



## تکلیف شماره ۱

## بخش اول

## تحلیل الگوریتم‌ها

## ANALYSIS OF ALGORITHMS

◇ مسئله‌های چندگزینه‌ای

۱) کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$\log_2 n \in \Theta(\log_{10} n) \quad (۲)$$

$$10^n + n^{20} \notin \Theta(n^n) \quad (۱)$$

$$4n^3 + 7n \in \Omega(\log_2 n) \quad (۴)$$

$$\lceil \log_2 n \rceil! \in \Omega(n!) \quad (۳)$$

۲) الگوریتم بازگشتی زیر را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر، زمان اجرای این الگوریتم را بیان می‌کند؟

TEST( $n$ )if  $n \leq 2$  then

| return 1

else

| return TEST( $n - 2$ ) + TEST( $n - 2$ )

$$\Theta(2^n) \quad (۴)$$

$$\Theta(2^{n/2}) \quad (۳)$$

$$\Theta(n \log n) \quad (۲)$$

$$\Theta(n^2) \quad (۱)$$

۳) فرض می‌کنیم که سرعت کامپیوترها مقدار ثابتی باشد. در این صورت اگر زمان اجرای الگوریتمی با مرتبه‌ی  $T(n) = n$  برایورودی  $n = 10^6$  برابر با  $10^{-5}$  ثانیه باشد، برای ورودی  $n = 20^6$  چند ثانیه خواهد بود؟

$$2 \times 10^{-5} \quad (۴)$$

$$1,2 \times 10^{-5} \quad (۳)$$

$$2 \times 10^{-6} \quad (۲)$$

$$10^{-6} \quad (۱)$$

۴) اگر راه‌حل مسئله‌ای با اندازه‌ی  $n = 10^6$  با الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی  $T(n) = n^2$  روی یک کامپیوتر مفروض در مدت زمانیک میکروثانیه اجرا شود، همان مسئله با اندازه‌ی  $n = 10^8$  روی همان کامپیوتر در چه مدت زمانی اجرا می‌شود؟

$$\sqrt{10^8} \text{ ثانیه} \quad (۴)$$

$$10^8 \text{ میکروثانیه} \quad (۳)$$

$$10^8 \text{ میکروثانیه} \quad (۲)$$

$$10 \text{ میکروثانیه} \quad (۱)$$

۵) آرایه‌ی  $n$  عنصری  $A$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $n = 2^k$  باشد. الگوریتم MERGE-SORT بر روی  $A$ ۱) در بدترین حالت  $n \log_2 n - n + 1$  مقایسه میان عناصر آرایه انجام می‌دهد.۲) در بدترین حالت  $n \log_2 n + n - 1$  مقایسه میان عناصر آرایه انجام می‌دهد.۳) در بهترین حالت  $n \log_2 n - 2n - 1$  مقایسه میان عناصر آرایه انجام می‌دهد.۴) در بهترین حالت  $n \log_2 n - n - 1$  مقایسه میان عناصر آرایه انجام می‌دهد.۶) برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حداقل باید از چند ضرب استفاده کرد؟

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (۳)$$

$$n^2 \quad (۲)$$

$$n \quad (۱)$$

۷) زمان لازم برای اجرای قطعه برنامه‌ی زیر، از چه مرتبه‌ی برآورد می‌شود؟

```

for i ← 1 to n do
  for j ← n to i do
    for k ← 1 to n2 do
      sum ← sum + 1

```

$$\Omega(n^4) \quad (4) \qquad O(n^4) \quad (3) \qquad \Theta(n^3) \quad (2) \qquad \Theta(n^4) \quad (1)$$

۸ فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع دلخواه به صورت  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  باشند. به علاوه فرض کنید که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ . کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$g(n) \in O(f(n)), f(n) \in O(g(n)) \quad (2) \qquad f(n) \in O(g(n)), g(n) \notin \Omega(f(n)) \quad (1)$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)), g(n) \notin \Omega(f(n)) \quad (4) \qquad f(n) \in \Omega(g(n)), f(n) \notin \Theta(g(n)) \quad (3)$$

۹ راه حل معادله‌ی بازگشتی  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log_2 n!$  عبارت است از:

$$\Theta(n^2 \log_2 n) \quad (4) \qquad \Theta(n \log_2^2 n) \quad (3) \qquad \Theta(n \log_2 n) \quad (2) \qquad \Theta(n^2) \quad (1)$$

۱۰ کدام گزینه راه حل معادله‌ی بازگشتی زیر است؟ (با فرض  $n = 2^k$  و  $f(1) = 1$ )

$$f(n) = 3^n f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$f(n) = 9^{n-2} \quad (4) \qquad f(n) = 3^{n-1} \quad (3) \qquad f(n) = 9^{n-1} \quad (2) \qquad f(n) = 3^{n-2} \quad (1)$$

۱۱ دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$f(x)$  کدام گزینه بهترین بیان برای مرتبه‌ی رشد  $f(n)$  بر حسب  $n$  است؟

if  $x < 1$  then  
| return 1  
خطی (۱)

else  
| return  $f(x-1) + g(x)$   
نمایی (۲)

درجه‌ی دو (۳)

لگاریتمی (۴)

$g(x)$

if  $x < 2$  then  
| return 1

else  
| return  $f(x-1) + g(\frac{x}{2})$

۱۲ الگوریتم یافتن دو عنصر ماکزیمم و می‌نیمم در یک آرایه با  $N$  عنصر به صورت زیر داده شده است:

MAXMIN(A) حداکثر و حداقل تعداد مقایسه‌های دو عنصر از آرایه با یکدیگر به ترتیب برابر است با:

$min \leftarrow 1$  هر دو  $n$  (۱)

$max \leftarrow 1$  هر دو  $n-1$  (۲)

for  $i \leftarrow 2$  to  $N$  do  $n$  و  $2n$  (۳)

if  $A[i] < A[min]$  then  $n-1$  و  $2(n-1)$  (۴)

|  $min \leftarrow i$

else

if  $A[i] > A[max]$  then

|  $max \leftarrow i$

۱) قطعه کد زیر را در نظر بگیرید که در آن  $p$ ،  $k$  و  $n$  اعداد صحیح نامنفی هستند:

```

p ← 1
k ← 0
while k < n do
  p ← 2 × p
  k ← k + 1

```

(الف) رابطه‌ی مستقل از حلقه (loop-invariant) را برای قطعه کد فوق به دست آورید. (یعنی چه رابطه‌ای میان  $p$  و  $k$  در ابتدای اجرای هر تکرار حلقه درست است؟)

(ب) با توجه به پاسخ قسمت قبل، حلقه while چند مرتبه تکرار می‌شود؟

۲) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

```

CONUNDRUM(n)
r ← 1
for i ← 0 to n do
  for j ← i + 1 to n do
    for k ← i to j do
      r ← r + 1
return r

```

(الف) تابع فوق، چه مقداری را برمی‌گرداند؟ پاسخ خود را به صورت تابعی از  $n$  بیان کنید.

(ب) با استفاده از نماد  $O$  بزرگ، زمان اجرای بدترین حالت را تعیین کنید.