طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

مبحث ششم

روش‌های طراحی الگوریتم

روش حریصانه

Methods of Algorithm Design: Greedy

کاظم فولادی قلعه

دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی

دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/algorithm

اصل طراحی الگوریتم با روش حریصانه

برای حل یک مسئله با روش حریصانه:

- راه‌حل مسئله، به صورت **گام به گام** تولید می‌شود.
- در هر گام عنصری به راه‌حل اضافه می‌شود که **به نظر می‌رسد** بهتر است.

طراحی الگوریتم با روش حریصانه

ویژگی‌ها

روش حریصانه:

- **برای حل مسائل بهینه‌سازی به کار می‌رود.**

- **نمونه‌ی مسئله را تقسیم نمی‌کند، بلکه با انجام یک دنباله انتخاب که هر یک در یک لحظه‌ی خاص بهترین به نظر می‌رسد، عمل می‌کند.**

- **امید دارد که راه حل بهینه‌ی سراسری یافت شود، ولی همواره چنین نمی‌شود:**
- **الگوریتم حریصانه، حل بهینه را تضمین نمی‌کند.**
  ولی می‌تواند راه‌حلی که نسبتاً مناسب است را به دست آورد.

- **در عمل این روش برای حل مسائل واقعی بسیار قابل استفاده است.**
  مسائلی که ارزش تئوری زیادی ندارند ولی در عمل مورد نیاز هستند.

- **می‌توان حداکثر فاصله‌ی روش حریصانه را با راه‌حل بهینه محاسبه کرد.**

طراحی الگوریتم با روش حریصانه

برای حل یک مسئله با روش حریصانه:

- کار را با یک مجموعه‌ی تهی آغاز می‌کنیم.
- به ترتیب، عناصری را به این مجموعه اضافه می‌کنیم؛

تا وقتی که این مجموعه راه حلی برای آن نمونه از مسئله را نشان دهد.

هر دور تکرار شامل موارد زیر است:

(۱) انتخاب *Selection*	عنصر بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. عنصری انتخاب می‌شود که به نظر می‌رسد در همان لحظه بهینه است (حریصانه)
(۲) بررسی امکان‌پذیری *Feasibility Check*	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید ممکن است به راه‌حل برسد؟
(۳) بررسی راه‌حل *Solution Check*	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید راه حل نمونه است یا خیر؟

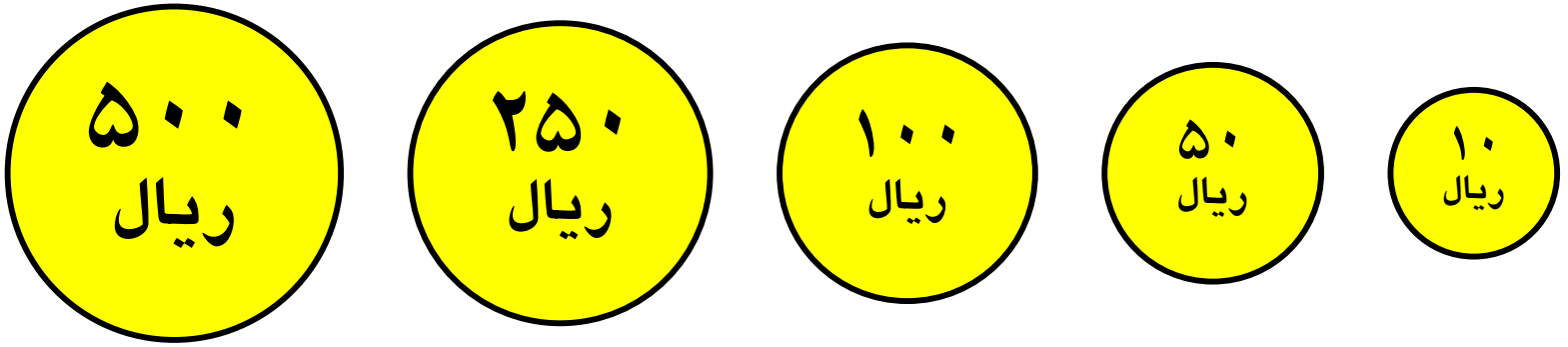
طراحی الگوریتم با روش حریصانه

```
GREEDY(A)
    S ← {}
    while ¬solution(S) do
        x ← select(A)
        if feasible(S,x) then
            S ← S ∪ {x}
            A ← A − {x}
    return S
```

(۱) انتخاب	عنصر بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. عنصری انتخاب می‌شود که به نظر می‌رسد در همان لحظه بهینه است (حریصانه).
$x \leftarrow \text{select}(A)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید ممکن است به راه‌حل برسد؟
$\text{feasible}(S,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید راه حل نمونه است یا خیر؟
$\text{solution}(S)$	

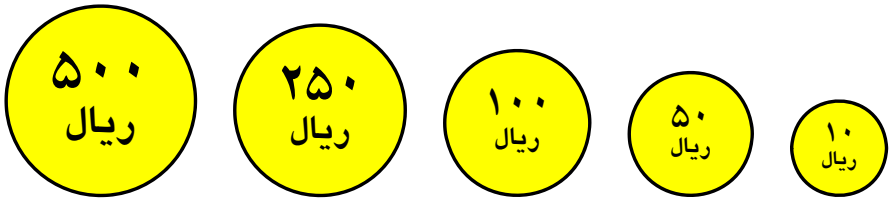
مسئله‌ی خرد کردن پول

می‌خواهیم N واحد پول را با سکه‌های $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ واحدی خرد کنیم.
از هر نوع سکه چند مورد برداریم که مجموع تعداد سکه‌ها حداقل (می‌نیمم) شود؟



طراحی الگوریتم با روش حریصانه

```
GREEDY(A)
    S ← {}
    while ¬solution(S) do
        x ← select(A)
        if feasible(S,x) then
            S ← S ∪ {x}
        A ← A − {x}
    return S
```



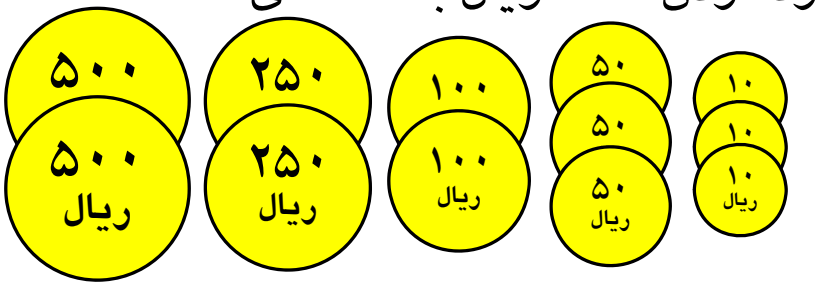
$$A = \{(\mathbf{500},1),\ (\mathbf{500},2),\ (\mathbf{250},1),\ (\mathbf{250},2),\ (\mathbf{100},1),\ (\mathbf{100},2),\ (\mathbf{50},1),\ (\mathbf{50},2),\ (\mathbf{50},3),\ (\mathbf{10},1),\ (\mathbf{10},2),\ (\mathbf{10},3),\}$$

(۱) انتخاب	سکه‌ی بعدی که باید به مجموعه اضافه شود را انتخاب می‌کنیم. (سکه‌ای که بیشترین ارزش را در میان سکه‌های باقیمانده دارد (حریصانه))
$x \leftarrow \text{select}(A)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	آیا با انتخاب این سکه می‌توانیم پول را خرد کنیم؟ (آیا مجموع ارزش سکه‌ها از کل پول بیشتر نمی‌شود؟)
$\text{feasible}(S,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید راه حل نمونه است یا خیر؟ (آیا پول به طور کامل خرد شده است؟)
$\text{solution}(S)$	

مسئله‌ی خرد کردن پول: یک نمونه (بهینه)

$$A = \{(\mathbf{500},1), (\mathbf{500},2), (\mathbf{250},1), (\mathbf{250},2), (\mathbf{100},1), (\mathbf{100},2), (\mathbf{50},1), (\mathbf{50},2), (\mathbf{50},3), (\mathbf{10},1), (\mathbf{10},2), (\mathbf{10},3),\}$$

هدف: خرد کردن 570 ریال با سکه‌های:

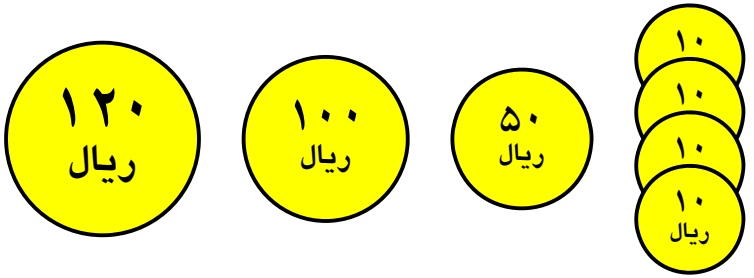


S	$x \leftarrow \text{select}(A)$	feasible(S,x)	$S \leftarrow S \cup \{x\}$	solution(S)
$\{\}$	$(\mathbf{500},1)$	Yes	$\{(\mathbf{500},1)\}$	No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{500},2)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{250},1)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{250},2)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{100},1)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{100},2)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1)\}$	$(\mathbf{50},1)$	Yes	$\{(\mathbf{500},1), (\mathbf{50},1)\}$	No
$\{(\mathbf{500},1), (50,1)\}$	$(\mathbf{50},2)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1), (50,1)\}$	$(\mathbf{50},3)$	No		No
$\{(\mathbf{500},1), (50,1)\}$	$(\mathbf{10},1)$	Yes	$\{(\mathbf{500},1), (\mathbf{50},1), (\mathbf{10},1)\}$	No
$\{(\mathbf{500},1), (50,1), (10,1)\}$	$(\mathbf{10},2)$	Yes	$\{(\mathbf{500},1), (\mathbf{50},1), (\mathbf{10},1), (\mathbf{10},2)\}$	Yes

مسئله‌ی خرد کردن پول: یک نمونه (غیربهینه)

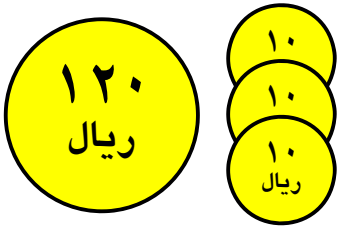
$$A = \{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{100},1),\ (\mathbf{50},1),\ (\mathbf{10},1),\ (\mathbf{10},2),\ (\mathbf{10},3),\ (\mathbf{10},4)\}$$

هدف: خرد کردن 150 ریال با سکه‌های:

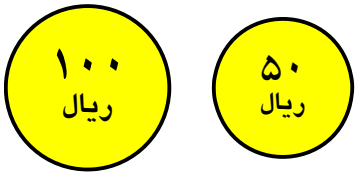


S	$x \leftarrow \text{select}(A)$	$\text{feasible}(S,x)$	$S \leftarrow S \cup \{x\}$	$\text{solution}(S)$
$\{\}$	$(\mathbf{120},1)$	Yes	$\{(\mathbf{120},1)\}$	No
$\{(\mathbf{120},1)\}$	$(\mathbf{100},1)$	No		No
$\{(\mathbf{120},1)\}$	$(\mathbf{50},1)$	No		No
$\{(\mathbf{120},1)\}$	$(\mathbf{10},1)$	Yes	$\{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{10},1)\}$	No
$\{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{10},1)\}$	$(\mathbf{10},2)$	Yes	$\{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{10},1),\ (\mathbf{10},2)\}$	No
$\{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{10},1),\ (\mathbf{10},2)\}$	$(\mathbf{10},3)$	Yes	$\{(\mathbf{120},1),\ (\mathbf{10},1),\ (\mathbf{10},2),(\mathbf{10},3)\}$	Yes

بهینه نیست!



