



تکلیف شماره ۶

پخش ششم

تحلیل سرشکنی

AMORTIZED ANALYSIS

◇ مسئله‌های چندگزینه‌ای

۱) مجموع هزینه‌های سرشکن‌شده n عمل،۱) کران پایینی برای جمع هزینه‌های واقعی این n عمل است.۲) کران بالایی برای جمع هزینه‌های واقعی این n عمل است.۳) کران پایینی برای جمع هزینه‌های این n عمل در حالت میانگین است.۴) کران بالایی برای جمع هزینه‌های این n عمل در بدترین حالت است.

۲) در یک زمستان سرد، خرس قطبی n قطعه گوشت به اندازه‌های ۱، ۲ تا n را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه گوشت‌ها را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند. اگر اندازه‌ی گوشت عددی فرد بود، آن را به طور کامل می‌خورد ولی اگر اندازه‌ی گوشت زوج بود، آن را به دقت نصف می‌کند، یک نصف آن را می‌خورد و نصف دیگر را دوباره در غار قرار می‌دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می‌میرد. با این الگوریتم، این خرس چند روز می‌تواند زنده بماند؟

۱) $\Theta(n)$ روز ۲) $\Theta(\log_2 n)$ روز ۳) $\Theta(n \log_2 n)$ روز ۴) $\Theta(n^2)$ روز

۳) دنباله‌ای از 2^n عمل بر روی یک ساختمان داده انجام می‌شود. هزینه‌ی عمل i برابر با i است اگر i توانی از ۲ باشد وگرنه برابر با ۱ است. میانگین هزینه‌ی یک عمل دلخواه (یعنی مجموع هزینه‌ها تقسیم بر تعداد آنها) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۲ ۲) n ۳) ۳ ۴) $2n$

۴) یک شمارنده‌ی k بیتی در ابتدا مقدار صفر دارد. این شمارنده را $n = 2^k$ بار و هر بار یک واحد افزایش می‌دهیم. مجموع تعداد تغییرات بیت‌های این شمارنده از ۱ به ۰ یا از ۰ به ۱ چند تاست؟ این تعداد تقسیم بر $n = 2^k$ هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی هر عمل افزایش است.

۱) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{2^i}$ ۲) $\Theta(n^2)$ ۳) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{2^{i-1}}$ ۴) $\Theta(n \log_2 n)$

۵) یک آرایه‌ی پویا (Dynamic Array) با تابع پتانسیل $\Phi(D_i) = 2 \text{num}_i - \text{size}_i$ که تنها عمل درج (Insert) را پشتیبانی می‌کند، داده شده است. هزینه‌ی یک عمل درج در این ساختمان داده در حالت سرشکن‌شده کدام است؟

۱) $O(1)$ ۲) $O(n)$ ۳) $O(n^2)$ ۴) $O(\log_2 n)$

۶) یک شمارنده‌ی دودویی با b بیت از یک عدد دلخواه شروع به شمارش می‌کند و به تعداد k بار عمل «افزایش یک» (INCREMENT) را انجام می‌دهد. کدام گزینه در این مورد صحیح است؟

۱) هزینه‌ی هر افزایش برابر با $O(b)$ است

۲) هزینه‌ی سرشکن هر افزایش برابر با $O(1)$ است

۳) فقط اگر $k < \log_2 b$ ، هزینه‌ی سرشکن هر افزایش برابر با $O(1)$ است

۴) فقط اگر $k > b$ ، هزینه‌ی سرشکن هر افزایش برابر با $O(1)$ است

◇ مسئله‌های تشریحی

۱) آرایه‌ی A به طول n داده شده است که تمام درایه‌های آن در ابتدا صفر هستند. عمل درج زیر را n بار با مقادیر دلخواه x انجام می‌دهیم. با روش تابع پتانسیل، هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی هر عمل درج را به‌دست آورید.

```

INSERT( $x$ )
 $n \leftarrow n + 1$ 
 $t \leftarrow x$ 
for  $i \leftarrow 0$  to  $\lceil \log_2 n \rceil$  do
    if  $A[i] \neq 0$  then
         $t \leftarrow t + A[i]$ 
         $A[i] \leftarrow 0$ 
    else
         $A[i] \leftarrow t$ 
    return

```

۲) ساختمان داده‌ی شمارنده‌ی دودویی k بیتی را در نظر بگیرید. یک دنباله از n عملیات «افزایش یک» (INCREMENT) را بر روی این شمارنده در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه مقدار اولیه‌ی این شمارنده عدد b باشد، در بدترین حالت مجموع زمان مصرف شده برای این دنباله عملیات چیست؟ با استفاده از روش تابع پتانسیل، هزینه‌ی سرشکنی هر عمل «افزایش یک» را به‌دست آورید.