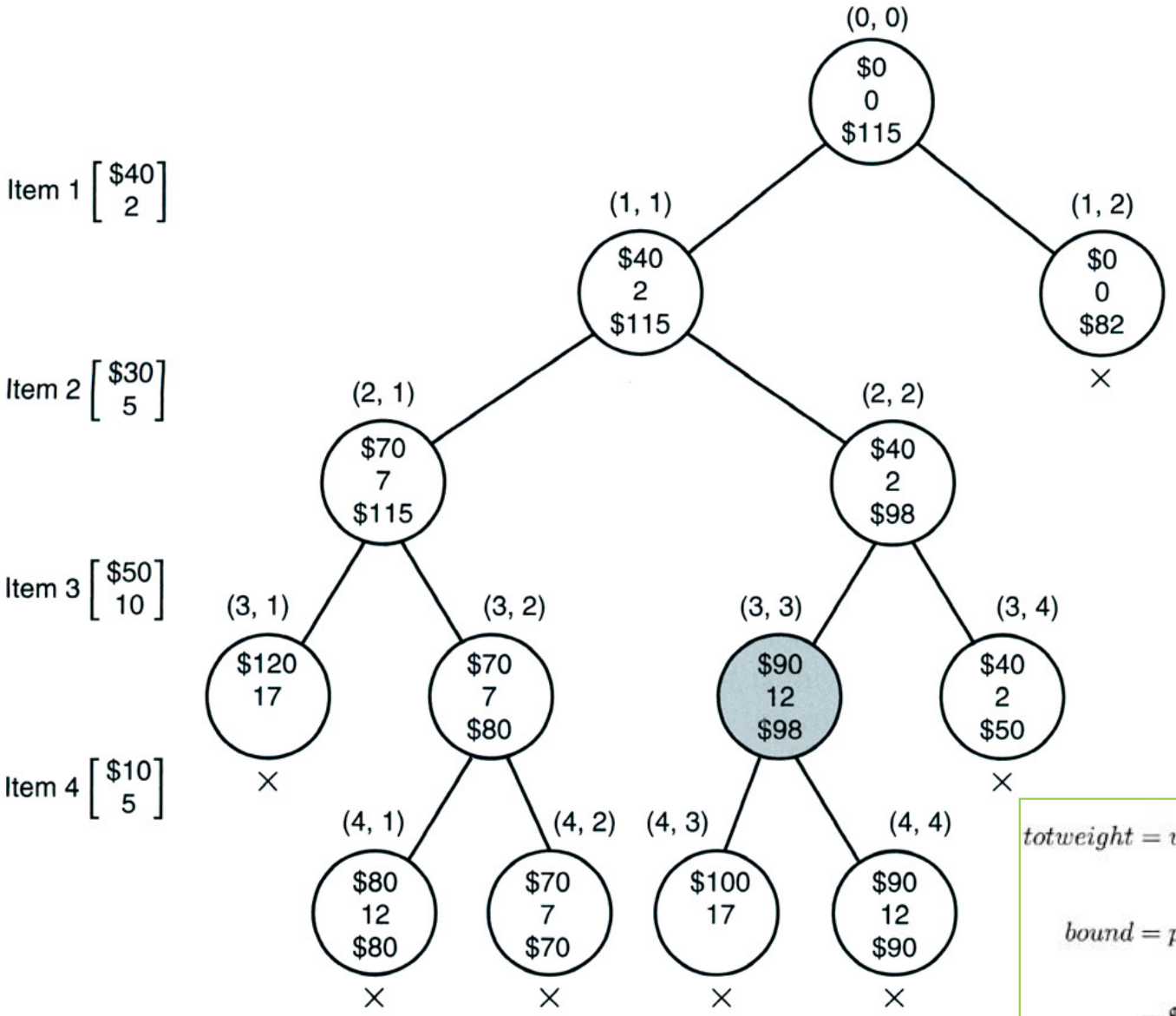
بهره‌ی حاصل از k-1 قطعه‌ی نخست + ظرفیت موجود برای قطعه‌ی kام × ارزش واحد وزن برای قطعه‌ی kام

اگر در یک گره مقدار $bound$ از بیشترین منفعت تا آن گره کمتر بود، آن گره امیدبخش نیست.

مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1

قطعه	وزن	ارزش	نسبت
i	w_i	p_i	p_i / w_i
1	2	40$	20$
2	5	30$	6$
3	10	50$	5$
4	5	10$	2$

$$W = 16, \quad n = 4$$



منفعت کل
وزن کل
کران منفعت

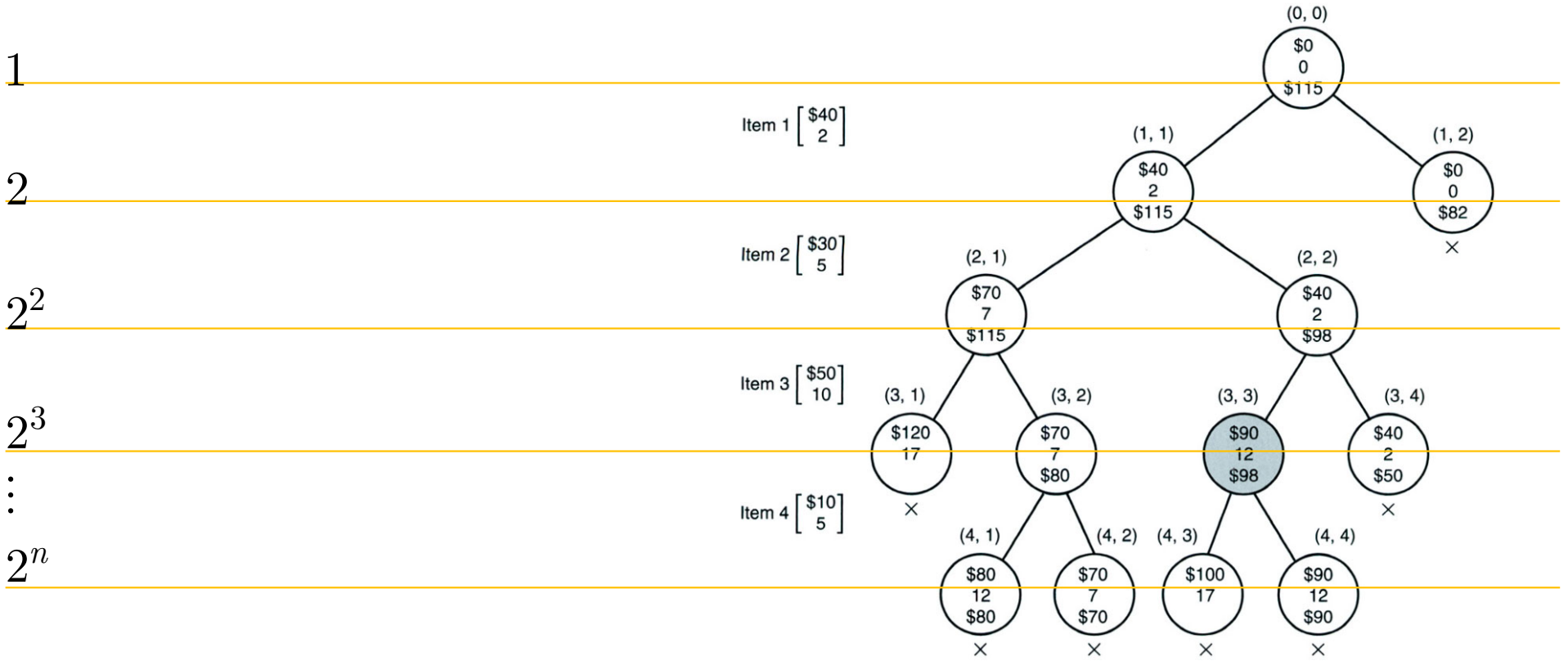
$$totweight = weight + \sum_{j=1+1}^{3-1} w_j = 2 + 5 = 7$$

$$bound = profit + \sum_{j=1+1}^{3-1} p_j + (W - totweight) \times \frac{p_3}{w_3}$$