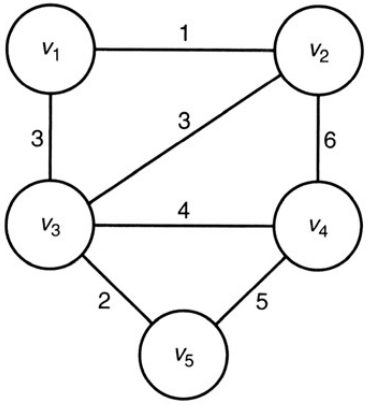
راه حل بهینه:



مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال

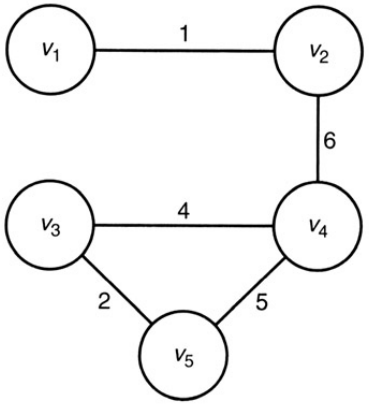
MINIMAL SPANNING TREE (MST)

(a) A connected, weighted, undirected graph G.



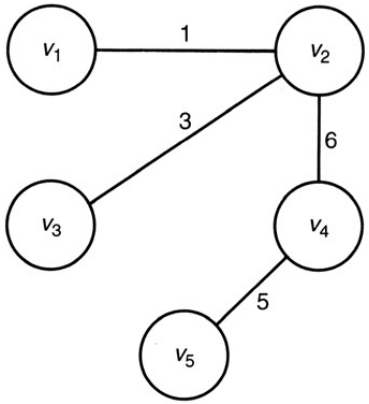
گراف همبند بدون جهت

(b) If (v_4, v_5) were removed from this subgraph, the graph would remain connected.



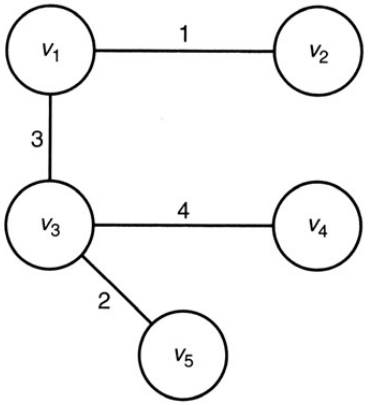
زیرگراف

(c) A spanning tree for G.



یک درخت پوشا

(d) A minimum spanning tree for G.



درخت پوشای می‌نیمال

درخت پوشا:

یک زیرگراف درخت از گراف همبند بدون جهت G که شامل همه‌ی رأس‌های آن باشد.

درخت پوشای می‌نیمال:

یک درخت پوشا که با کمترین مجموع وزن یال‌ها

نکته: هر درخت با n رأس، $n-1$ یال دارد.

زیرگراف با می‌نیمم وزن، حتماً یک درخت است:
زیرا اگر زیرگرافی درخت نباشد، دارای دور است و می‌توان با حذف یک یال از دور، گراف همبندی با وزن کمتر پیدا کرد.

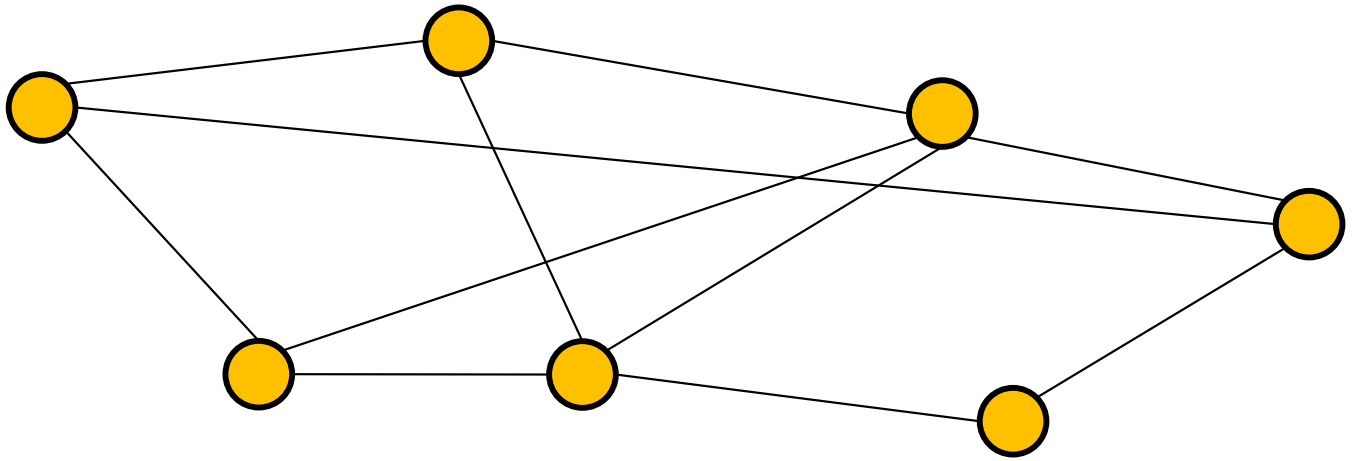
مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال

کاربردها

جاده‌کشی بین n شهر با حداقل طول مسیر

لوله‌کشی بین n نقطه با حداقل طول لوله

سیم‌کشی بین n نقطه با حداقل سیم



مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال

الگوریتم ناشیانه

الگوریتم یافتن درخت پوشای می‌نیمال با در نظر گرفتن همه‌ی درخت‌های پوشا، در بدترین حالت از نظر زمانی، بدتر از نمایی است.

نکته: هر گراف ساده با n رأس، n^{n-2} درخت پوشا دارد.

مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم حریصانه

```
GREEDY-MINIMAL-SPANNING-TREE(G)
    F ← {}
    while ¬solution(F) do
        x ← select(E)
        if feasible(F,x) then
            F ← F ∪ {x}
        E ← E − {x}
    return F
```

گراف
$G = (V, E)$
V : مجموعه‌ی رأس‌ها
E : مجموعه‌ی یال‌ها

(۱) انتخاب	یال بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (یالی انتخاب می‌شود که به نظر می‌رسد بهینه است (حریصانه))
$x \leftarrow \text{select}(E)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌ها یک درخت ایجاد می‌کند یا خیر؟ (آیا اضافه کردن این یال، دور ایجاد می‌کند یا خیر؟)
$\text{feasible}(F,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌های جدید یک درخت پوشا است یا خیر؟ (آیا $T = (V, F)$ یک درخت پوشا است؟)
$\text{solution}(F)$	

مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم پریم

الگوریتم **پریم** با دو زیرمجموعه‌ی تهی شروع می‌شود:

- F زیرمجموعه‌ی تهی از یال‌ها (E)
- Y زیرمجموعه‌ی تهی از رأس‌ها (V)

در ابتدا Y حاوی یک رأس دلخواه می‌شود (مثلاً $Y = \{v_1\}$)

نزدیک‌ترین رأس به Y،

رأسی در $V - Y$ است که توسط یالی با کمترین وزن به یک رأس در Y متصل می‌شود.

یال مربوطه به F اضافه می‌شود.

...

این فرآیند آن قدر تکرار می‌شود تا $Y = V$ شود.

انتخاب رأس جدید از $V - Y$ تضمین می‌کند که دور ایجاد نشود.

مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم پریم

```
PRIM-MINIMAL-SPANNING-TREE(G)
    F ← {}
    Y ← {v_1}
    while ¬solution(F) do
        (x,y) ← select(V − Y, Y)
        Y ← Y ∪ {x}
        F ← F ∪ {(x,y)}
        E ← E − {(x,y)}
    return F
```

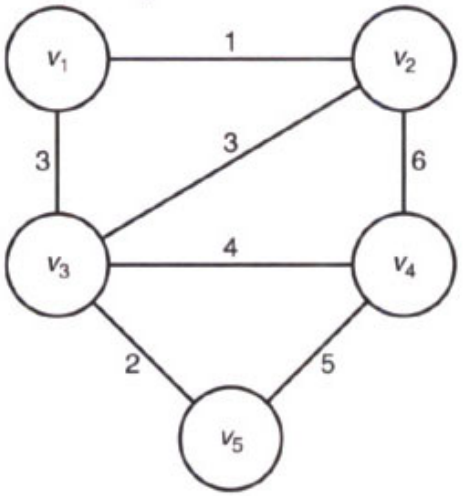
گراف
$G = (V, E)$
V : مجموعه‌ی رأس‌ها
E : مجموعه‌ی یال‌ها

(۱) انتخاب	یال بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (از $V-Y$ نزدیک‌ترین رأس به Y انتخاب می‌شود (حریصانه))
$x \leftarrow \text{select}(V-Y, Y)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌ها یک درخت ایجاد می‌کند یا خیر؟ (آیا اضافه کردن این یال، دور ایجاد می‌کند یا خیر؟) **لازم نیست!** : انتخاب رأس جدید از $V-Y$ تضمین می‌کند که دور ایجاد نشود.
$\text{feasible}(F,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌های جدید یک درخت پوشا است یا خیر؟ (آیا $Y = V$ شده است؟ یعنی: آیا همه‌ی رئوس گراف انتخاب شده است؟)
$\text{solution}(F)$	

