بسم الله الرحمن الرحیم

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

مبحث چهارم

روش‌های طراحی الگوریتم

روش تقسیم و غلبه

Methods of Algorithm Design: Divide and Conquer

کاظم فولادی قلعه

دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی

دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/algorithm

برای حل یک مسئله با روش تقسیم و غلبه:

- **تقسیم** نمونه‌ای از یک مسئله به یک یا چند نمونه‌ی کوچک‌تر
- **حل** نمونه‌های کوچکتر
  - *اگر نمونه‌های کوچک‌تر به اندازه‌ی کافی کوچک نبودند، از **بازگشت** استفاده می‌کنیم.*
  - *اگر نمونه‌های کوچک‌تر به اندازه‌ی کافی کوچک بودند، آنها را **مستقیماً** حل می‌کنیم.*
- **ترکیب** راه حل نمونه‌های کوچک‌تر برای یافتن راه حل نمونه‌ی اولیه

مسائلی با این روش قابل حل هستند که **قابل تقسیم** باشند
و بتوان راه‌حل مسئله را از **حل زیرمسئله‌های آن** پیدا کرد.

محاسبه‌ی مرتبه برای توابع بازگشتی تقسیم و غلبه

قضیه‌ی اصلی

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,n^p$$

$$f(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & ,a > b^p \\ \Theta(n^p \log_b n) & ,a = b^p \\ \Theta(n^p) & ,a < b^p \end{cases}$$

محاسبه‌ی مرتبه برای توابع بازگشتی تقسیم و غلبه

قضیه‌ی اصلی برای حد بالا

$$f(n) \leq af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,n^p$$

$$f(n) \in \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & ,a > b^p \\ O(n^p \log_b n) & ,a = b^p \\ O(n^p) & ,a < b^p \end{cases}$$

محاسبه‌ی مرتبه برای توابع بازگشتی تقسیم و غلبه

قضیه‌ی اصلی برای حد پایین

$$f(n) \geq af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,n^p$$

$$f(n) \in \begin{cases} \Omega(n^{\log_b a}) & ,a > b^p \\ \Omega(n^p \log_b n) & ,a = b^p \\ \Omega(n^p) & ,a < b^p \end{cases}$$

مثال

1) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n, \quad T(1) = 0$

2) $T(n) = 10T(\frac{n}{5}) + n^2, \quad T(1) = 0$

3) $T(n) = 2T(\frac{n}{5}) + 6n^3, \quad T(1) = 6$

4) $T(n) = 40T(\frac{n}{3}) + 2n^3, \quad T(1) = 5$

5) $T(n) = 16T(\frac{n}{2}) + 7n^4, \quad T(1) = 1$

6) $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + 2n^2, \quad T(16) = 50$

7) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + \log_3 n, \quad T(1) = 0$

8) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n, \quad T(1) = 0.5$

9) $T(n) = T(\frac{n}{3}) + 1, \quad T(1) = 0$

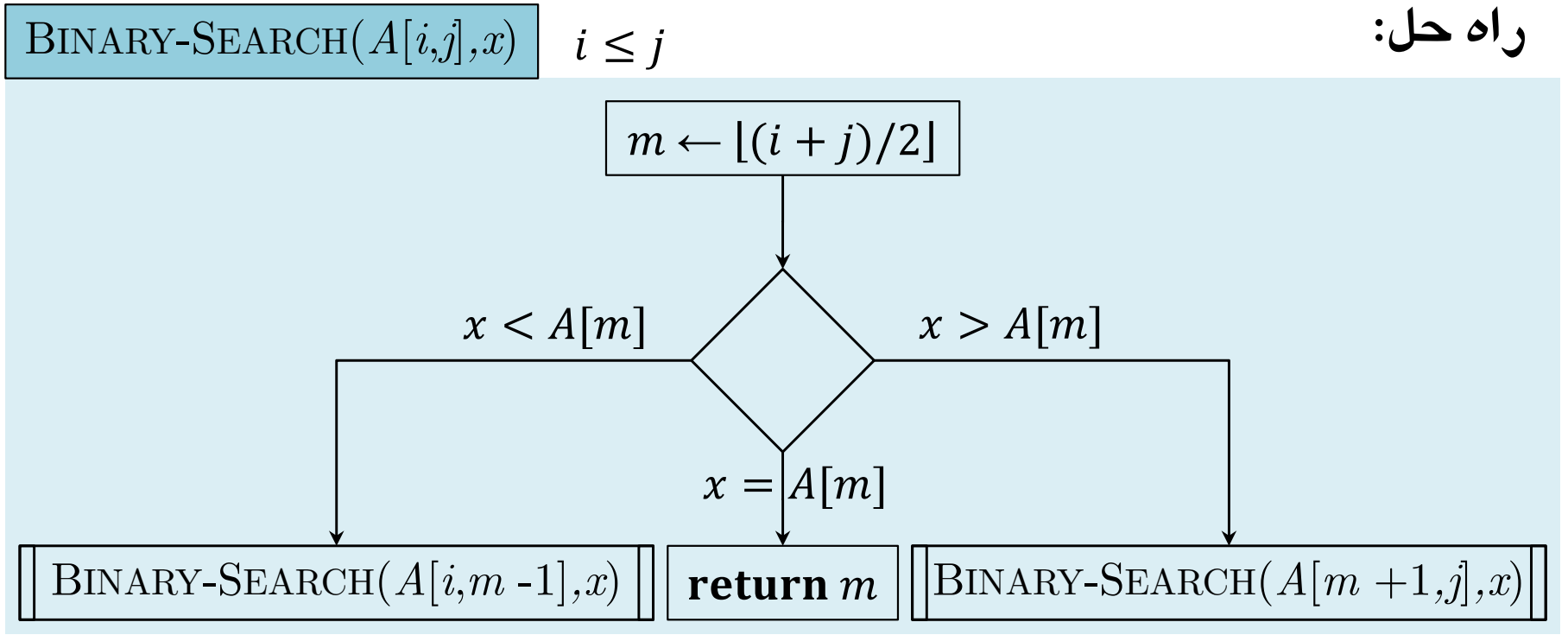
10) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1, \quad T(1) = 0$

