

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



هوش مصنوعی

فصل ۵

جستجوی تخصصی

Adversarial Search

کاظم فولادی قلعه
دانشکده مهندسی، پردیس فارابی
دانشگاه تهران

<http://courses.fouladi.ir/ai>

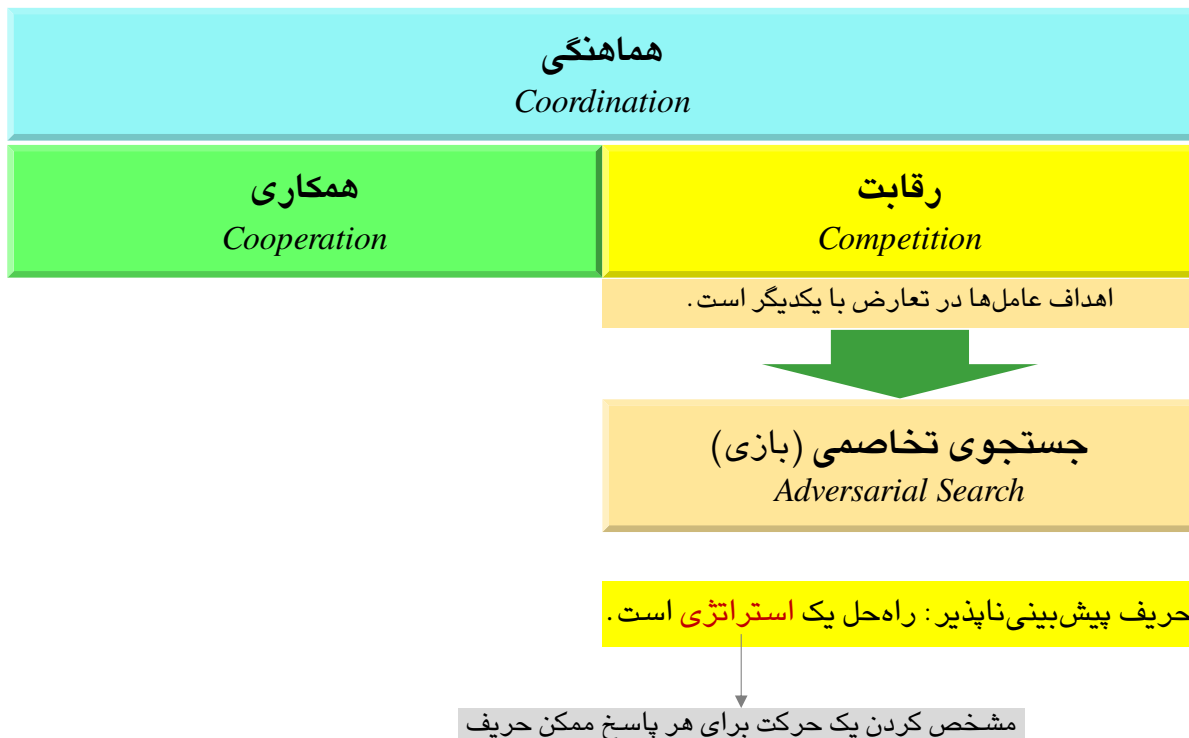
هوش مصنوعی

جستجوی رقابتی

۱

بازی‌ها

«رقابت» در محیط چندعاملی



نظریه‌ی بازی

نظریه‌ی ریاضی بازی

GAME THEORY (MATHEMATICAL GAME THEORY)

نظریه‌ی بازی

Game Theory

شاخه‌ای از علم اقتصاد

محیط‌های چندعاملی به عنوان یک بازی دیده می‌شوند.

(با این فرض که اثر عامل‌ها بر هم چشمگیر است؛ چه همکار باشند چه رقیب)

مشخصات «بازی‌ها» در هوش مصنوعی



مشخصات «بازی‌ها» در هوش مصنوعی

بازی‌های ساده

محیط بازی مشاهده‌پذیر کامل	امتیاز دو عامل در پایان بازی مساوی و از نظر علامت مخالف	دو عامل در بازی نقش دارند	عامل‌ها به صورت نوبتی بازی می‌کنند	محیط بازی قطعی
با اطلاعات کامل <i>Perfect Information</i>	مجموع صفر <i>Zero-Sum</i>	دو نفره <i>Two-Player</i>	نوبتی <i>Turn-Taking</i>	قطعی <i>Deterministic</i>
❓	❓	❓	❓	❓
با اطلاعات ناکامل <i>Imperfect Information</i>	مجموع ناصفر <i>Non Zero-Sum</i>	چند نفره <i>Multi-Player</i>	پیوسته <i>Continuous</i>	اتفاقی <i>Stochastic</i>