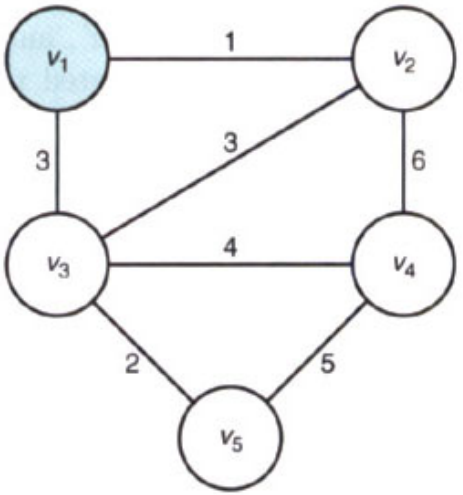
مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم پریم

مثال

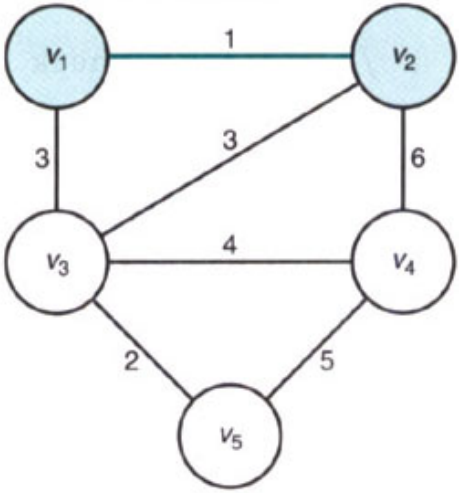
Determine a minimum spanning tree.



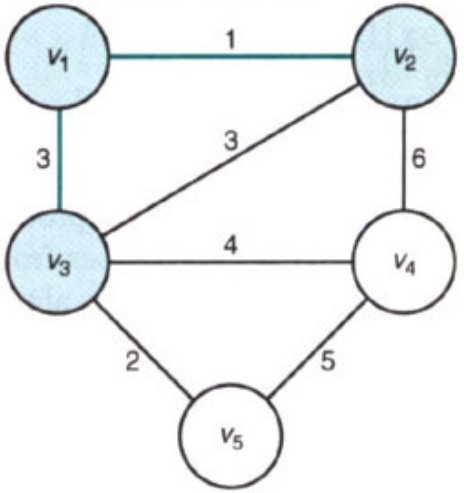
1. Vertex v_1 is selected first.



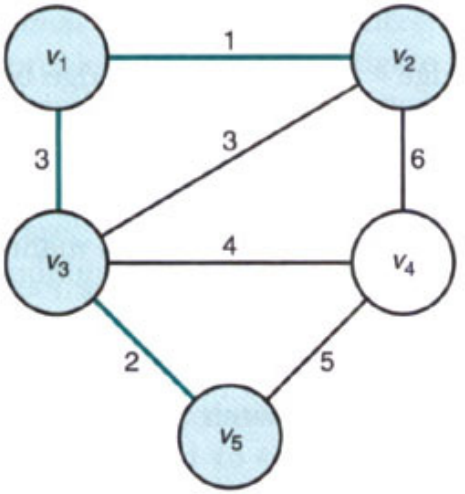
2. Vertex v_2 is selected because it is nearest to $\{v_1\}$.



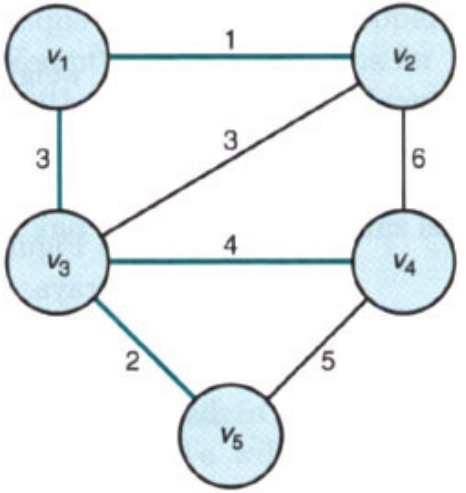
3. Vertex v_3 is selected because it is nearest to $\{v_1, v_2\}$.



4. Vertex v_2 is selected because it is nearest to $\{v_1, v_2, v_3\}$.



5. Vertex v_4 is selected.



مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم کراسکال

الگوریتم **کراسکال** به صورت زیر عمل می‌کند:

- ابتدا مجموعه‌ی یال‌ها به صورت غیرنزولی مرتب می‌شود.
- در هر تکرار یک یال انتخاب می‌شود:
  - اگر اضافه کردن آن یال، در درخت دور ایجاد نمی‌کند، آن را اضافه می‌کنیم.

* از نظر پیاده‌سازی

الگوریتم **کراسکال** با ایجاد زیرمجموعه‌های مجزای V شروع می‌شود.

- برای هر رأس یک زیرمجموعه شامل همان رأس ایجاد می‌کنیم.

سپس یال‌ها به ترتیب غیرنزولی وزن آنها بررسی می‌شوند:

- اگر یالی دو رأس را در مجموعه‌های مجزا به هم وصل می‌کند،
  - آن یال را به مجموعه اضافه می‌کنیم.
  - دو زیرمجموعه را در هم ادغام می‌کنیم.
- فرآیند فوق آن قدر تکرار می‌شود تا همه‌ی زیرمجموعه‌ها با هم ادغام شوند.

مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم کراسکال

```
KRUSKAL-MINIMAL-SPANNING-TREE(G)
    F ← {}
    while ¬solution(F) do
        e ← select(E)
        if feasible(F,e) then
            F ← F ∪ {e}
        E ← E − {e}
    return F
```

گراف
$G = (V, E)$
V : مجموعه‌ی رأس‌ها
E : مجموعه‌ی یال‌ها

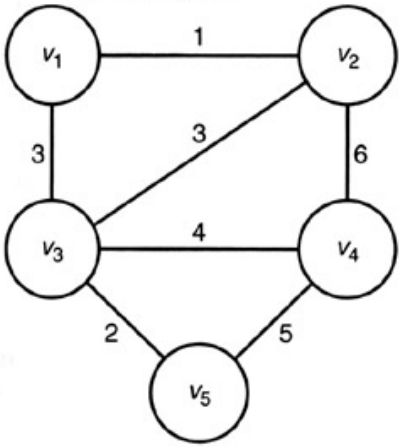
w : وزن یال‌ها

(۱) انتخاب	یال بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (کوتاه‌ترین یال بعدی انتخاب می‌شود (حریصانه))
$e \leftarrow \text{select}(E)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌ها یک درخت ایجاد می‌کند یا خیر؟ (آیا اضافه کردن این یال، دور ایجاد می‌کند یا خیر؟)
$\text{feasible}(F,e)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی یال‌های جدید یک درخت پوشا است یا خیر؟ (آیا *تعداد یال‌ها یکی کمتر از تعداد رأس‌ها* شده است؟)
$\text{solution}(F)$	

مسئله‌ی درخت پوشای می‌نیمال: الگوریتم کراسکال

مثال

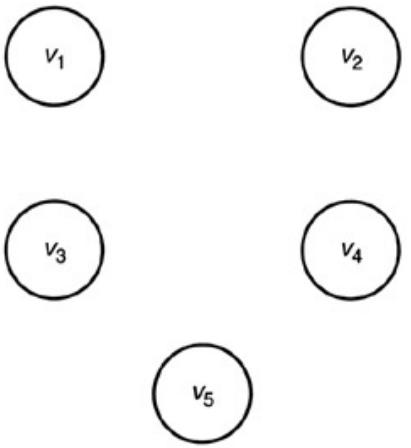
Determine a minimum spanning tree.



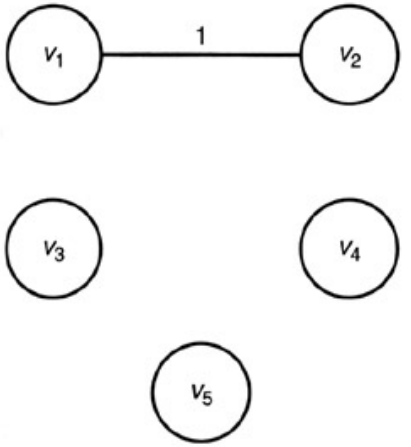
1. Edges are sorted by weight.

(v_1, v_2)	1
(v_3, v_5)	2
(v_1, v_3)	3
(v_2, v_3)	3
(v_3, v_4)	4
(v_4, v_5)	5
(v_2, v_4)	6

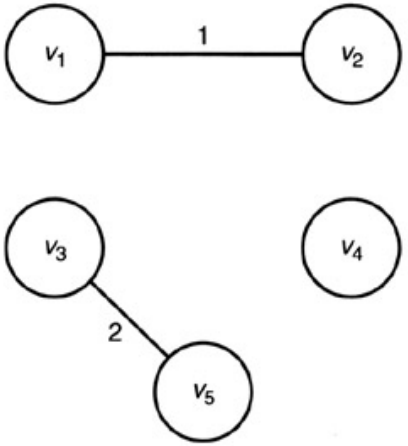
2. Disjoint set are created.



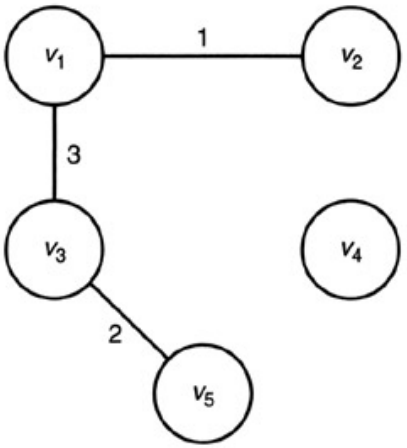
3. Edge (v_1, v_2) is selected.



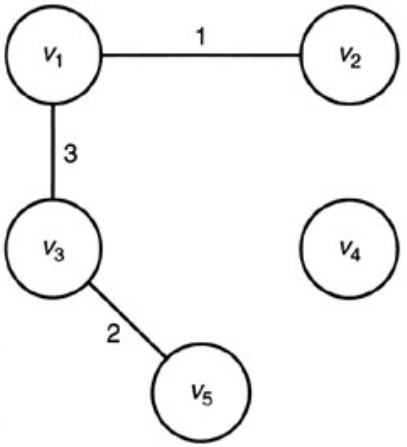
4. Edge (v_3, v_5) is selected.



