

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

مبحث هفدهم

مباحث پیشرفته در طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

نظریه‌ی NP-کامل

NP-Completeness Theory

کازم فولادی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/algorithm>

مسئله‌ها

PROBLEMS

<p>مسائل محاسبه‌ناپذیر <i>Uncomputable Problems</i></p>	<p>مسائل محاسبه‌پذیر <i>Computable Problems</i></p>								
<p>مسائل غیر قابل حل توسط کامپیوتر</p>	<p>مسائل قابل حل توسط کامپیوتر</p>								
<p>مثل: مسئله‌ی توقف در ماشین تورینگ</p>	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="752 456 1062 580"> <p>مسائل رام‌نشدنی <i>Intractable Problems</i></p> </td> <td data-bbox="1062 456 1372 580"> <p>مسائل رام‌شدنی <i>Tractable Problems</i></p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="752 580 1062 630"> <p>مسائل دشوار</p> </td> <td data-bbox="1062 580 1372 630"> <p>مسائل آسان</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="752 630 1062 678"> <p>زمان نمایی $O(k^n)$</p> </td> <td data-bbox="1062 630 1372 678"> <p>زمان چندجمله‌ای $O(n^k)$</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="752 678 1062 715"> <p>مثل: مسئله‌ی برج‌های هانوی</p> </td> <td data-bbox="1062 678 1372 715"> <p>مثل: مسئله‌ی مرتب‌سازی آرایه</p> </td> </tr> </table>	<p>مسائل رام‌نشدنی <i>Intractable Problems</i></p>	<p>مسائل رام‌شدنی <i>Tractable Problems</i></p>	<p>مسائل دشوار</p>	<p>مسائل آسان</p>	<p>زمان نمایی $O(k^n)$</p>	<p>زمان چندجمله‌ای $O(n^k)$</p>	<p>مثل: مسئله‌ی برج‌های هانوی</p>	<p>مثل: مسئله‌ی مرتب‌سازی آرایه</p>
<p>مسائل رام‌نشدنی <i>Intractable Problems</i></p>	<p>مسائل رام‌شدنی <i>Tractable Problems</i></p>								
<p>مسائل دشوار</p>	<p>مسائل آسان</p>								
<p>زمان نمایی $O(k^n)$</p>	<p>زمان چندجمله‌ای $O(n^k)$</p>								
<p>مثل: مسئله‌ی برج‌های هانوی</p>	<p>مثل: مسئله‌ی مرتب‌سازی آرایه</p>								

نظریه پیچیدگی



مسائل NP-کامل

NP-COMPLETE PROBLEMS

مسائل NP-کامل

دارای وضعیت نامشخص هستند:

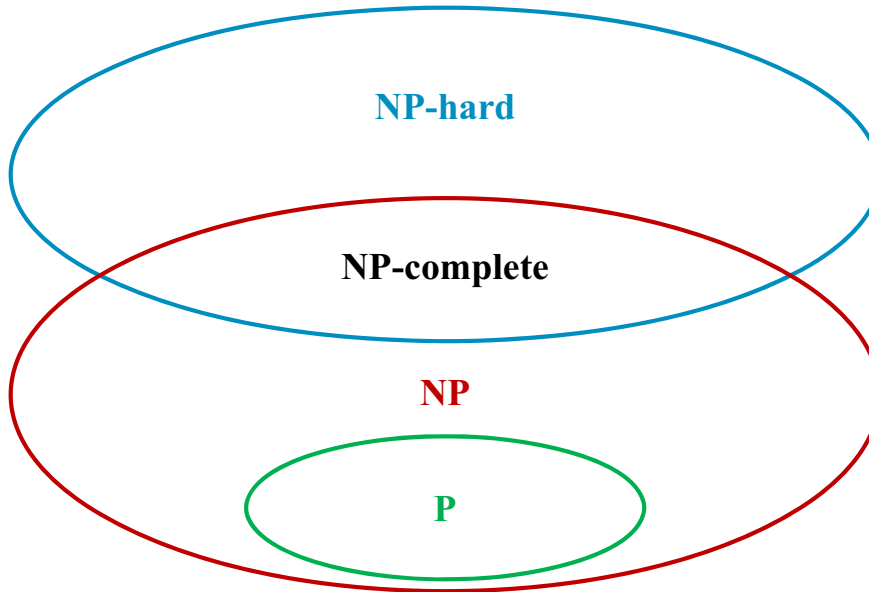
- هیچ الگوریتم زمان چندجمله‌ای تاکنون برای مسائل NP-کامل شناخته نشده است.
- هیچ کس تاکنون نتوانسته است ثابت کند که یکی از این مسائل الگوریتم زمان چندجمله‌ای ندارد.