جستجوی دودویی

BINARY SEARCH

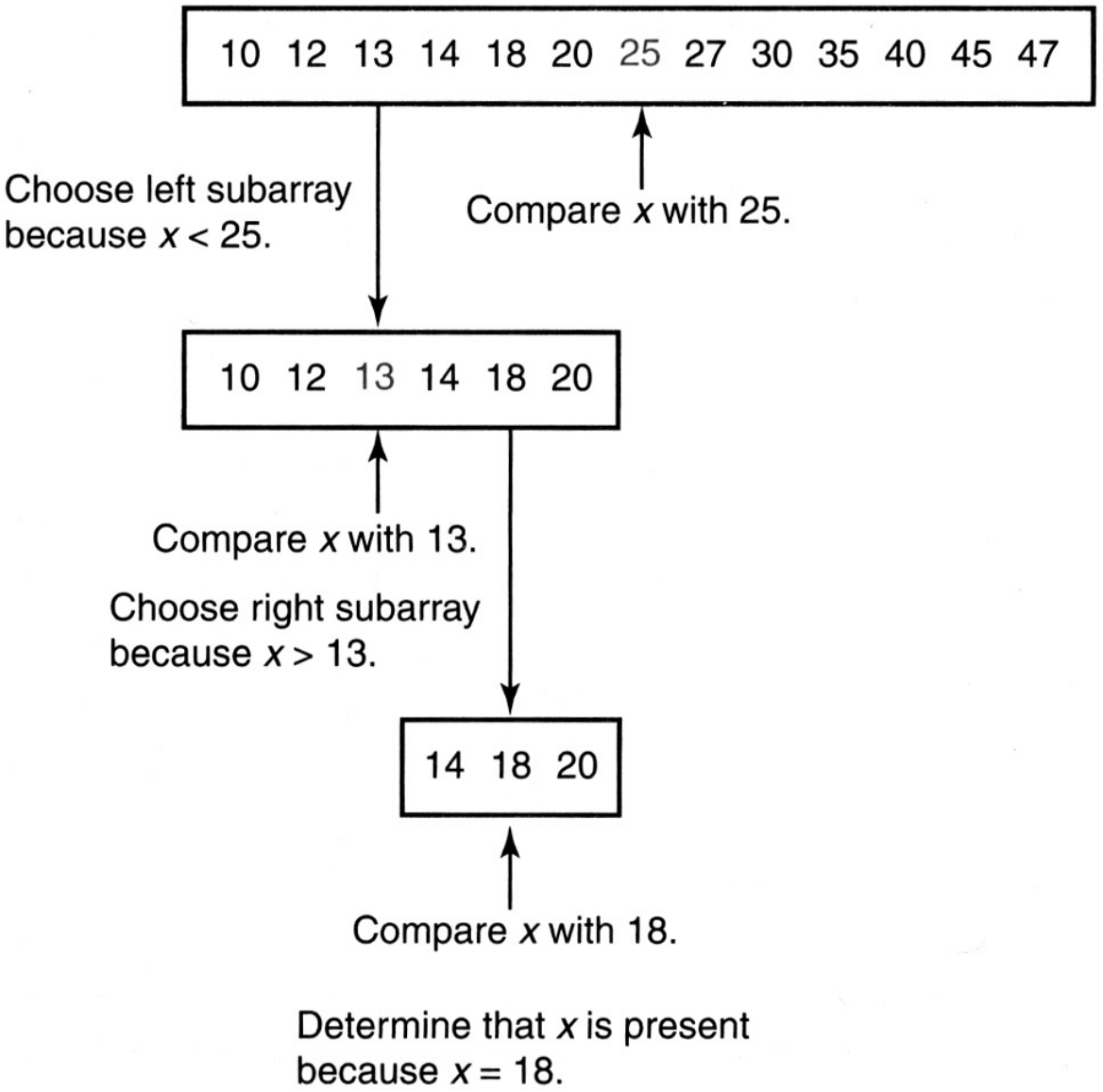
ورودی: آرایه‌ی مرتب‌شده‌ی A (صعودی) و کلید x
خروجی: اندیس کلید در آرایه، در صورت عدم وجود: صفر

راه حل:



جستجوی دودویی: مثال

$x = 18$



جستجوی دودویی

ورودی: آرایه‌ی مرتب‌شده‌ی A (صعودی) و کلید x
خروجی: اندیس کلید در آرایه، در صورت عدم وجود: صفر

```
BINARY-SEARCH(A, i, j, x)
    if i ≤ j then
        m ← ⌊(i+j)/2⌋
        if x = A[m] then
            return m
        else if x < A[m]
            return BINARY-SEARCH(A, i, m -1, x)
        else ▷ x > A[m]
            return BINARY-SEARCH(A, m +1, j, x)
    else
        return 0
```