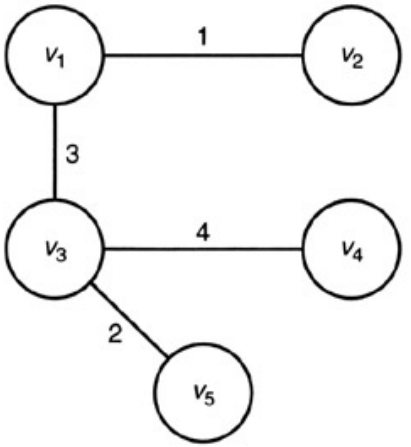
5. Edge (v_1, v_3) is selected.



6. Edge (v_2, v_3) is selected.



7. Edge (v_3, v_4) is selected.



الگوریتم درخت پوشای می‌نیمال

زمان اجرا

گراف $G = (V, E)$

V : مجموعه‌ی رأس‌ها، n : تعداد رأس‌ها

E : مجموعه‌ی یال‌ها، m : تعداد یال‌ها

الگوریتم پریم

n رأس داریم و هر رأس حداکثر با n رأس دیگر باید بررسی شود، پس

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

الگوریتم کراسکال

m یال داریم که باید به ترتیب طول مرتب شوند و یک به یک انتخاب و بررسی شوند، پس

$$T(m) \in \Theta(m \log m)$$

در گراف کامل $n - 1 \leq m \leq \frac{1}{2} n(n-1)$ در گراف همبند

برای گراف‌های پر، الگوریتم پریم و برای گراف‌های خلوت الگوریتم کراسکال بهتر است.

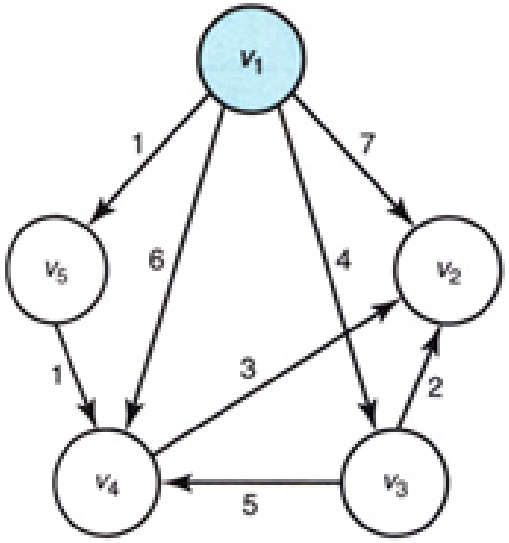
مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک‌منبع

SINGLE SOURCE-SHORTEST PATH (SSSP)

گراف جهت‌دار $G = (V, E)$
V : مجموعه‌ی رأس‌ها، n : تعداد رأس‌ها
E : مجموعه‌ی یال‌ها، m : تعداد یال‌ها

هدف:

یافتن طول کوتاه‌ترین مسیر از **یک رأس مشخص** به سایر رئوس یک گراف جهت‌دار



v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$d(v_1, v)$	0	?	?	?	?

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک‌منبع: الگوریتم دایکسترا

DIJKSTRA ALGORITHM

الگوریتم **دایکسترا** با دو زیرمجموعه‌ی تهی شروع می‌شود:

- F زیرمجموعه‌ی تهی از یال‌ها (E)
- Y زیرمجموعه‌ی تهی از رأس‌ها (V)

در ابتدا Y حاوی یک رأس مبدأ مورد نظر می‌شود (مثلاً $Y = \{v_1\}$)

سپس رأس v با کمترین فاصله به رأس مبدأ را انتخاب، آن را به Y و یالش را به F اضافه می‌کنیم.

سپس، مسیرهایی از v_1 به رئوس موجود در $V - Y$ را بررسی می‌کنیم که فقط از رئوس Y به عنوان رأس واسط استفاده می‌کند.

کوتاه‌ترین این مسیرها مشخص می‌شود:

- رأس واقع در انتهای این مسیر به Y اضافه می‌شود.
- یال شامل این رأس به F اضافه می‌شود.

...

این فرآیند آن قدر تکرار می‌شود تا $Y = V$ شود.

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک‌منبع: الگوریتم دایکسترا: شبه‌کد

```
DIJKSTRA-SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, v_1)
    F ← {}
    Y ← {v_1}
    while ¬solution(F) do
        v ← select(v_1, Y, V − Y)
        e ← the edge on shortest path that touches v to F
        Y ← Y ∪ {v}
        F ← F ∪ {e}
    return F
```

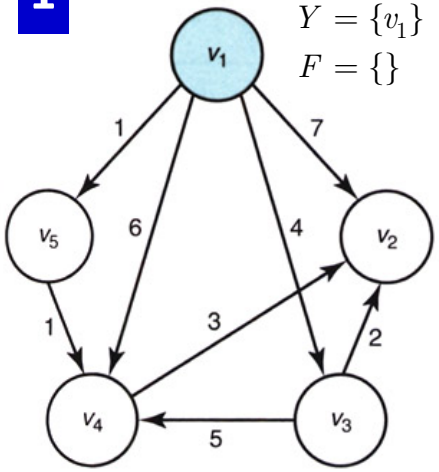
گراف
$G = (V, E)$
V : مجموعه‌ی رأس‌ها
E : مجموعه‌ی یال‌ها

(۱) انتخاب	رأس بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (رأس v از $V-Y$ انتخاب می‌شود که فقط از رئوس میانی واقع در Y استفاده می‌کند و دارای کوتاه‌ترین مسیر از v_1 می‌باشد. (حریصانه))
$v \leftarrow \text{select}(v_1, Y, V-Y)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	**لازم نیست!** : در همان تابع انتخاب لحاظ شده است.
$\text{feasible}(F,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا می‌نیمم فاصله تا همه‌ی رئوس حساب شده است؟ (آیا $Y = V$ شده است؟ یعنی: آیا همه‌ی رئوس گراف انتخاب شده است؟)
$\text{solution}(F)$	

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک‌منبع: الگوریتم دایکسترا

Compute shortest paths from v_1.

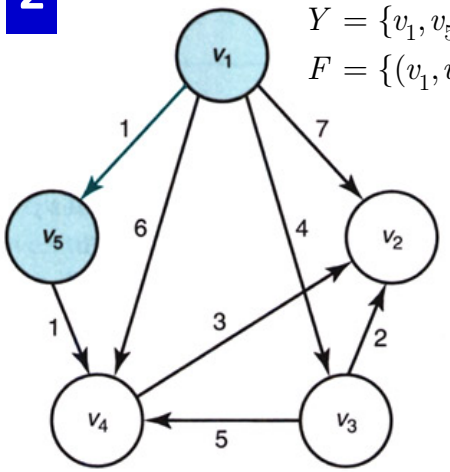
1



$Y = \{v_1\}$
$F = \{\}$

1. Vertex v_5 is selected because it is nearest to v_1.

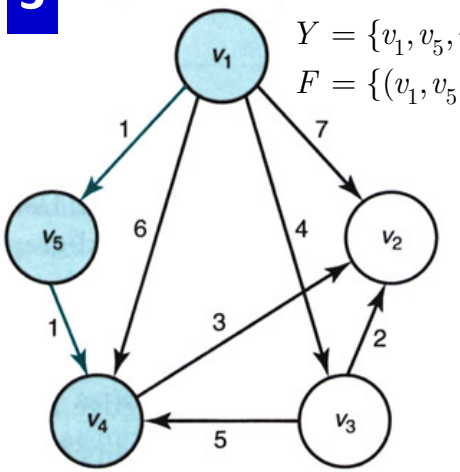
2



$Y = \{v_1, v_5\}$
$F = \{(v_1, v_5)\}$

2. Vertex v_4 is selected because it has the shortest path from v_1 using only vertices in $\{v_5\}$ as intermediates.

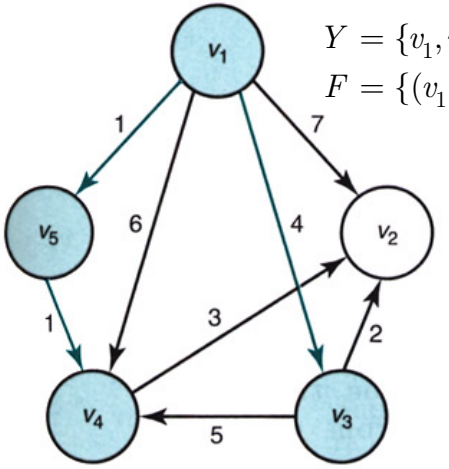
3



$Y = \{v_1, v_5, v_4\}$
$F = \{(v_1, v_5), (v_5, v_4)\}$

3. Vertex v_3 is selected because it has the shortest path from v_1 using only vertices in $\{v_4, v_5\}$ as intermediates.

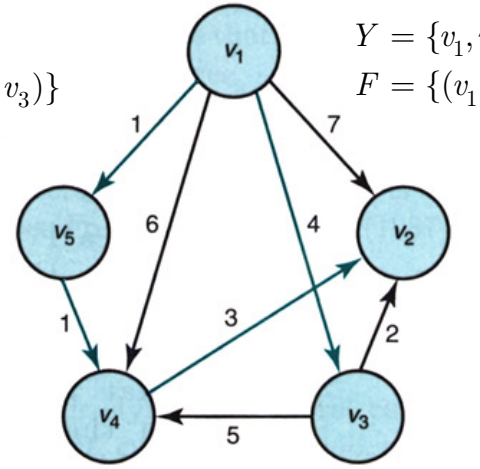
4



$Y = \{v_1, v_5, v_4, v_3\}$
$F = \{(v_1, v_5), (v_5, v_4), (v_1, v_3)\}$

4. The shortest path from v_1 to v_2 is $[v_1, v_5, v_4, v_2]$.

5



$Y = \{v_1, v_5, v_4, v_3, v_2\}$
$F = \{(v_1, v_5), (v_5, v_4), (v_1, v_3), (v_4, v_2)\}$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$d(v_1, v)$	0	5	4	2	1

الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر تک‌منبع : زمان اجرا

گراف $G = (V, E)$

V : مجموعه‌ی رأس‌ها، n : تعداد رأس‌ها

E : مجموعه‌ی یال‌ها، m : تعداد یال‌ها

الگوریتم دایکسترا

n رأس داریم و هر رأس حداکثر با n رأس دیگر باید بررسی شود، پس

$$T(n) \in O(n^2)$$

کد هافمن

HUFFMAN CODE

می‌خواهیم کاراکترها را با یک کد دودویی با طول متغیر کدگذاری کنیم، به طوری که:

- کاراکترهایی که **تعداد تکرار بیشتر** دارند با رشته‌ی بیتی **کوتاه‌تر** و
- کاراکترهایی که **تعداد تکرار کمتر** دارند با رشته‌ی بیتی **بلندتر** کدگذاری شوند.