مسئله‌ی

$$P = NP?$$

از ۱۹۷۱ تاکنون به‌عنوان یک مسئله‌ی باز در علم کامپیوتر نظری مطرح است.

کلاس‌های پیچیدگی زمانی

TIME COMPLEXITY CLASSES

$$NP\text{-hard} \cap NP = NP\text{-complete}$$

$$P \subseteq NP$$

$$NP\text{-complete} \subseteq NP$$

کلاس P

کلاس P

مجموعه مسائلی که توسط یک ماشین تورینگ قطعی
در زمان چندجمله‌ای پذیرفته می‌شوند.

یعنی برای این مسائل الگوریتمی قطعی وجود دارد که هر نمونه مسئله با اندازه‌ی ورودی n را در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند.

$$L \in P \Leftrightarrow \exists k \geq 0 \quad L \in O(n^k)$$

کلاس P نسبت به اجتماع، اشتراک، متمم‌گیری، الحاق و بستار ستاره‌ای، بسته است.

کلاس NP

کلاس NP

مجموعه مسائلی که توسط یک ماشین تورینگ غیرقطعی
در زمان چندجمله‌ای پذیرفته می‌شوند.

یعنی برای این مسائل الگوریتمی غیرقطعی وجود دارد که هر نمونه مسئله با اندازه‌ی ورودی n را در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند.

کلاس NP دسته‌ای از مسائل تصمیم‌گیری است که
اگر جوابی از مسئله را داشته باشیم،
در زمان چندجمله‌ای می‌توان درستی یا نادرستی آن را تعیین کرد.

کلاس NP نسبت به اجتماع، اشتراک الحاق و بستار ستاره‌ای بسته است.

کلاس NP معلوم نیست که نسبت به متمم‌گیری بسته است یا خیر؟

« حل مسئله » در برابر « تصدیق مسئله »

تصدیق مسئله <i>Verify</i>	حل مسئله <i>Solve</i>
بررسی درستی راه‌حل مسئله	یافتن راه‌حل مسئله

مثلا:
یک آرایه داده می‌شود و می‌پرسند
آیا این آرایه مرتب است؟

مثلا:
یک آرایه داده می‌شود و می‌خواهند
این آرایه به صورت صعودی مرتب شود.

مثلا:
یک گراف داده و یک دور داده می‌شود و می‌پرسند
آیا این یک دور همیلتونی گراف است؟

مثلا:
یک گراف داده می‌شود و می‌خواهند
یک دور همیلتونی در آن پیدا کنیم.