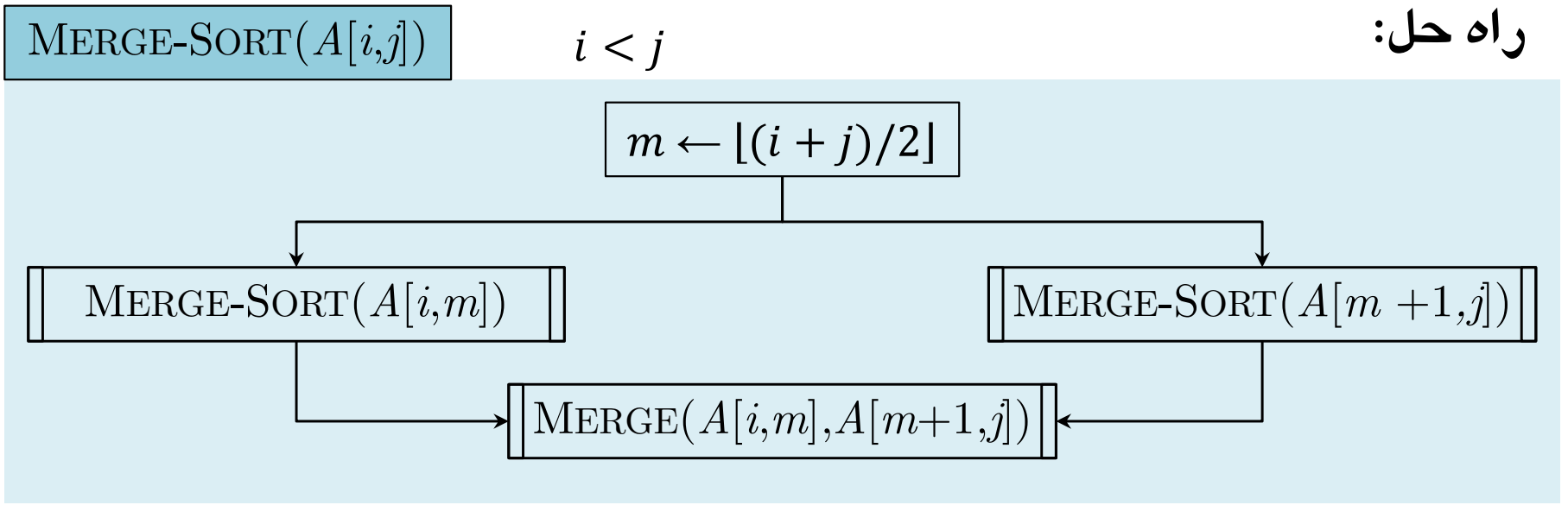
زمان اجرا: بر حسب تعداد اجرای عمل اصلی (مقایسه): $\Theta(\log_2 n)$