⇐ متن با کوتاه‌ترین طول ممکن کدگذاری شود.

راه حل: **کد هافمن**

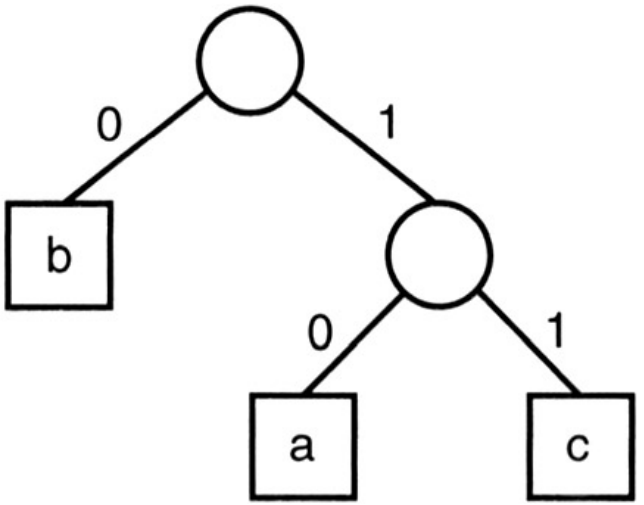
مثال:

a	b	c	d	e	f
16	5	12	17	10	25

کد پیشوندی

PREFIX CODE

در **کد پیشوندی**، هیچ کلمه‌ی کدی، پیشوند هیچ کلمه‌ی کد دیگری نیست.

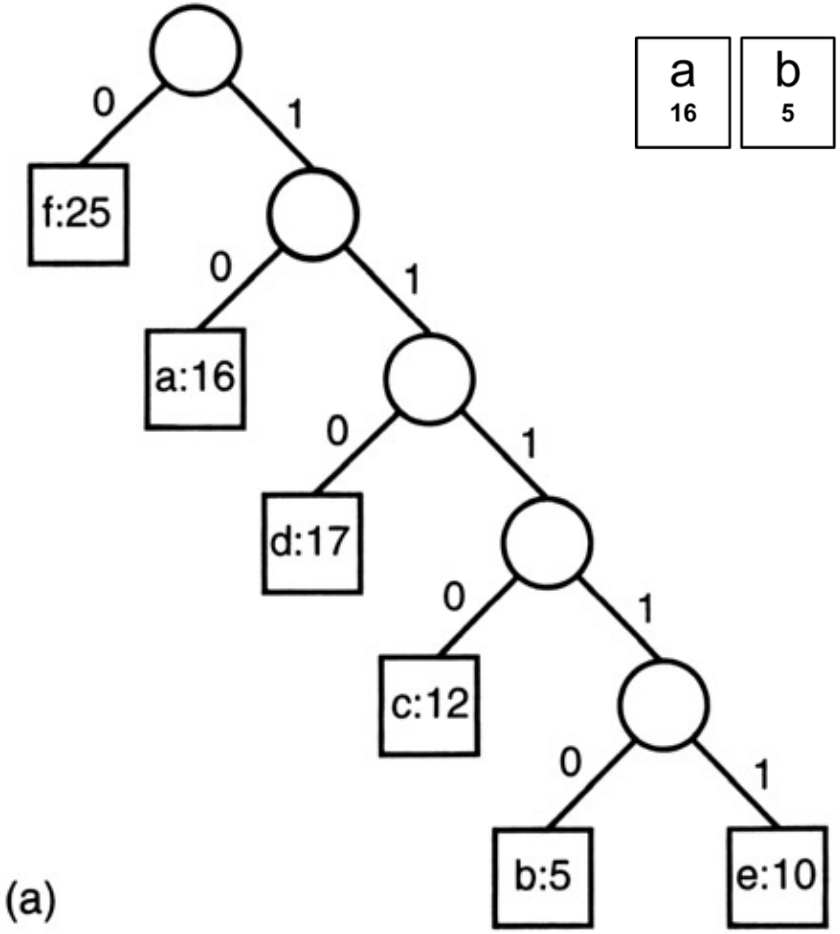


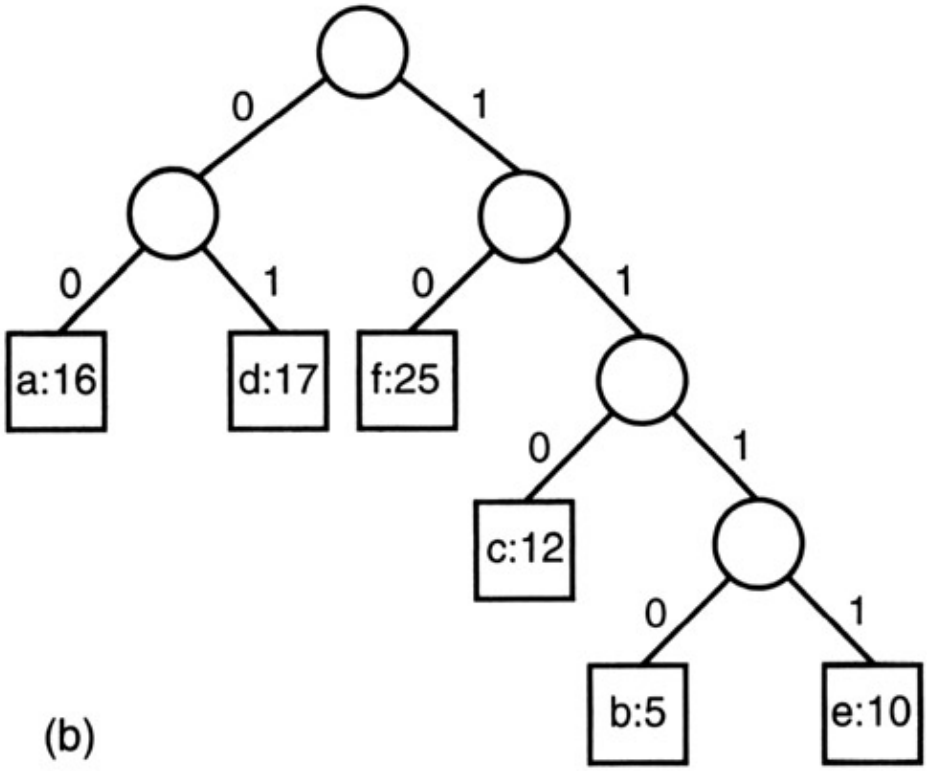
a	10
b	0
c	11

کد هافمن، حالت خاصی از **کد پیشوندی** است.

کدگذاری: روش پیشوندی و هافمن

a	b	c	d	e	f
16	5	12	17	10	25

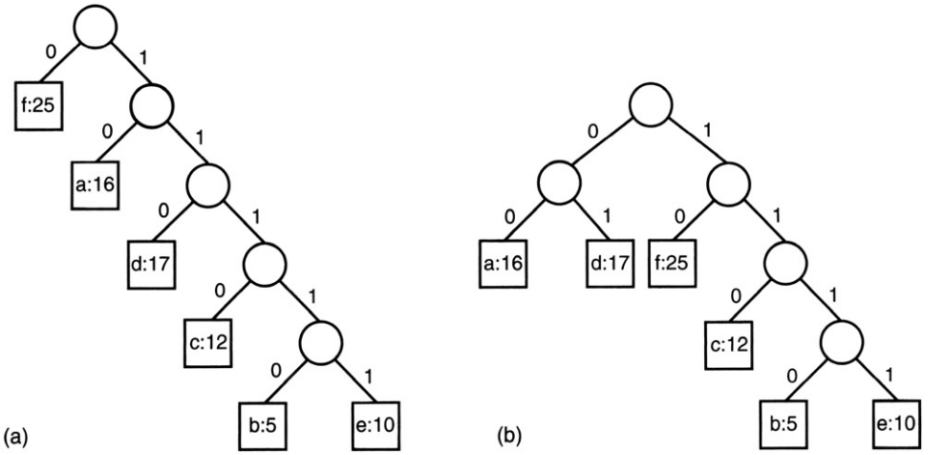




کد پیشوندی:
برای ایجاد کد پیشوندی برای هر کاراکتر، یک سطح درخت را در نظر می‌گیریم.
اولین سطح را به پرتکرارترین کاراکتر نسبت می‌دهیم.

کد هافمن:
برای ایجاد کد هافمن، درخت کد به گونه‌ای تنظیم می‌شود که کدگذاری بهینه استخراج شود.

کدگذاری دودویی متن: هافمن بهینه است!



Character	Frequency	C1(Fixed-Length)	C2 (Prefix)	C3(Huffman)
a	16	000	10	00
b	5	001	11110	1110
c	12	010	1110	110
d	17	011	110	01
e	10	100	11111	1111
f	25	101	0	10

تعداد بیت لازم برای کد کردن متن با استفاده از کدهای فوق:

$$Bits(C1) = 16(3) + 5(3) + 12(3) + 17(3) + 10(3) + 25(3) = 255$$
$$Bits(C2) = 16(2) + 5(5) + 12(4) + 17(3) + 10(5) + 25(1) = 231$$
$$Bits(C3) = 16(2) + 5(4) + 12(3) + 17(2) + 10(4) + 25(2) = 212$$

کد هافمن: الگوریتم

n کاراکتر بر حسب تعداد تکرار آنها به صورت صعودی مرتب می‌شوند.
یک **درخت دودویی** به صورت زیر ساخته می‌شود:
در هر مرحله:

- دو عنصری که کمترین تکرار را دارند با هم ادغام می‌شوند.
- عناصر ادغام شده حذف می‌شوند.
- نتیجه‌ی ادغام به صورت یک درخت در لیست فوق اضافه می‌شود.
  (وزن عنصر حاصل، برابر با مجموع وزن عناصر ادغام شده است).