وقتی یک مسئله در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود، پس در زمان چندجمله‌ای تصدیق هم می‌شود، پس:

$$P \subseteq NP$$

اما ممکن است یک مسئله در زمان چندجمله‌ای تصدیق بشود، اما در زمان چندجمله‌ای حل نشود؟

«مسئله‌ی بهینه‌سازی» در برابر «مسئله‌ی تصمیم‌گیری»

مسئله‌ی تصمیم‌گیری <i>Decision Problem</i>	مسئله‌ی بهینه‌سازی <i>Optimization Problem</i>
راه‌حل در قالب دو حالتی (بله / خیر)	راه‌حل در قالب یک عدد (بهترین مقدار)

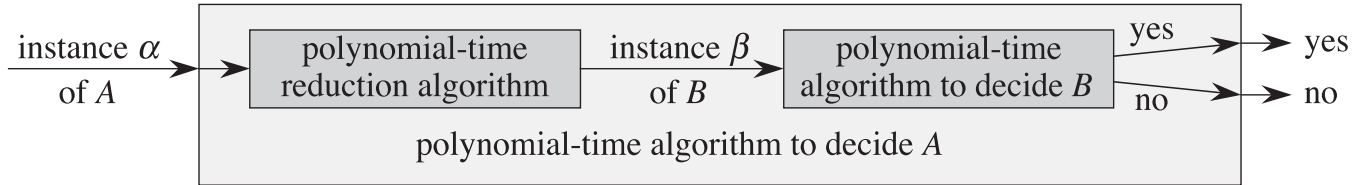
مثلاً:
یک گراف داده و یک تور داده می‌شود و می‌پرسند
آیا این یک تور بهینه‌ی گراف است؟

مثلاً:
یک گراف داده می‌شود و می‌خواهند
تور بهینه را در آن پیدا کنیم.

مسائل NP-complete از نوع مسائل تصمیم‌گیری هستند.

مسئله‌ی بهینه‌سازی متناظر با هر مسئله‌ی NP-complete در کلاس NP-hard قرار دارد.

REDUCTION



فرض می‌کنیم A و B مسائل تصمیم‌گیری هستند.
 اگر بتوانیم نمونه‌ی α از مسئله‌ی A را به نمونه‌ی β از مسئله‌ی B تبدیل کنیم،
 و خود این تبدیل در زمان چندجمله‌ای انجام شود، داریم:
 * اگر جواب β مثبت باشد، جواب α هم مثبت است.
 * اگر جواب α منفی باشد، جواب β هم منفی است.

در این صورت می‌گوییم:
 مسئله‌ی A به مسئله‌ی B کاهش‌پذیر چندجمله‌ای است

و می‌نویسیم:

A به B کاهش پیدا می‌کند:

$$A \leq_p B$$

زبان و مسئله

LANGUAGE AND PROBLEM

از دیدگاه نظریه‌ی زبان‌های صوری،
هر مسئله را می‌توان با نوعی انتزاع به یک زبان L روی الفبای Σ تبدیل کرد.

پاسخ مسئله‌ی A معادل با **تعلق / عدم تعلق** یک رشته به زبان L است.

کاهش

لم کاهش برای زبان‌های کلاس P

REDUCTION

<p>اگر $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ زبان‌هایی باشند که</p> $L_1 \leq_P L_2$ <p>آن‌گاه</p> $L_2 \in P$ <p>نتیجه می‌دهد که</p> $L_1 \in P$	لم
--	----

کلاس NP-complete

کلاس NP-complete

زبان $L \subseteq \Sigma^*$ در صورتی عضو کلاس NP-complete است که دو شرط زیر را داشته باشد:

$$L \in \text{NP} \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ برای هر مسئله‌ی } L' \in \text{NP} \text{ داشته باشیم: } L' \leq_p L$$

یعنی زبان NP باشد و هر زبان NP دیگر در زمان چندجمله‌ای به آن زبان کاهش پیدا کند.

منظور از $L' \leq_p L$ این است که تابع محاسبه‌پذیر (تورینگ) وجود دارد که

$$\forall x (x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L)$$

به طوری که $f \in O(n^k)$

کلاس NP-complete

قضیه‌ی کاهش

قضیه

اگر مسئله‌ی A یک مسئله‌ی NP-complete باشد،
برای هر مسئله‌ی NP-complete دیگر مثل B داریم:

$$B \leq_p A$$

کلاس NP-hard

کلاس NP-hard

مسئله‌ی A را NP-hard می‌نامیم هرگاه
برای هر مسئله‌ی $B \in NP$ داشته باشیم $B \leq_p A$

اگر $L \leq_p L'$ و $L' \in NP$ -complete آن‌گاه $L \in NP$ -hard است.