$$= \$40 + \$30 + (16 - 7) \times \frac{\$50}{10} = \$115.$$

مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1: زمان اجرا

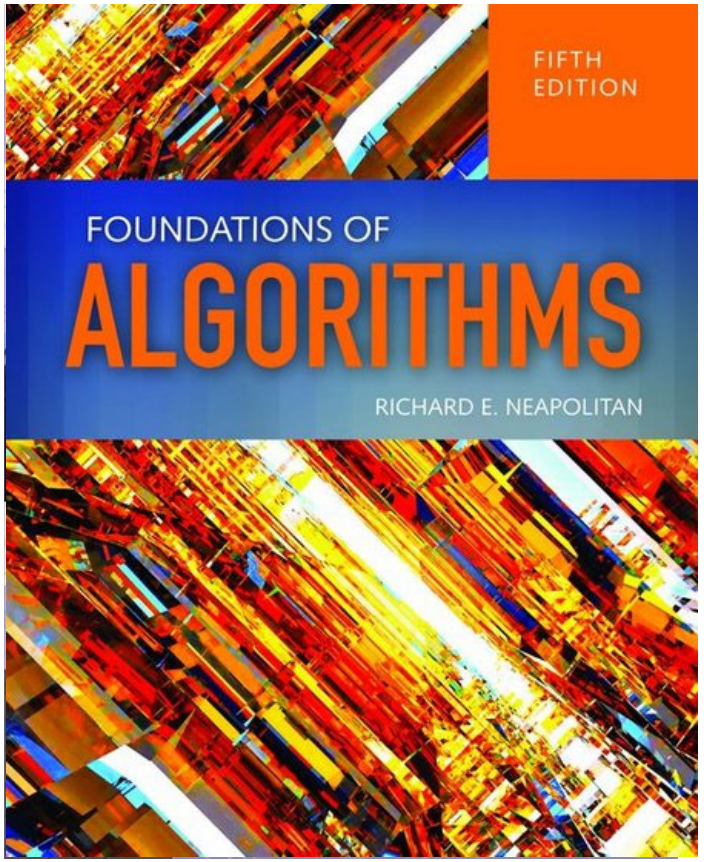
زمان اجرا برابر است با تعداد گره‌های بررسی شده در درخت جستجو



تعداد کل:

$$T(n) \leq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \in O(2^{n+1})$$

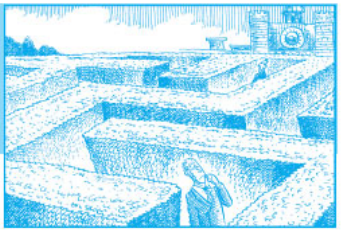
مرجع



R.E. Neapolitan,
Foundations of Algorithms,
5th Edition, Jones and Bartlett Publishers, 2015.

Chapter 5

Chapter 5



Backtracking

If you were trying to find your way through the well-known maze of hedges by Hampton Court Palace in England, you would have no choice but to follow a hopeless path until you reached a dead end. When that happened, you'd go back to a fork and pursue another path. Anyone who has ever tried solving a maze puzzle has experienced the frustration of hitting dead ends. Think how much easier it would be if there were a sign, positioned a short way down a path, that told you that the path led to nothing but dead ends. If the sign were positioned near the beginning of the path, the time savings could be enormous, because all forks after that sign would be eliminated from consideration. This means that not one but many dead ends would be avoided. There are no such signs in the famous maze of hedges or in most maze puzzles. However, as we shall see, they do exist in backtracking algorithms.

Backtracking is very useful for problems such a the 0-1 Knapsack problem. Although in Section 4.5.3 we found a dynamic programming algorithm for this problem that is efficient if the capacity W of the knapsack is not large, the algorithm is still exponential-time in the worst case. The 0-1 Knapsack problem is in the class of problems discussed in Chapter 9. No one has ever found algorithms for any of those problems whose worst-case time complexities are better than exponential, but no one has ever proved that such algorithms are not possible. One way to try to handle the 0-1 Knapsack problem would be to actually generate all the subsets, but this would be like following every path in a maze until a dead end is reached. Recall from Section 4.5.1 that there are 2^n subsets, which means that this brute-force method is feasible only for small values of n. However, if while generating the subsets we can find signs that tell us that many of them need not be generated, we can often avoid much unnecessary labor. This is exactly what a backtracking algorithm does. Backtracking algorithms for problems such as the 0-1 Knapsack problem are still exponential-time (or even worse) in the worst case. They are useful because they are efficient for many large instances, not because they are efficient for all large instances. We return to the 0-1 Knapsack problem in Section 5.7. Before that, we introduce backtracking with a simple example in Section 5.1 and solve several other problems in the other sections.

203