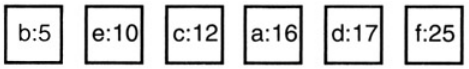
- عملیات فوق آن‌قدر تکرار می‌شود تا همه‌ی عناصر در ادغام استفاده شوند.
- در درخت حاصل:
  به یال‌های سمت چپ برچسب 0 و به یال‌های سمت راست برچسب 1 داده می‌شود.
- کد هر کاراکتر می‌شود: دنباله‌ی برچسب‌ها از ریشه تا برگ مربوط به آن کاراکتر

الگوریتم هافمن: زمان اجرا

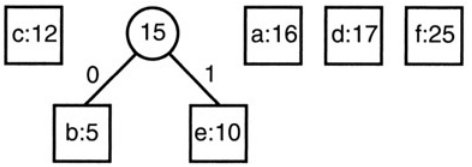
عملیات اصلی، مرتب‌سازی n کاراکتر بر حسب تعداد تکرار آنهاست، پس: $T(n) \in \Theta(n \log n)$

کد هافمن

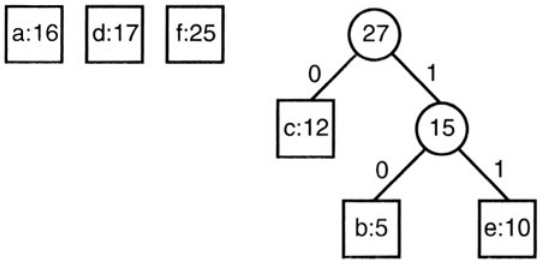
مثال



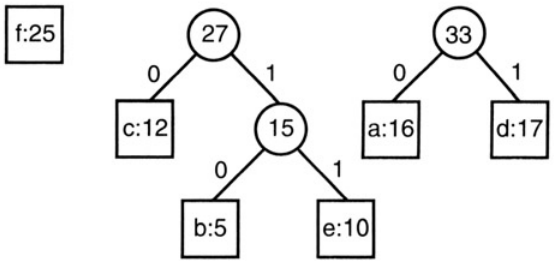
0



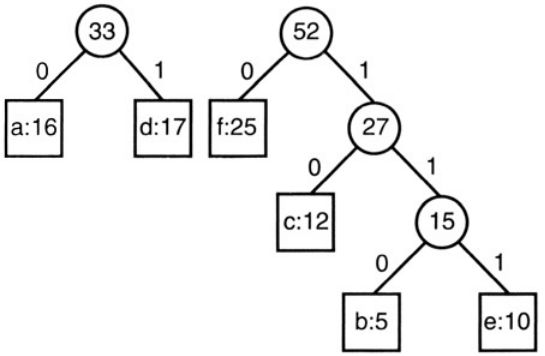
1



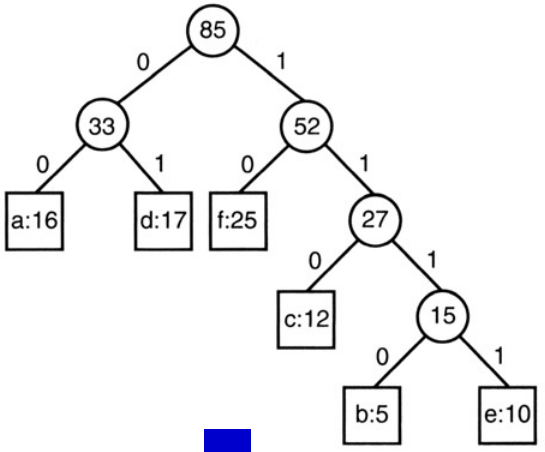
2



3



4



5

a 00
b 1110
c 110
d 01
e 1111
f 10

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها

OPTIMAL JOB SCHEDULING

n کار با زمان‌های سرویس مختلف داریم.
کارها را به چه ترتیبی انجام بدهیم تا **زمان کل (حضور در سیستم)** می‌نیمم شود.

مثال: ۳ کار با زمان‌های ۵، ۱۰ و ۴ واحد داریم.
برای ترتیب $[1,2,3]$ زمان کل می‌شود:

Job	Service Time
1	5
2	10
3	4

$$\underbrace{(\mathbf{5})}_{\text{Job 1}} + \underbrace{(\overbrace{5}^{\text{Wait}} + \mathbf{10})}_{\text{Job 2}} + \underbrace{(\overbrace{5+10}^{\text{Wait}} + \mathbf{4})}_{\text{Job 3}} = 39$$

Job	Time in the System
1	5 (*service time*)
2	5 (*wait for job 1*) + 10 (*service time*)
3	5 (*wait for job 1*) + 10 (*wait for job 2*) + 4 (*service time*)

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها

مثال: ۳ کار با زمان‌های ۵، ۱۰ و ۴ واحد داریم.

Job	Service Time
1	5
2	10
3	4

Schedule	*Total Time in the System*
[1, 2, 3]	5+(5+10)+(5+10+4) = 39
[1, 3, 2]	5+(5+4)+(5+4+10) = 33
[2, 1, 3]	10+(10+5)+(10+5+4) = 44
[2, 3, 1]	10+(10+4)+(10+4+5) = 43
[3, 1, 2]	4+(4+5)+(4+5+10) = 32 جواب بهینه
[3, 2, 1]	4+(4+10)+(4+10+5) = 37

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها: الگوریتم حریصانه

```
GREEDY-SCHEDULING(A)
    S ← [ ]
    while ¬solution(S) do
        x ← select(A)
        S ← [S, x]
        A ← A − {x}
    return S
```

زمان‌بندی بهینه، با ترتیب صعودی کارها بر حسب زمان سرویس به دست می‌آید.

(۱) انتخاب	عنصر بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (کار با کوتاه‌ترین زمان سرویس انتخاب می‌شود (حریصانه)).
$x \leftarrow \text{select}(A)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	لازم نیست! (راه حل در هر صورت امکان‌پذیر است).
$\text{feasible}(S,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید راه حل نمونه است یا خیر؟ (آیا همه‌ی کارها زمان‌بندی شده‌اند؟)
$\text{solution}(S)$	

زمان اجرا عملیات اصلی، مرتب‌سازی n کار بر حسب زمان سرویس آنهاست، پس: $T(n) \in \Theta(n \log n)$

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها با مهلت معین

Optimal Job Scheduling with Deadline

n کار با مهلت و منفعت مختلف داریم.
هر یک از کارها در یک واحد زمانی انجام می‌شوند.
کارها را به چه ترتیبی انجام بدهیم تا **منفعت کل** ماکزیمم شود.
(لازم نیست همه‌ی کارها در زمان‌بندی وارد شود، فقط باید زیرمجموعه‌ای از آنها انتخاب شود که منفعت کل را ماکزیمم کند).

مثال: ۴ کار مطابق جدول داریم:

زمان ورود همه‌ی کارها: صفر

Job	Deadline	Profit
1	2	30
2	1	35
3	2	25
4	1	40

زمان‌بندی‌های امکان‌پذیر و منفعت حاصل از آنها:

Schedule	Total Profit
[1, 3]	30+25 = 55
[2, 1]	35+30 = 65
[2, 3]	35+25 = 60
[3, 1]	25+30 = 55
[4, 1]	40+30 = 70
[4, 3]	40+25 = 65

جواب بهینه :

(مثلاً زمان‌بندی $[1,4]$ امکان‌پذیر نیست: زیرا اگر کار ۱ انجام شود، مهلت کار ۴ تمام شده است و دیگر اجرای آن منفعتی ندارد!)

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها با مهلت معین

تعیین زمان‌بندی امکان‌پذیر

یک مجموعه از کارها امکان‌پذیر است **اگر و فقط اگر** مرتب‌شده‌ی صعودی آن بر حسب مهلت‌ها امکان‌پذیر باشد.

الگوریتم حریصانه‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها با مهلت معین:

- ابتدا کارها را بر اساس منفعت آنها به صورت نزولی مرتب می‌کنیم.
- لیست S را در ابتدا تهی در نظر می‌گیریم.
- در هر مرحله
  - کار با بیشترین منفعت را انتخاب می‌کنیم.
  - اگر زمان‌بندی با اضافه کردن آن کار امکان‌پذیر بود، آن را به S اضافه می‌کنیم.
    - در غیر این صورت آن کار نادیده گرفته می‌شود.

* برای تشخیص امکان‌پذیر بودن، کارهای موجود در S را به ترتیب مهلت‌های صعودی مرتب می‌کنیم و امکان‌پذیری آن را بررسی می‌کنیم.

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها با مهلت معین: الگوریتم حریصانه

```
GREEDY-SCHEDULING-WITH-DEADLINE(A)
    S ← [ ]
    while ¬solution(S) do
        x ← select(A)
        if feasible(S,x) then
    S ← [S, x]
        A ← A − {x}
    return S
```

زمان اجرا

عملیات اصلی:

- مرتب‌سازی n کار بر حسب منفعت: $n \log n$
- تشخیص امکان‌پذیر بودن هر کار: n
  - برای n کار: n^2

$$T(n) \in \Theta(n \log n) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$$

(۱) انتخاب	عنصر بعدی که باید به مجموعه اضافه شود، انتخاب می‌شود. (کار با بیشترین منفعت ممکن انتخاب می‌شود (حریصانه)).
$x \leftarrow \text{select}(A)$	
(۲) بررسی امکان‌پذیری	آیا اضافه کردن این کار به زمان‌بندی امکان‌پذیر می‌رسد؟ (کارهای موجود در S را به ترتیب مهلت‌های صعودی مرتب می‌کنیم و امکان‌پذیری آن را بررسی می‌کنیم.)
$\text{feasible}(S,x)$	
(۳) بررسی راه‌حل	تعیین می‌کند که آیا مجموعه‌ی جدید راه حل نمونه است یا خیر؟ (آیا همه‌ی کارها بررسی شده‌اند؟)
$\text{solution}(S)$	

مسأله‌ی زمان‌بندی بهینه‌ی کارها با مهلت معین: مثال

Job	Deadline	Profit
1	3	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

زمان ورود همه‌ی کارها: صفر
زمان سرویس هر کار: یک واحد

1	S is set to Ø.
2	S is set to {1} because the sequence [1] is feasible.
3	S is set to {1,2} because the sequence [2,1] is feasible.
4	{1,2, 3} is rejected because there is no feasible sequence for this set.
5	S is set to {1,2,4} because the sequence [2,1,4] is feasible.
6	{1,2,4,5} is rejected because there is no feasible sequence for this set.
7	{1,2,4,6} is rejected because there is no feasible sequence for this set.
8	{1,2,4,7} is rejected because there is no feasible sequence for this set.