کلاس NP-hard

قضیه

قضیه

اگر یک مسئله‌ی NP-complete یا NP-hard در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل NP در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود، یعنی

$$P = NP$$

کلاس co-NP

کلاس co-NP

زبان (مسئله‌ی) A متعلق به کلاس co-NP است هرگاه
متمم آن متعلق به NP باشد، اما خودش را نمی‌دانیم متعلق به NP هست یا نه

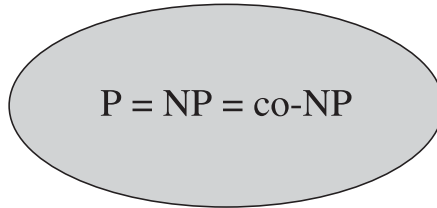
$$\text{co-NP} = \{L : \bar{L} \in \text{NP}\}$$

اگر $L \in \text{P}$ و $L' \in \text{P}$ و $\text{P} \subseteq \text{NP}$ آن‌گاه $L \in \text{co-NP}$ است.

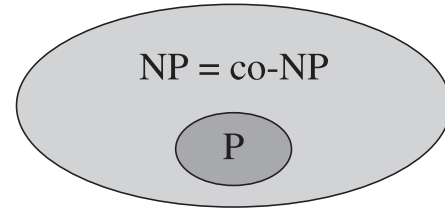
برای مثال، مسئله‌ی تشخیص راست‌گو بودن یک گزاره‌ی بولی (تشخیص tautology) متعلق به co-NP است.

کلاس co-NP

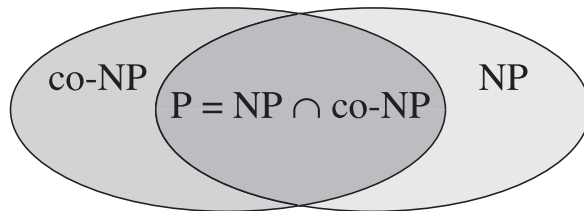
چهار حالت ممکن برای نسبت میان P، NP و co-NP



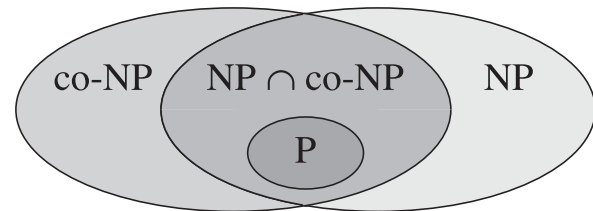
(a)



(b)