مرتب‌سازی ادغامی

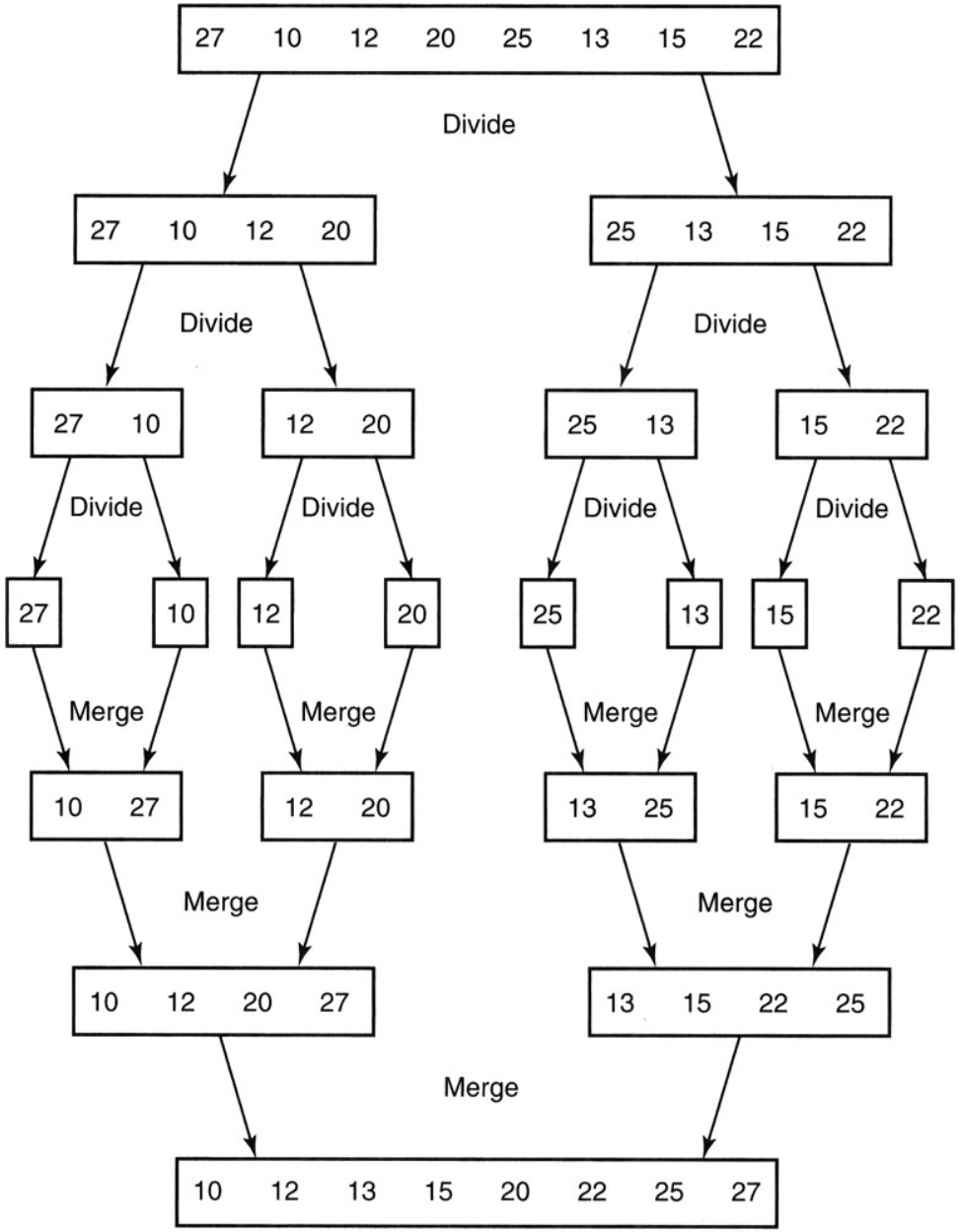
MERGE SORT

هدف: مرتب‌سازی آرایه‌ی $A[1..n]$ به صورت صعودی

راه حل:



مرتب‌سازی ادغامی: مثال



مرتب‌سازی ادغامی

MERGE SORT

هدف: مرتب‌سازی آرایه‌ی $A[1..n]$ به صورت صعودی

```
MERGE-SORT(A, i, j)
    if i < j then
        m ← ⌊(i+j)/2⌋
        MERGE-SORT(A, i, m)
        MERGE-SORT(A, m+1, j)
        MERGE(A, i, m, j)
```

زمان اجرا: بر حسب تعداد اجرای عمل اصلی (مقایسه): $\Theta(n\log_2 n)$

الگوریتم ادغام دو آرایه‌ی مرتب

MERGE ALGORITHM

هدف: ایجاد یک آرایه‌ی مرتب از اجتماع دو آرایه‌ی مرتب کوچکتر X و Y

$$\text{MERGE}(X[1..n], Y[1..m]) =$$

$$\begin{cases} [\text{MERGE}(X[1..n-1], Y[1..m-1]), X[n], Y[m]] & , X[n] = Y[m] \\ [\text{MERGE}(X[1..n-1], Y[1..m]), X[n]] & , X[n] > Y[m] \\ [\text{MERGE}(X[1..n], Y[1..m-1]), Y[m]] & , X[n] < Y[m] \end{cases}$$

$$\text{MERGE}(X, [\,]) = X$$

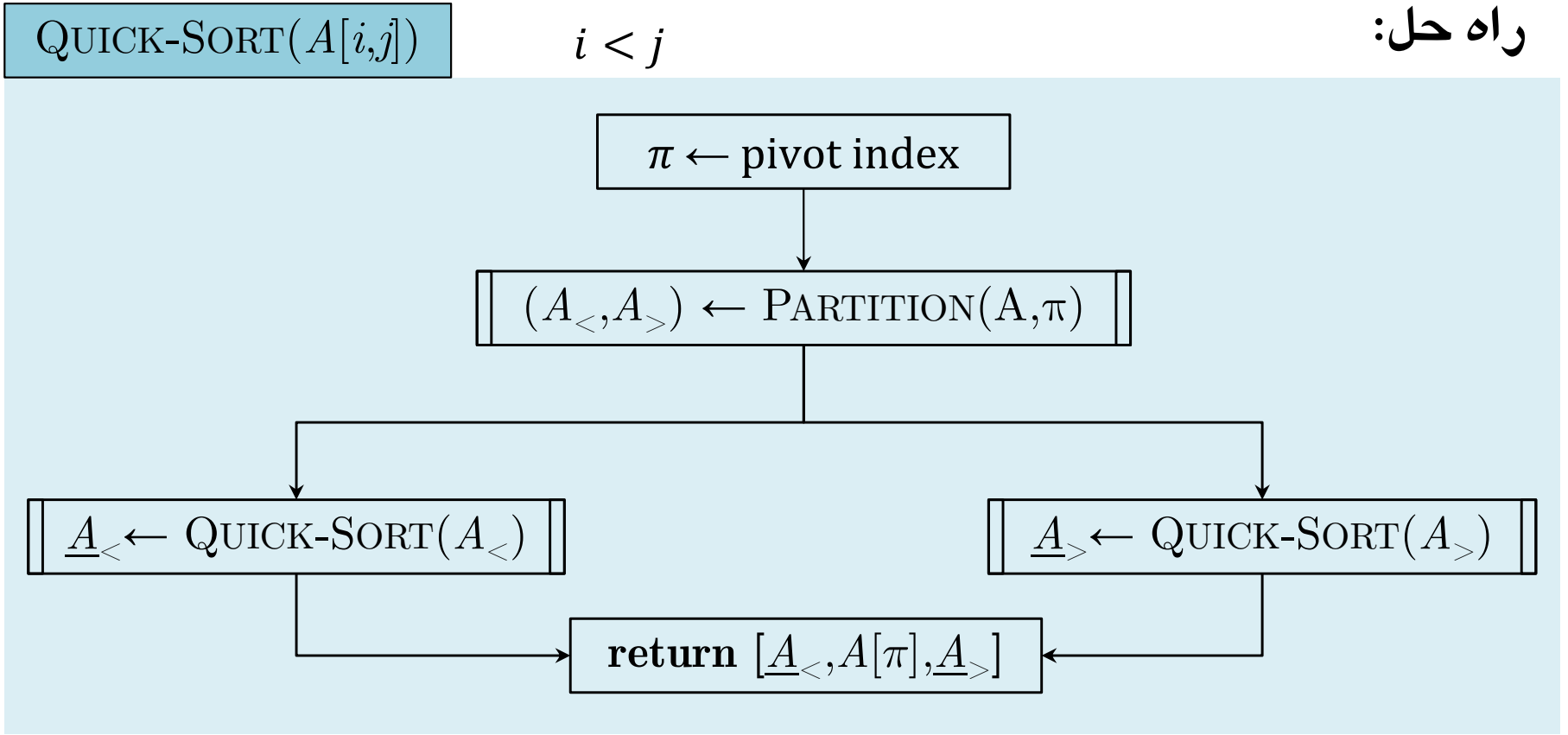
زمان اجرا: بر حسب تعداد اجرای عمل اصلی (مقایسه): حداکثر $n + m - 1$
زمان اجرا: بر حسب تعداد اجرای عمل اصلی (جابجایی): $n + m$