The final value of S is {1,2,4}, and a feasible sequence for this set is [2,1,4]. Because jobs 1 and 4 both have deadlines of 3, we could use the feasible sequence [2,4,1] instead.

مسئله‌ی کوله‌پشتی کسری

FRACTIONAL KNAPSACK

n قطعه با وزن‌ها و ارزش‌های مختلف داریم.
یک کوله‌پشتی با ظرفیت W موجود است.
می‌خواهیم از هر قطعه کسری را انتخاب کنیم که

- کل کوله‌پشتی پر شود، و
- مجموع ارزش کل ظرف ماکزیمم شود.

مثال:

$W = 30$

قطعه	وزن	ارزش	نسبت
i	w_i	p_i	p_i / w_i
1	5	50	50 / 5 = 10
2	10	60	60 / 10 = 6
3	20	140	140 / 20 = 7

سه انتخاب حریصانه:

- به ترتیب صعودی وزن
- به ترتیب نزولی ارزش
- **به ترتیب نزولی نسبت ارزش به وزن (انتخاب بهینه)**

آخرین انتخاب می‌تواند به صورت کسری از قطعه انجام شود.

زمان اجرا

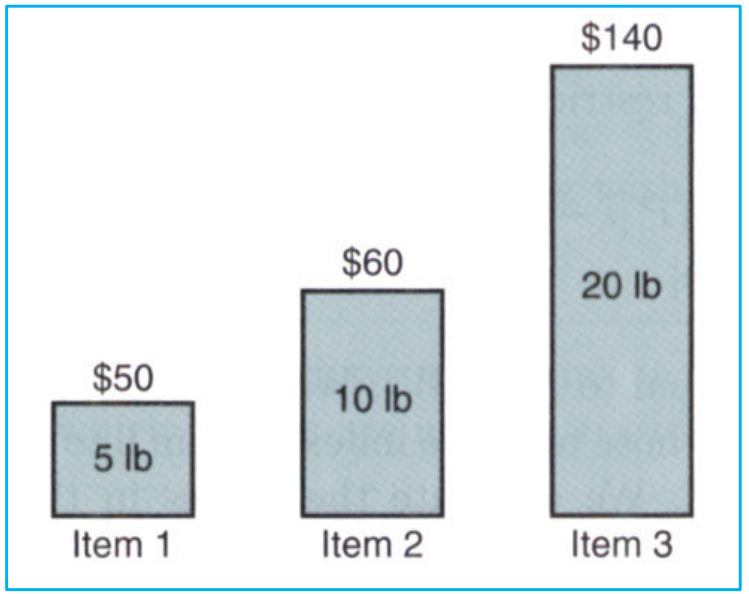
عملیات اصلی، مرتب‌سازی n قطعه بر اساس نسبت ارزش به وزن آنهاست، پس: $T(n) \in \Theta(n \log n)$

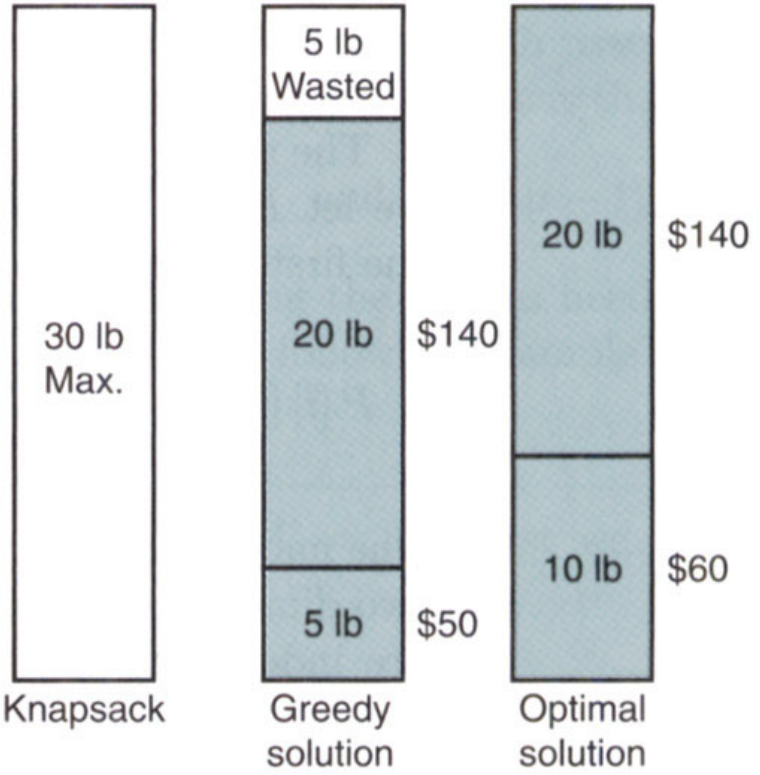
مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1

0/1 KNAPSACK

در مسئله‌ی کوله‌پشتی $0/1$، یک قطعه باید برداشته شود یا اصلاً برداشته نشود.
مسئله‌ی کوله‌پشتی $0/1$ با روش حریصانه لزوماً به جواب بهینه نمی‌رسد.
(زیرا می‌تواند ظرفیت کوله‌پشتی را هدر بدهد.)

قطعه	وزن	ارزش	نسبت
i	w_i	p_i	p_i / w_i
1	5	50	50 / 5 = 10
2	10	60	60 / 10 = 6
3	20	140	140 / 20 = 7





مسئله‌ی کوله‌پشتی کسری

FRACTIONAL KNAPSACK

$$S = \{item_1, item_2, \ldots, item_n\}$$
$$w_i = weight(item_i)$$
$$p_i = value(item_i)$$
$$W = \text{total weight of knapsack}$$

$$\text{select } A \subseteq S$$

$$\text{maximize} \sum_{item_i \in A} p_i x_i$$

$$\text{subject to} \sum_{item_i \in A} w_i x_i \leq W$$

$$\text{where} \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

مسئله‌ی کوله‌پشتی 0/1

0/1 KNAPSACK

$$S = \{item_1, item_2, \ldots, item_n\}$$
$$w_i = weight(item_i)$$
$$p_i = value(item_i)$$
$$W = \text{total weight of knapsack}$$

$$\text{select } A \subseteq S$$

$$\text{maximize} \sum_{item_i \in A} p_i x_i$$

$$\text{subject to} \sum_{item_i \in A} w_i x_i \leq W$$

$$\text{where} \quad x_i \in \{0,1\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

مسئله‌ی انتخاب فعالیت‌ها

(زمان‌بندی بازه‌ای)

ACTIVITY SELECTION PROBLEM

n فعالیت (با شماره‌های 1 تا n) می‌خواهند از یک منبع استفاده کنند.

- در هر زمان فقط یک فعالیت می‌تواند از این تک منبع استفاده کند.
  (فعالیت‌ها نمی‌توانند همپوشانی زمانی داشته باشند!)
- هر فعالیت i دارای یک زمان شروع s_i و یک زمان پایان f_i است که $s_i \leq f_i$.
- فعالیت i در صورت انتخاب شدن در بازه‌ی زمانی $[s_i, f_i)$ اجرا خواهد شد.

هدف: انتخاب حداکثر تعداد فعالیت‌های ناهمپوشان زمانی

مثال: n سخنران که می‌خواهند از یک سالن اجتماعات استفاده کنند.
مثلاً: انتخاب سخنرانی‌هایی که تعداد کل سخنران‌ها با توجه به بازه‌های زمانی ناهمپوشان ماکزیمم شود.

مسئله‌ی انتخاب فعالیت‌ها

الگوریتم حریصانه

ACTIVITY SELECTION PROBLEM

n فعالیت را برحسب زمان‌های پایان آنها به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \leq f_n$$

حال، فعالیت 1 را انتخاب می‌کنیم.

سپس برای سایر فعالیت‌ها:

اگر زمان شروع آن فعالیت بزرگتر یا مساوی با زمان پایان آخرین فعالیت انتخاب شده بود،
آن فعالیت را انتخاب می‌کنیم.

با فرض مرتب بودن f :

```
ACTIVITY-SELECTION(s, f)
    A ← {1}
    j ← 1
    for i ← 2 to n do
        if s[i] ≥ f[j] then
            A ← A ∪ {i}
            j ← i
    return A
```

مسئله‌ی انتخاب فعالیت‌ها

الگوریتم حریصانه: زمان اجرا

ACTIVITY SELECTION PROBLEM

با فرض مرتب بودن f :

```
ACTIVITY-SELECTION(s, f)
    A ← {1}
    j ← 1
    for i ← 2 to n do
        if s[i] ≥ f[j] then
            A ← A ∪ {i}
            j ← i
    return A
```

$$T(n) \in \underbrace{\Theta(n \log n)}_{\text{مرتب‌سازی}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\substack{\text{حلقه‌ی} \\ \text{انتخاب}}} = \Theta(n \log n)$$

مسئله‌ی انتخاب فعالیت‌ها

مثال

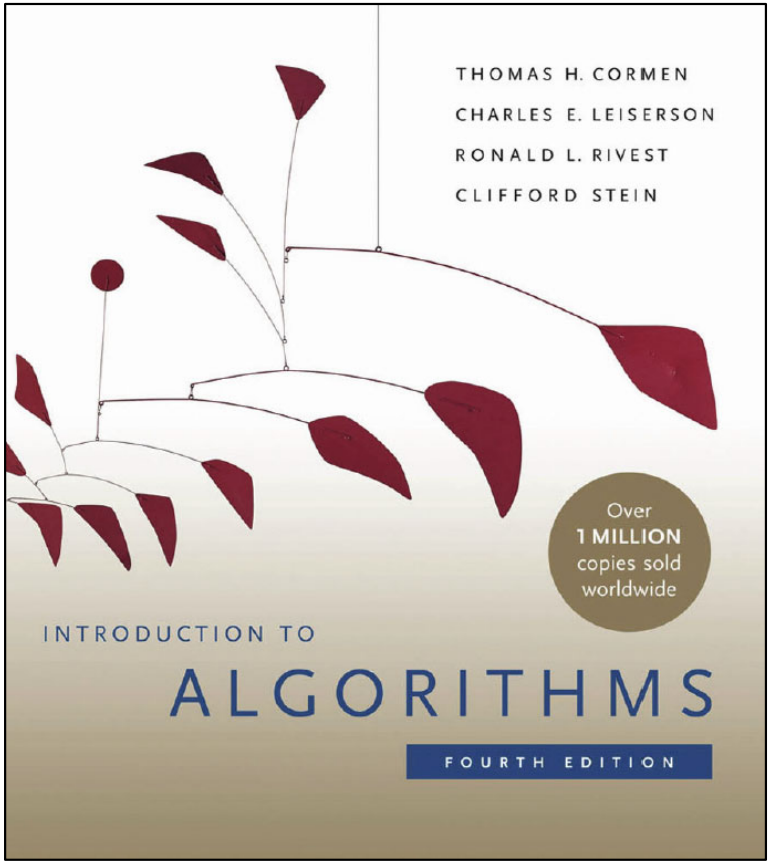
ACTIVITY SELECTION PROBLEM

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$s[i]$	1	3	0	5	3	5	6	8
$f[i]$	4	5	6	7	8	9	10	11

مرتب بر حسب f :

i	$s[i] \geq f[j]$?	A	j
1		$\{1\}$	1
2	**flase**	–	
3	**flase**	–	
4	**true**	$\{1,4\}$	4
5	**flase**	–	–
6	**flase**	–	–
7	**flase**	–	–
8	**true**	$\{1,4,8\}$	8

مرجع



T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein,
Introduction to Algorithms,
4th Edition, MIT Press, 2022.