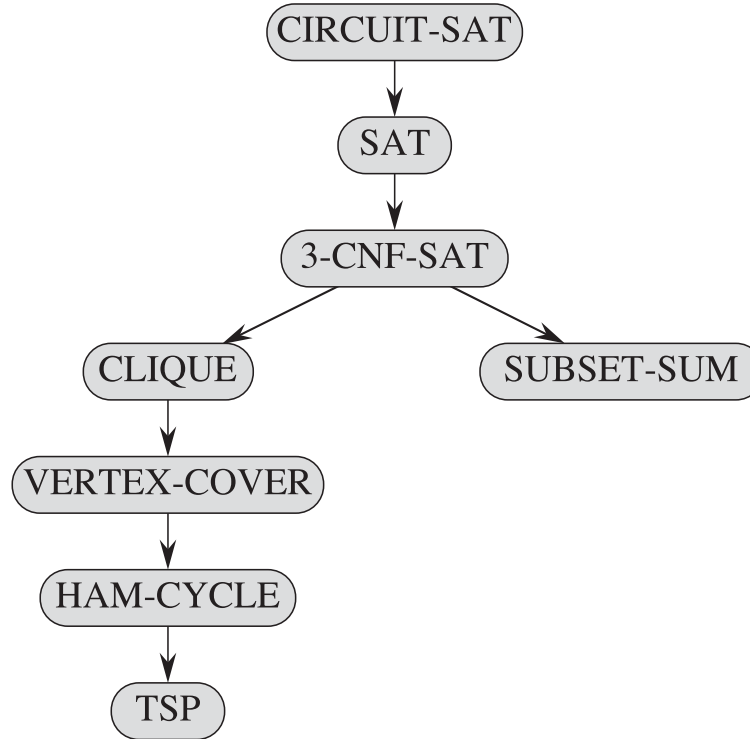


(c)



(d)

کاهش پذیری مسئله‌ها



مسئله‌ی مرتب‌سازی

P

مسئله‌ی مرتب‌سازی
Sorting Problem

مرتب‌سازی آرایه‌ی A شامل n عنصر

$$\Omega(n \lg n)$$

مسئله‌ی جستجو در لیست

P

مسئله‌ی جستجو در لیست
List Searching Problem

جستجو به دنبال x در آرایه‌ی A شامل n عنصر

$$O(n)$$

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک منبع

P

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر تک منبع
Single-Source Shortest Path Problem (SSSP)

یافتن کوتاه‌ترین مسیر از یک رأس (مبدأ) به سایر رؤس یک گراف

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر میان همه‌ی جفت‌ها

P

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر میان همه‌ی جفت‌ها
All-Pairs Shortest Path Problem (APSP)

یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو رأس یک گراف

مسئله‌ی یافتن تور اویلری

P

مسئله‌ی یافتن تور اویلری

Euler Tour Problem

یافتن تور اویلری در یک گراف
(دوری که هر یال را دقیقاً یک بار ملاقات می‌کند، هر چند ممکن از بعضی رئوس تکرار شوند)

$$O(E)$$

مسئله‌ی ارضاپذیری 2-CNF

P

مسئله‌ی ارضاپذیری 2-CNF

2-CNF Satisfiability Problem (2-CNF SAT)

تعیین ارضاپذیر بودن یک عبارت منطقی در فرم 2-CNF
(ترکیب عطفی کلاوزهایی با دقیقاً دو لیترال)

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

آیا انتسابی به متغیرهای منطقی وجود دارد که باعث شود کل عبارت **true** شود؟

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها در نمایش یکانی

P

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها در نمایش یکانی

Unary Subset Sum Problem

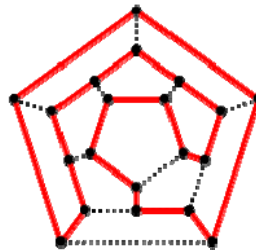
یک مجموعه‌ی متناهی $S \subset \mathbb{N}$ و عدد $t \in \mathbb{N}$ داده شده است.
می‌خواهیم زیرمجموعه‌ی $A \subset S$ را به‌گونه‌ای بیابیم که
مجموع عناصر آن برابر با t شود. (با فرض نمایش t به صورت یکانی)

مسئله‌ی مسیر همیلتونی روی یک گراف جهت‌دار بدون دور

P

مسئله‌ی مسیر همیلتونی روی یک گراف جهت‌دار بدون دور *Hamiltonian Path on a Directed Acyclic Graph Problem*

یافتن مسیر همیلتونی روی یک گراف جهت‌دار بدون دور
(مسیر ساده‌ای که از هر رأس دقیقاً یک بار می‌گذرد)



مسئله‌ی ۲-رنگ‌آمیزی گراف

P

مسئله‌ی ۲-رنگ‌آمیزی گراف
Graph 2-Coloring Problem

آیا یک گراف با ۲ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است؟
(به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟)