مرتب‌سازی سریع

QUICK SORT

هدف: مرتب‌سازی آرایه‌ی $A[1..n]$ به صورت صعودی

راه حل:



الگوریتم افراز یک آرایه‌ی بر اساس عنصر محوری

PARTITION ALGORITHM BASED ON PIVOT ITEM

هدف: افراز آرایه به دو زیرآرایه از عناصر کوچکتر و بزرگتر از عنصر محوری

$$\text{QUICK-SORT}(X[1..n]) = (\text{QUICK-SORT}(X_<), X[\pi], \text{QUICK-SORT}(X_>))$$
$$\text{QUICK-SORT}([\,]) = [\,]$$

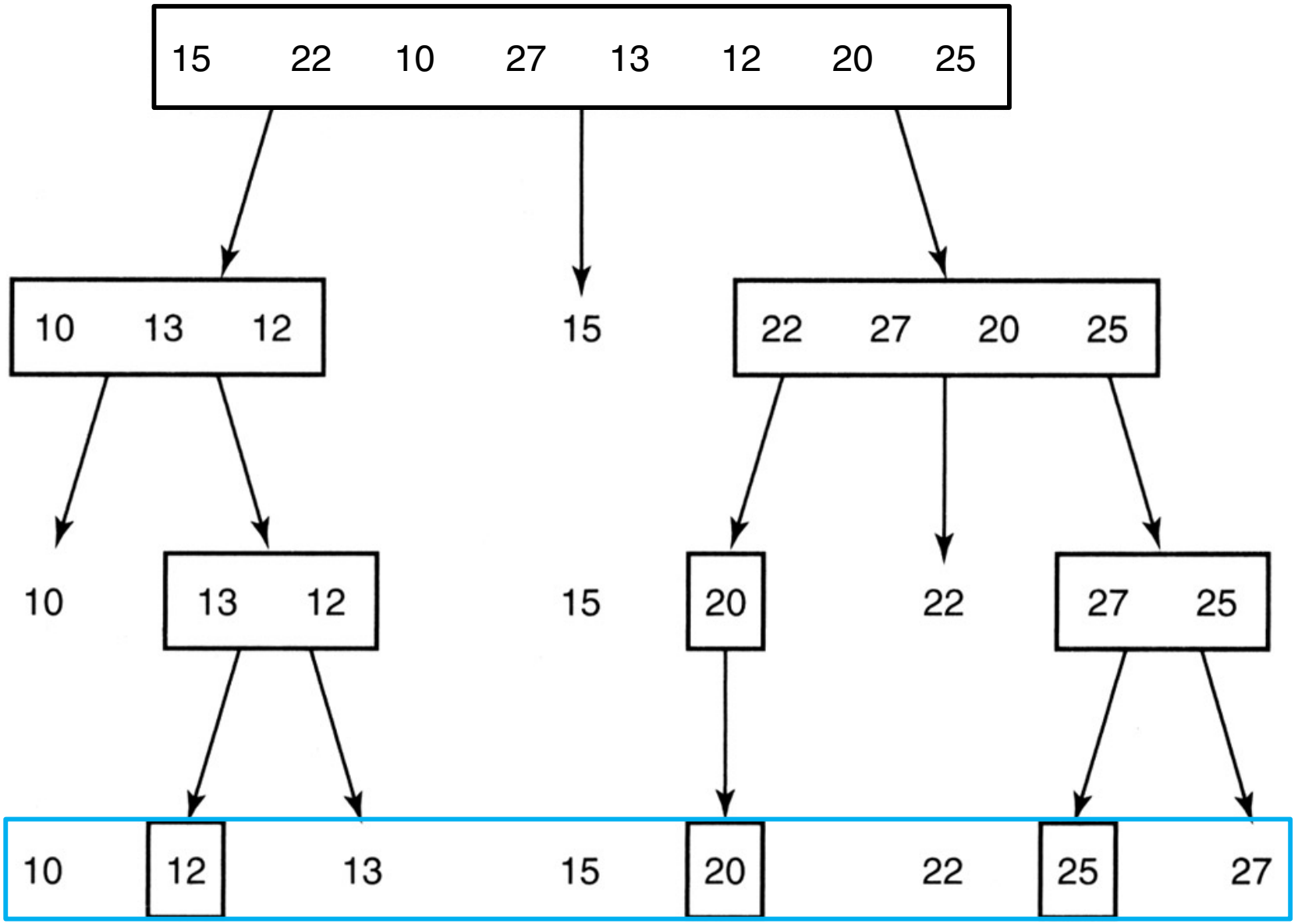
افراز:

$X_<$: آرایه‌ی X پس از حذف عناصر بزرگ‌تر از یا مساوی با $X[\pi]$

$X_>$: آرایه‌ی X پس از حذف عناصر کوچک‌تر از یا مساوی با $X[\pi]$

زمان اجرا: بر حسب تعداد اجرای عمل اصلی (مقایسه): $n-1$
(بجز عنصر محوری، همه‌ی عنصرها باید با عنصر محوری مقایسه شوند)

مرتب‌سازی سریع: مثال



مرتب‌سازی سریع

QUICK SORT

هدف: مرتب‌سازی آرایه‌ی $A[1..n]$ به صورت صعودی

```
QUICK-SORT(A, i, j)
    π ← 1
    if i < j then
        π ← PARTITION(A, i, π, j)
        QUICK-SORT(A, i, π-1)
        QUICK-SORT(A, π+1, j)
```

زمان اجرا بدترین حالت: بر حسب عمل اصلی (مقایسه): $W(n) = O(n^2)$

زمان اجرا حالت متوسط: عمل اصلی (مقایسه): $A(n) = \Theta(n\log_2 n)$

انتخاب نام مرتب‌سازی سریع، به دلیل عملکرد الگوریتم در حالت متوسط است!

