دانشگاه تهران
دانشکدگان فارابی
دانشکده مهندسی

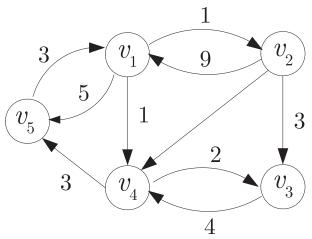
تکلیف شماره‌ی ۳

بخش سوم

روش برنامه‌ریزی پویا

DYNAMIC PROGRAMMING METHOD

◊ مسئله‌های چندگزینه‌ای



۱) گراف جهت‌دار وزن‌دار روبرو را در نظر بگیرید. فرض‌کنید در الگوریتم «کوتاه‌ترین مسیرهای میان همه‌ی جفت‌ها» فلوید ـ وارشال، ALL-PAIR-SHORTEST-PATH، $D^{(k)}[i,j]$ مقدار طول کوتاه‌ترین مسیر از v_i به v_j تنها با استفاده از رئوس موجود در مجموعه‌ی $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_k\}$ به عنوان رئوس واسطه باشد. در این صورت $D^{(۲)}[۵,۴]$ برابر است با

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲) قسمتی از ماتریس M که در آن $M[i,j]$ برای $i<j$ بیانگر حداقل تعداد ضرب لازم در محاسبه‌ی ضرب ماتریسی $A_iA_{i+۱}\ldots A_j$ است را به صورت زیر درنظر می‌گیریم. در این صورت هزینه‌ی ترتیب بهینه برای ضرب ۶ماتریس $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ کدام است؟ ابعاد ماتریس‌ها به ترتیب در جدول زیر داده شده است.

$A_۱$	$A_۲$	$A_۳$	$A_۴$	$A_۵$	$A_۶$
۵×۲	۲×۳	۳×۴	۴×۶	۶×۷	۷×۸

$$M=\begin{bmatrix} ۰ & ۳۰ & ۶۴ & ۱۳۲ & [\ ] & [\ ] \\ & ۰ & ۲۴ & ۷۲ & ۱۵۶ & [\ ] \\ & & ۰ & ۷۲ & ۱۹۸ & ۳۶۶ \\ & & & ۰ & ۱۶۸ & ۳۹۲ \\ & & & & ۰ & ۳۳۶ \end{bmatrix}$$

۱) ۲۶۸ ۲) ۳۴۸ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۵۲

۳) فرض می‌کنیم $T(n)$ تعداد روش‌های پرانتزبندی متمایز برای ضرب n ماتریس در هم باشد. در این صورت $T(۱)=T(۲)=۱$ و ...

۱) $T(n)=\sum_{i=۱}^{n} T(i)T(n-i)$
۲) $T(n)=\sum_{i=۱}^{n-۱} T(i)T(n-i)$
۳) $T(n)=\sum_{i=۱}^{n} T(i)T(n-i+۱)$
۴) $T(n)=\sum_{i=۱}^{n-۱} T(i)T(n-i+۱)$

۴) برای محاسبه‌ی ضرب سه ماتریس ABC که A یک ماتریس $a\times b$، B یک ماتریس $b\times c$ و C یک ماتریس $c\times d$ است، چه شرطی باید برقرار باشد که محاسبه‌ی $(AB)C$ زمان کمتری در مقابل محاسبه‌ی $A(BC)$ صرف کند؟

۱) $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{d}<\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}$
۲) $b>c$
۳) $a+b>c+d$
۴) هر دو یک زمان صرف می‌کنند.

۵) الگوریتم زیر، با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا برای اعداد صحیح $n \geq k$، مقدار $C(n,k)$ را محاسبه می‌کند. تعداد دفعات اجرای دستور **if** چیست؟

$\textsc{Bin}(n, k)$

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $min(i, k)$ **do**
    if $(j = 0)$ **or** $(j = i)$ **then**
      $B[i, j] \leftarrow 1$
    else
      $B[i, j] \leftarrow B[i-1, j-1] + B[i-1, j]$

return $B[n, k]$

۱) $\frac{k(k+1)}{2} + (n-k)(k+1)$
۲) $\frac{k(k-1)}{2} + (n-k+1)k$
۳) $\frac{k(k-1)}{2} + (n-k+1)(k+1)$
۴) $\frac{k(k+1)}{2} + (n-k+1)(k+1)$

۶) اصل بهینگی در کدام یک از مسائل زیر، صدق نمی‌کند؟

۱) یافتن کوتاه‌ترین مسیرها بین دو رأس از یک گراف
۲) یافتن بلندترین مسیر ساده بین دو رأس از یک گراف
۳) یافتن تور بهینه در مسئله‌ی فروشنده‌ی دورگرد
۴) یافتن ارزش بهینه در مسئله‌ی کوله‌پشتی صفر ـ یک

۷) الگوریتم فلوید ـ وارشال، کوتاه‌ترین مسیر بین همه‌ی جفت رئوس را در گراف جهت‌دار و وزن‌دار G محاسبه می‌کند. اگر یال‌هایی با وزن منفی هم داشته باشیم، کدام‌یک از گزینه‌های زیر بهترین توصیف این الگوریتم است؟

۱) با این الگوریتم می‌توان وجود یا عدم وجود دور منفی را تشخیص داد.
۲) این الگوریتم برای گراف‌های دارای یال منفی اما بدون دور منفی ممکن است در حلقه‌ی نامتناهی بیفتد.
۳) این الگوریتم برای گراف‌های دارای یال منفی اما بدون دور منفی متوقف می‌شود، ولی پاسخ آن ممکن است نادرست باشد.
۴) این الگوریتم برای گراف‌های دارای یال منفی اما بدون دور منفی متوقف می‌شود، ولی پاسخ آن همیشه نادرست است.

۸) محاسبه‌ی کدام تابع با روش برنامه‌ریزی پویا می‌تواند میزان محاسبات مورد نیاز را نسبت به روش تقسیم و غلبه بیشتر از بقیه کاهش دهد؟

۱) $F(n) = \sum_{i=1}^{n-1} F(i)$
۲) $F(n) = aF(n-1) + b$
۳) $F(n) = aF(n-1) + bF(n-2)$
۴) $F(n) = aF\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + bF\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$

◇ مسئله‌های تشریحی

۱) از روش برنامه‌ریزی پویا استفاده کرده، الگوریتمی بنویسید که حاصل‌جمع ماکزیمم را در یک زیرلیست پیوسته از یک لیست از n عدد حقیقی را بیابد. الگوریتم خود را از نظر زمان اجرا و فضای مصرفی تحلیل کنید و نتایج را با نماد مرتبه نشان دهید.

۲) n کار برای اجرا داده شده است. زمان شروع کار i برابر با s_i و زمان پایان آن f_i است که $s_i < f_i$. با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا، از میان این n کار، مجموعه‌ای از کارهای ناهمپوشان را بیابید به طوری که مجموع طول زمان اجرای آنها ماکزیمم شود. توجه کنید که طول زمان اجرای i برابر با $f_i - s_i$ است. الگوریتم خود را از نظر زمان اجرا و فضای مصرفی تحلیل کنید و نتایج را با نماد مرتبه نشان دهید.

Prepared by Kazim Fouladi <kazim@fouladi.ir>, Spring 2025 (۹ اسفند ۱۴۰۳)