مسئله‌ی یکریختی گراف‌ها

NP-complete

مسئله‌ی یکریختی گراف‌ها
Graph Isomorphism Problem

آیا دو گراف G_1 و G_2 یکریخت هستند؟

مسئله‌ی یکرختی گراف‌ها

NP-complete

مسئله‌ی یکرختی زیرگراف‌ها
Subgraph Isomorphism Problem

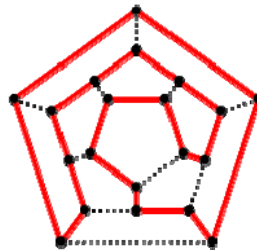
دو گراف G_1 و G_2 را می‌گیرد و مشخص می‌کند که آیا G_1 با زیرگرافی از G_2 یکرخت است یا خیر؟

مسئله‌ی دور همیلتونی

NP-complete

مسئله‌ی دور همیلتونی
Hamiltonian Cycle Problem

یافتن دور همیلتونی روی یک گراف
(دوری که از هر رأس دقیقاً یک بار می‌گذرد)



مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد

NP-complete

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد

Travelling Salesman Problem (TSP)

یافتن کوتاه‌ترین دور همیلتونی روی یک گراف
(کوتاه‌ترین دوری که از هر رأس دقیقاً یک بار می‌گذرد)

مسئله‌ی ارضاپذیری 3-CNF

NP-complete

مسئله‌ی ارضاپذیری 3-CNF

3-CNF Satisfiability Problem (3-CNF SAT)

تعیین ارضاپذیر بودن یک عبارت منطقی در فرم 3-CNF
(ترکیب عطفی کلاوزهایی با دقیقاً سه لیترال)

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

آیا انتسابی به متغیرهای منطقی وجود دارد که باعث شود کل عبارت **true** شود؟

مسئله‌ی ارضاپذیری مدار

NP-complete

NP-hard

مسئله‌ی ارضاپذیری مدار
Circuit Satisfiability Problem (CIRCUIT-SAT)

تعیین ارضاپذیر بودن یک مدار منطقی ترکیبی متشکل از AND ، OR ، NOT

آیا انتسابی به متغیرهای منطقی وجود دارد که باعث شود کل عبارت **true** شود؟

مسئله‌ی تعیین وجود مسیر ساده در گراف

NP-complete

مسئله‌ی وجود تعیین مسیر ساده در گراف
Determining Simple Paths in a Graph Problem

آیا یک گراف با تعداد معینی از یال‌ها حاوی مسیر ساده‌ای است یا خیر؟
(مسیر ساده = مسیر دون رأس تکراری)

مسئله‌ی طولانی‌ترین مسیر ساده در گراف

NP-complete

مسئله‌ی طولانی‌ترین مسیر ساده در گراف
Longest Simple Path in a Graph Problem

تعیین مسیر ساده‌ای با طول ماکزیمم در یک گراف
(مسیر ساده = مسیر بدون رأس تکراری)

مسئله‌ی تعیین وجود دور همیلتونی

NP-complete

مسئله‌ی تعیین وجود دور همیلتونی
Hamiltonian Cycle Existence Problem

آیا در یک گراف بدون جهت، دور همیلتونی وجود دارد؟
(دوری که هر رأس را دقیقاً یک بار ملاقات می‌کند)

مسئله‌ی تعیین وجود مسیر همیلتونی

NP-complete

مسئله‌ی تعیین وجود مسیر همیلتونی

Hamiltonian Path Existence Problem

آیا در یک گراف بدون جهت، مسیر همیلتونی وجود دارد؟
(مسیر ساده‌ای که هر رأس را دقیقاً یک بار ملاقات می‌کند)

مسئله‌ی تعیین کلیک در گراف

NP-complete

مسئله‌ی تعیین کلیک در گراف
Clique Problem

گراف بدون جهت $G = (V, E)$ داده شده است.
یک کلیک از G یک زیرگراف کامل از G است.
آیا G کلیک دارد؟

$K \subseteq V$ یک کلیک از G است هرگاه هر دو رأس دلخواه در K مجاور باشند.