روش استراسن برای ضرب دو ماتریس

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 + M_3 - M_2 + M_6 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$
$$M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

زمان اجرا (الگوریتم معمولی):
بر حسب عمل اصلی (ضرب): $\theta(n^3)$

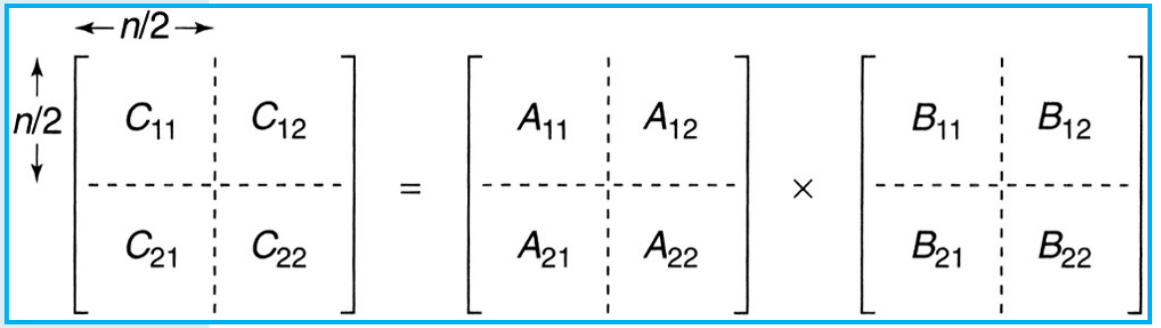
روش استراسن برای ضرب دو ماتریس

STRASSEN(A, B, n)
  if $n > 1$ **then**
    $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \leftarrow$ divide A
    $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \leftarrow$ divide B
    $M_1 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{11} + A_{22}, B_{11} + B_{22}, \frac{n}{2})$
    $M_2 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{21} + A_{22}, B_{11}, \frac{n}{2})$
    $M_3 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{11}, B_{12} - B_{22}, \frac{n}{2})$
    $M_4 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{22}, B_{21} - B_{11}, \frac{n}{2})$
    $M_5 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{11} + A_{12}, B_{22}, \frac{n}{2})$
    $M_6 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{21} - A_{11}, B_{11} + B_{12}, \frac{n}{2})$
    $M_7 \leftarrow \text{STRASSEN}(A_{12} - A_{22}, B_{21} + B_{22}, \frac{n}{2})$
    $C_{11} \leftarrow M_1 + M_4 - M_5 + M_7$
    $C_{12} \leftarrow M_3 + M_5$
    $C_{21} \leftarrow M_2 + M_4$
    $C_{22} \leftarrow M_1 + M_3 - M_2 + M_6$
    $C \leftarrow \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$
    return C
  else return $A * B$

زمان اجرا (الگوریتم استراسن):
بر حسب عمل اصلی (ضرب): $\theta(n^{\log_2 7})$

$$\begin{cases} T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_2 7} = n^{2.81}$$



ضرب اعداد صحیح بزرگ

مثال

هر رقم در یک خانه‌ی آرایه:

$\frac{5}{S[6]}$	$\frac{4}{S[5]}$	$\frac{3}{S[4]}$	$\frac{1}{S[3]}$	$\frac{2}{S[2]}$	$\frac{7}{S[1]}$

$$\underbrace{567,832}_{6\ \text{digits}} = \underbrace{567}_{3\ \text{digits}} \times 10^3 + \underbrace{832}_{3\ \text{digits}}$$

$$\underbrace{9,423,723}_{7\ \text{digits}} = \underbrace{9423}_{4\ \text{digits}} \times 10^3 + \underbrace{723}_{3\ \text{digits}}$$

$$\begin{aligned} 567,832 \times 9,423,723 &= (567 \times 10^3 + 832) \times (9423 \times 10^3 + 723) \\ &= (567 \times 9423) \times 10^6 \\ &\quad + (567 \times 723 + 9423 \times 832) \times 10^3 \\ &\quad + (832 \times 723) \end{aligned}$$

ضرب اعداد صحیح بزرگ

حالت کلی: الگوریتم استاندارد

$$u = \underbrace{x}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ digits}} \quad \underbrace{y}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ digits}}$$

$$v = \underbrace{w}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ digits}} \quad \underbrace{z}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ digits}}$$

$$u = x \times 10^m + y$$
$$v = w \times 10^m + z$$

$$u \times v = (x \times 10^m + y)(w \times 10^m + z)$$
$$= wx \times 10^{2m} + (xz + yw) \times 10^m + yz$$

$W(n) = 4W\left(\frac{n}{2}\right) + cn$
$W(s) = 0$

زمان اجرا (الگوریتم معمولی):
بر حسب عمل اصلی (ضرب): $\theta(n^2)$

$$m = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

ضرب اعداد صحیح بزرگ

حالت کلی: الگوریتم بهبودیافته

$$u = \boxed{x \mid y}$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ digits $\quad \lceil \frac{n}{2} \rceil$ digits

$$v = \boxed{w \mid z}$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ digits $\quad \lceil \frac{n}{2} \rceil$ digits