Chapter 15

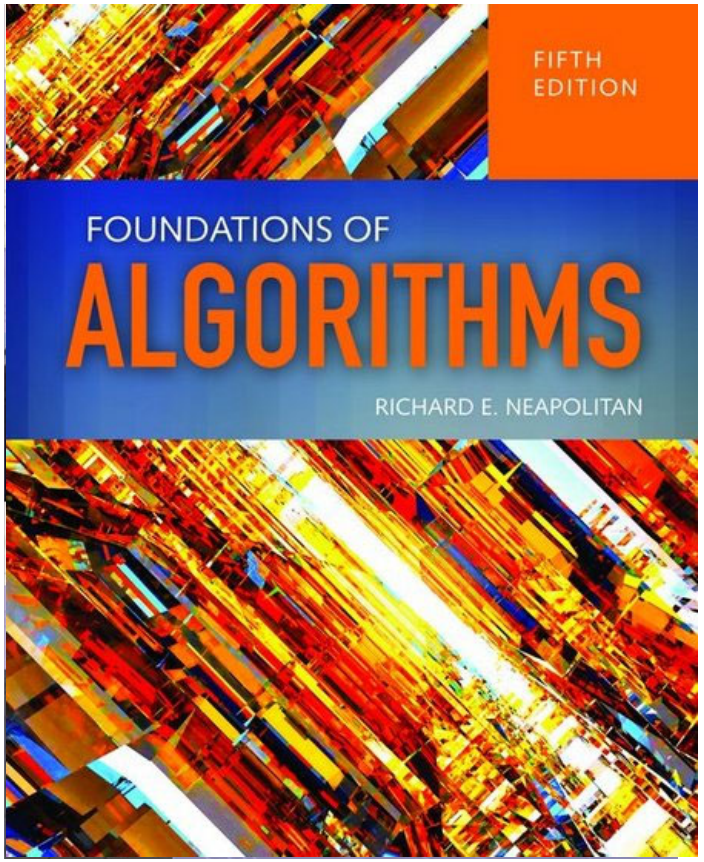
15 Greedy Algorithms

Algorithms for optimization problems typically go through a sequence of steps, with a set of choices at each step. For many optimization problems, using dynamic programming to determine the best choices is overkill, and simpler, more efficient algorithms will do. A *greedy algorithm* always makes the choice that looks best at the moment. That is, it makes a locally optimal choice in the hope that this choice leads to a globally optimal solution. This chapter explores optimization problems for which greedy algorithms provide optimal solutions. Before reading this chapter, you should read about dynamic programming in Chapter 14, particularly Section 14.3.

Greedy algorithms do not always yield optimal solutions, but for many problems they do. We first examine, in Section 15.1, a simple but nontrivial problem, the activity-selection problem, for which a greedy algorithm efficiently computes an optimal solution. We'll arrive at the greedy algorithm by first considering a dynamic-programming approach and then showing that an optimal solution can result from always making greedy choices. Section 15.2 reviews the basic elements of the greedy approach, giving a direct approach for proving greedy algorithms correct. Section 15.3 presents an important application of greedy techniques: designing data-compression (Huffman) codes. Finally, Section 15.4 shows that in order to decide which blocks to replace when a miss occurs in a cache, the "furthest-in-future" strategy is optimal if the sequence of block accesses is known in advance.

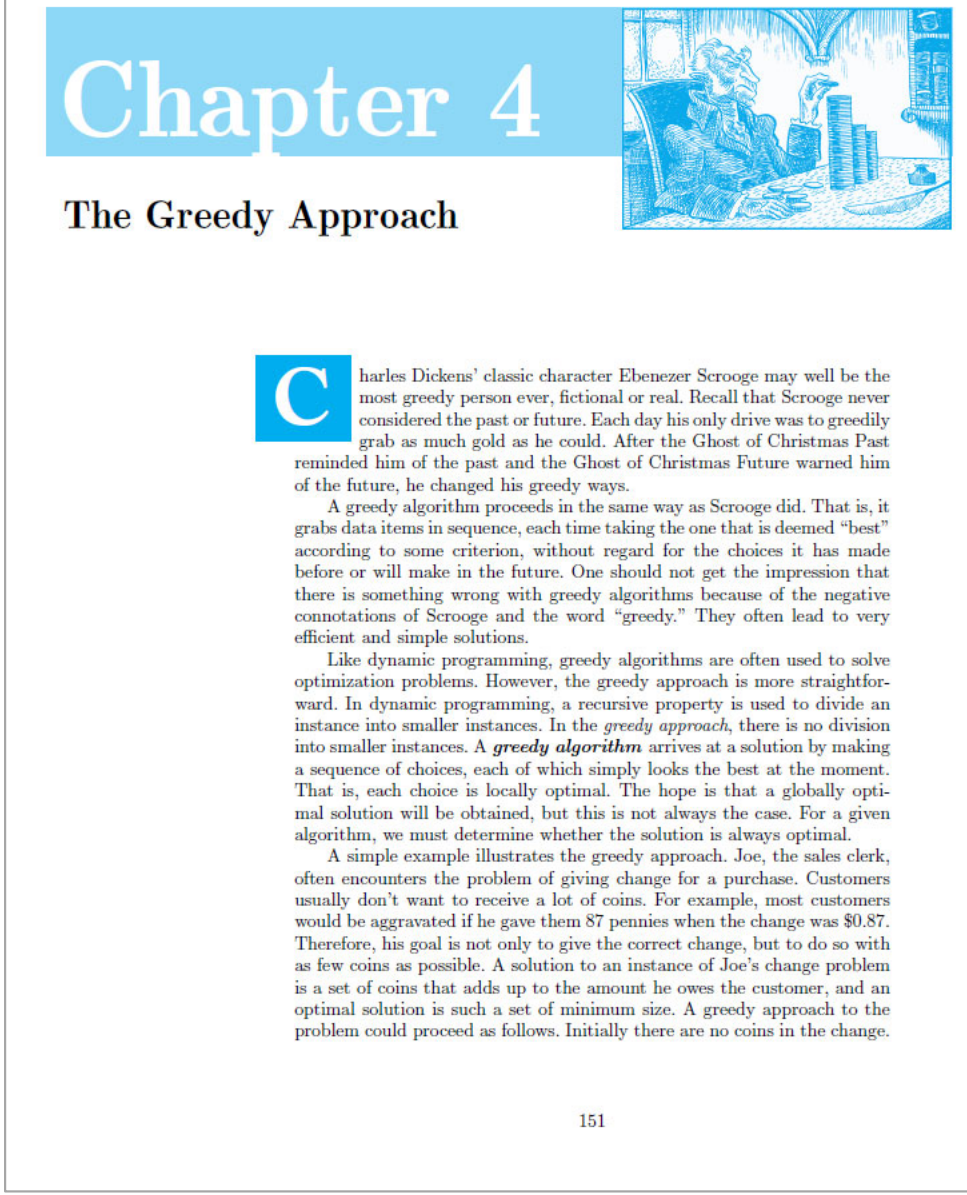
The greedy method is quite powerful and works well for a wide range of problems. Later chapters will present many algorithms that you can view as applications of the greedy method, including minimum-spanning-tree algorithms (Chapter 21), Dijkstra's algorithm for shortest paths from a single source (Section 22.3), and a greedy set-covering heuristic (Section 35.3). Minimum-spanning-tree algorithms furnish a classic example of the greedy method. Although you can read this chapter and Chapter 21 independently of each other, you might find it useful to read them together.

مرجع



R.E. Neapolitan,
Foundations of Algorithms,
5th Edition, Jones and Bartlett Publishers, 2015.

Chapter 4



Chapter 4

The Greedy Approach

Charles Dickens' classic character Ebenezer Scrooge may well be the most greedy person ever, fictional or real. Recall that Scrooge never considered the past or future. Each day his only drive was to greedily grab as much gold as he could. After the Ghost of Christmas Past reminded him of the past and the Ghost of Christmas Future warned him of the future, he changed his greedy ways.

A greedy algorithm proceeds in the same way as Scrooge did. That is, it grabs data items in sequence, each time taking the one that is deemed "best" according to some criterion, without regard for the choices it has made before or will make in the future. One should not get the impression that there is something wrong with greedy algorithms because of the negative connotations of Scrooge and the word "greedy." They often lead to very efficient and simple solutions.

Like dynamic programming, greedy algorithms are often used to solve optimization problems. However, the greedy approach is more straightforward. In dynamic programming, a recursive property is used to divide an instance into smaller instances. In the *greedy approach*, there is no division into smaller instances. A ***greedy algorithm*** arrives at a solution by making a sequence of choices, each of which simply looks the best at the moment. That is, each choice is locally optimal. The hope is that a globally optimal solution will be obtained, but this is not always the case. For a given algorithm, we must determine whether the solution is always optimal.

A simple example illustrates the greedy approach. Joe, the sales clerk, often encounters the problem of giving change for a purchase. Customers usually don't want to receive a lot of coins. For example, most customers would be aggravated if he gave them 87 pennies when the change was $0.87. Therefore, his goal is not only to give the correct change, but to do so with as few coins as possible. A solution to an instance of Joe's change problem is a set of coins that adds up to the amount he owes the customer, and an optimal solution is such a set of minimum size. A greedy approach to the problem could proceed as follows. Initially there are no coins in the change.

151