مسئله‌ی تعیین پوشش رأسی در گراف

NP-complete

مسئله‌ی تعیین پوشش رأسی در گراف
Vertex-Cover Problem

گراف بدون جهت $G = (V, E)$ داده شده است.
یک پوشش رأسی C به صورت مجموعه‌ای از رئوس $C \subseteq V$ است که
هر یال $e \in E$ یک نقطه‌ی انتهایی در C باشد. آیا G پوشش رأسی دارد؟

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها

NP-complete

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها

Subset Sum Problem

یک مجموعه‌ی متناهی $S \subset \mathbb{N}$ و عدد $t \in \mathbb{N}$ داده شده است.
می‌خواهیم زیرمجموعه‌ی $A \subset S$ را به گونه‌ای بیابیم که
مجموع عناصر آن برابر با t شود.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح صفر-یک

NP-complete

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح صفر-یک
0-1 Integer Linear Programming Problem

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m عنصری باشد،
آیا بردار بولی n عنصری x وجود دارد که
 $Ax \leq b$ ؟

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح

NP-complete

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح
Linear Integer Programming Problem

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m عنصری باشد،
آیا بردار صحیح n عنصری x وجود دارد که
 $Ax \leq b$ ؟

مسئله تقسیم مجموعه

NP-complete

مسئله تقسیم مجموعه

Set Bisection Problem

مجموعه‌ی S از اعداد به عنوان ورودی داده می‌شود.
 آیا این مجموعه می‌تواند به دو زیرمجموعه‌ی A و $\bar{A} = S - A$ افزان شود به طوری که:

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in \bar{A}} x$$

مسئله‌ی ۳-رنگ‌آمیزی گراف

NP-complete

مسئله‌ی ۳-رنگ‌آمیزی گراف
Graph 3-Coloring Problem

آیا یک گراف با ۳ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است؟
(به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟)

مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف

NP-complete

مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف
Graph Coloring Problem

آیا یک گراف با n رنگ قابل رنگ‌آمیزی است؟ ($n \geq 3$)
(به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟)

مسئله‌ی کوله‌پشتی صفر-یک

NP-hard

مسئله‌ی کوله‌پشتی صفر-یک

0-1 Knapsack Problem

n عنصر با وزن‌ها و ارزش‌های مشخص و یک کوله‌پشتی با حداکثر ظرفیت وزنی W داریم. هدف، انتخاب زیرمجموعه‌ای از n عنصر با بالاترین مجموع ارزش بدون تجاوز از مجموع وزن W است.

مقایسه‌ی مسائل

NP

مسئله‌ی طولانی‌ترین مسیر ساده
Longest Simple Path Problem

مسئله‌ی یافتن دور همیتونی
Hamiltonian Cycle Problem

مسئله‌ی مسیر همیتونی
Hamiltonian Path Problem

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها
Subset Sum Problem

مسئله‌ی ۳-رنگ‌آمیزی گراف
Graph 3-Coloring Problem

مسئله‌ی ارضاپذیری 3-CNF
3-CNF Satisfiability Problem (3-CNF SAT)

P

مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر میان همه‌ی جفت‌ها
All-Pairs Shortest Path Problem (APSP)

مسئله‌ی یافتن تور اویلری
Euler Tour Problem

مسئله‌ی مسیر همیتونی روی یک گراف جهت‌دار بدون دور
Hamiltonian Path on a Directed Acyclic Graph Problem

مسئله‌ی مجموع زیرمجموعه‌ها در نمایش یکانی
Unary Subset Sum Problem

مسئله‌ی ۲-رنگ‌آمیزی گراف
Graph 2-Coloring Problem

مسئله‌ی ارضاپذیری 2-CNF
2-CNF Satisfiability Problem (2-CNF SAT)