مقادیر زیر باید تعیین شوند:

$$xw, \qquad xz + yw, \qquad yz$$

$$\begin{aligned} r &= (x + y)(w + z) \\ &= xw + (xz + yw) + yz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

با این محاسبه تعداد ضرب‌ها از چهار به سه کاهش می‌یابد:

$$xz + yw = r - xw - yz$$

ضرب اعداد صحیح بزرگ

$u =$ | x | y |
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ digits $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ digits

$v =$ | w | z |
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ digits $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ digits

زمان اجرا (الگوریتم بهبود یافته):
بر حسب عمل اصلی (ضرب): $\theta(n^{\log_2 3})$

$$\begin{cases} T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) \\ T(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow T(n) = n^{\log_2 3} = n^{1.58}$$

LARGE-NUMBERS-MULTIPLY$(u,\ v,\ n)$
  if $n > 1$ **then**
    $(x,y) \leftarrow$ divide$(u, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $(w,z) \leftarrow$ divide$(v, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $xw \leftarrow$ LARGE-NUMBERS-MULTIPLY$(x,\ w, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $yz \leftarrow$ LARGE-NUMBERS-MULTIPLY$(y,\ z, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $r \leftarrow$ LARGE-NUMBERS-MULTIPLY$(x+y,\ w+z, \lfloor n/2 \rfloor)$
    return $wx \times 10^{2m} + (r - xw - yz) \times 10^{m} + yz$
  else
    return $u \times v$

ضرب در توان‌های ۱۰ با شیفت به چپ آرایه انجام می‌شود.
جمع و تفریق دو عدد n رقمی هم در زمان خطی n انجام می‌شود.

تورنمت بازی‌ها

در یک جام حذفی، n تیم شرکت می‌کنند. در دور نخست، $n/2$ بازی برگزار می‌شود و $n/2$ برنده در دور بعدی بازی می‌کنند (مساوی نداریم) و همین طور تا آخر:

- تعداد بازی‌ها در کل چند تاست؟
- تعداد دورهای بازی چند تاست؟

$$\boxed{n = 2^k}$$

$$\begin{cases} f(n) = f(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2} \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(n) = n - 1$$

تعداد بازی‌ها

$$\begin{cases} g(n) = g(\frac{n}{2}) + 1 \\ g(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow g(n) = \log_2 n$$

تعداد دورها

کجا نباید از روش تقسیم و غلبه استفاده کرد؟

وقتی زیرمسئله‌ها با هم همپوشانی پیدا می‌کنند:

- وقتی نمونه‌ای به اندازه‌ی n به دو یا چند نمونه تقسیم می‌شود که اندازه‌ی آنها نیز تقریباً n است.
  - ❖ در این صورت زمان اجرا نمایی می‌شود.

- وقتی نمونه‌ای به اندازه‌ی n به تقریباً n نمونه با اندازه‌ی n/c تقسیم شود که $c>1$ باشد.
  - ❖ در این صورت زمان اجرا بدتر از نمایی (فاکتوریل) می‌شود.

❋ اگر مسئله‌ای **ذاتاً** نیاز به زمان‌های نمایی و بدتر از نمایی داشته باشد، استفاده از روش تقسیم و غلبه منطقی است.

تعیین مقادیر آستانه

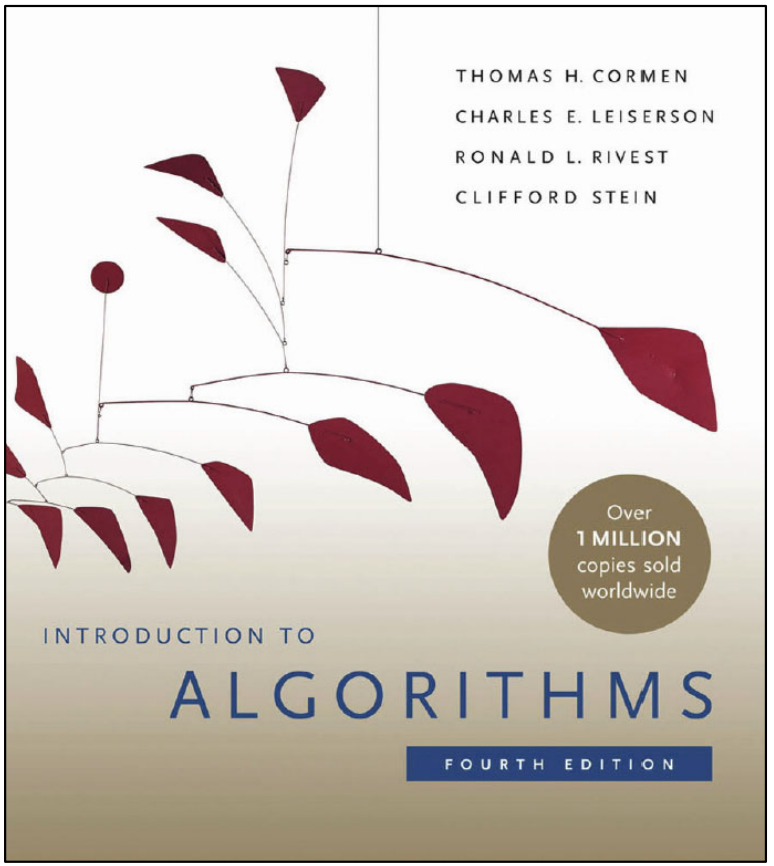
THRESHOLDS

تعیین مقداری از اندازه‌ی ورودی که به ازای مقادیر کمتر از آن فراخوانی بازگشتی کارایی کمتری دارد:

در اینجا بهتر است از الگوریتم دیگری استفاده شود.

❊ مقدار آستانه‌ی بهینه ممکن است منحصر به فرد نباشد!

مرجع



T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein,
Introduction to Algorithms,
4th Edition, MIT Press, 2022.

Chapter 4

4 Divide-and-Conquer

The divide-and-conquer method is a powerful strategy for designing asymptotically efficient algorithms. We saw an example of divide-and-conquer in Section 2.3.1 when learning about merge sort. In this chapter, we'll explore applications of the divide-and-conquer method and acquire valuable mathematical tools that you can use to solve the recurrences that arise when analyzing divide-and-conquer algorithms.

Recall that for divide-and-conquer, you solve a given problem (instance) recursively. If the problem is small enough—the *base case*—you just solve it directly without recursing. Otherwise—the *recursive case*—you perform three characteristic steps:

Divide the problem into one or more subproblems that are smaller instances of the same problem.

Conquer the subproblems by solving them recursively.

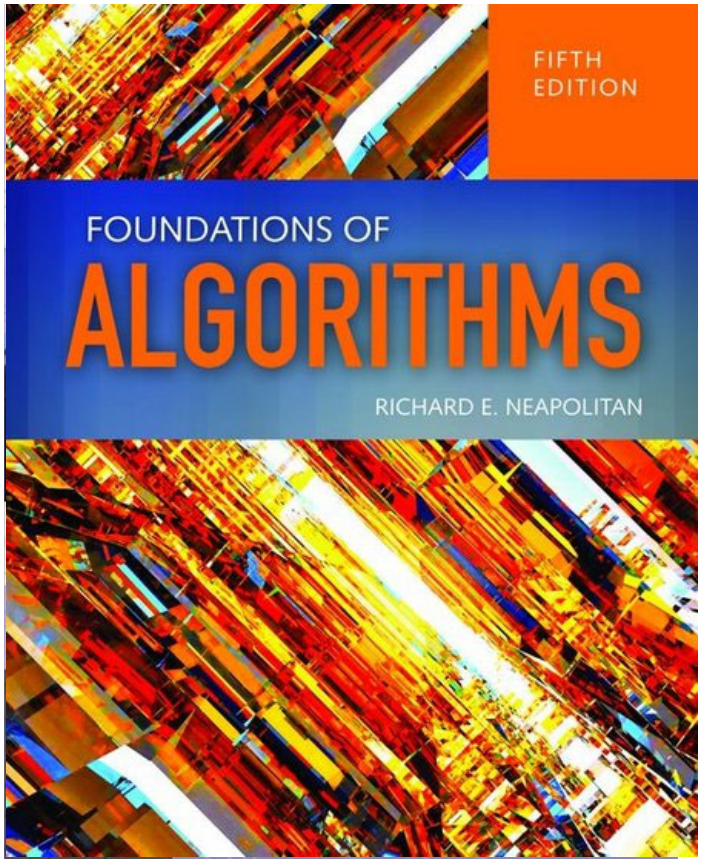
Combine the subproblem solutions to form a solution to the original problem.

A divide-and-conquer algorithm breaks down a large problem into smaller subproblems, which themselves may be broken down into even smaller subproblems, and so forth. The recursion *bottoms out* when it reaches a base case and the subproblem is small enough to solve directly without further recursing.

Recurrences

To analyze recursive divide-and-conquer algorithms, we'll need some mathematical tools. A *recurrence* is an equation that describes a function in terms of its value on other, typically smaller, arguments. Recurrences go hand in hand with the divide-and-conquer method because they give us a natural way to characterize the running times of recursive algorithms mathematically. You saw an example of a recurrence in Section 2.3.2 when we analyzed the worst-case running time of merge sort.

مرجع



R.E. Neapolitan,
Foundations of Algorithms,
5th Edition, Jones and Bartlett Publishers, 2015.

Chapter 2

Chapter 2

Divide-and-Conquer

Our first approach to designing algorithms, divide-and-conquer, is patterned after the brilliant strategy employed by the French emperor Napoleon in the Battle of Austerlitz on December 2, 1805. A combined army of Austrians and Russians outnumbered Napoleon's army by about 15,000 soldiers. The Austro-Russian army launched a massive attack against the French right flank. Anticipating their attack, Napoleon drove against their center and split their forces in two. Because the two smaller armies were individually no match for Napoleon, they each suffered heavy losses and were compelled to retreat. By *dividing* the large army into two smaller armies and individually conquering these two smaller armies, Napoleon was able to *conquer* the large army.

The ***divide-and-conquer*** approach employs this same strategy on an instance of a problem. That is, it divides an instance of a problem into two or more smaller instances. The smaller instances are usually instances of the original problem. If solutions to the smaller instances can be obtained readily, the solution to the original instance can be obtained by combining these solutions. If the smaller instances are still too large to be solved readily, they can be divided into still smaller instances. This process of dividing the instances continues until they are so small that a solution is readily obtainable.

The divide-and-conquer approach is a ***top-down*** approach. That is, the solution to a *top-level* instance of a problem is obtained by going *down* and obtaining solutions to smaller instances. The reader may recognize this as the method used by recursive routines. Recall that when writing recursion, one thinks at the problem-solving level and lets the system handle the details of obtaining the solution (by means of stack manipulations). When developing a divide-and-conquer algorithm, we usually think at this level and write it as a recursive routine. After this, we can sometimes create a more efficient iterative version of the algorithm.

We now introduce the divide-and-conquer approach with examples, starting with Binary Search.

51