۲

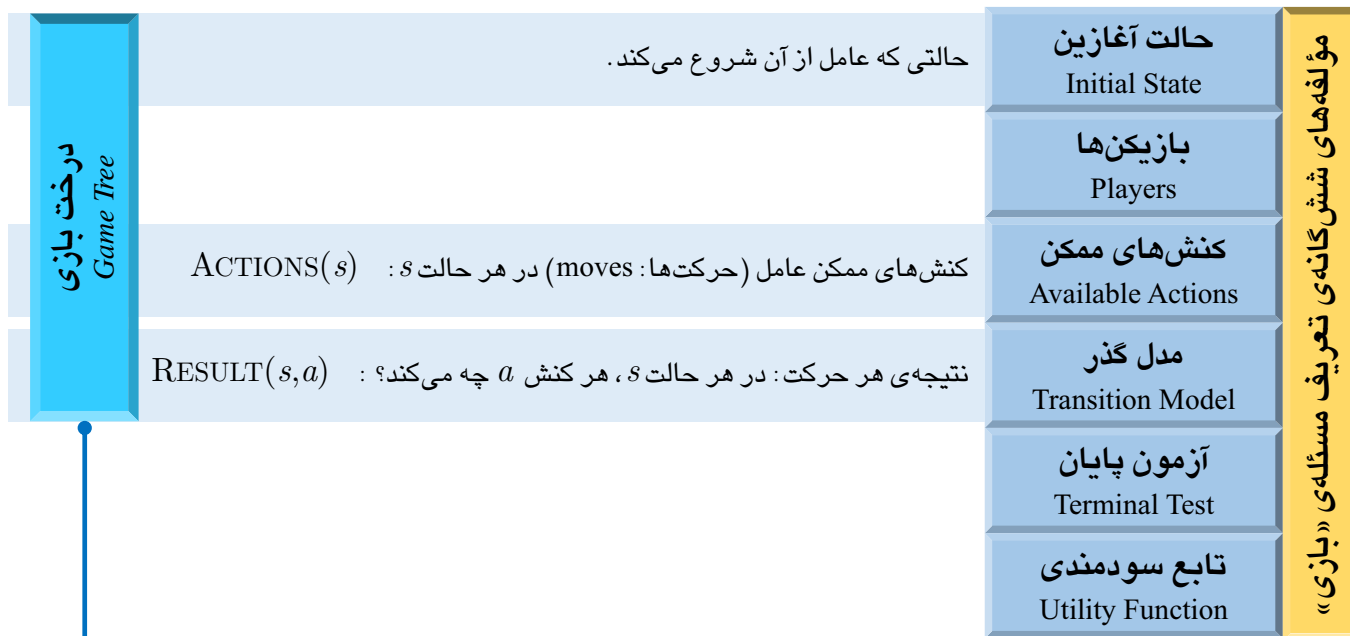
تصمیم‌های بهینه در بازی‌ها

فرمول‌بندی مسئله‌ی «بازی»

مؤلفه‌های شش‌گانه‌ی تعریف مسئله‌ی بازی

حالتی که عامل از آن شروع می‌کند.	حالت آغازین Initial State	مؤلفه‌های شش‌گانه‌ی تعریف مسئله‌ی «بازی»
تعریف اینکه کدام عامل در یک حالت s باید حرکت کند: $\text{PLAYER}(s)$	بازیکن‌ها Players	
کنش‌های ممکن عامل (حرکت‌ها: moves) در هر حالت s : $\text{ACTIONS}(s)$	کنش‌های ممکن Available Actions	
نتیجه‌ی هر حرکت: در هر حالت s ، هر کنش a چه می‌کند؟: $\text{RESULT}(s, a)$	مدل گذر Transition Model	
وقتی حالت s پایان بازی باشد، true و گرنه false برمی‌گرداند: $\text{TERMINAL-TEST}(s)$ حالت‌های پایانی (terminal states): حالت‌هایی که در آنها بازی به پایان می‌رسد.	آزمون پایان Terminal Test	
تابع ارزش‌دهی عددی نهایی برای بازی خاتمه یافته در حالت s برای بازیکن p : $\text{UTILITY}(s, p)$ مثلاً در بازی شطرنج: برد (+1)، باخت (0) و مساوی ($\frac{1}{2}$)	تابع سودمندی Utility Function	
بازی مجموع-صفر (مجموع-ثابت): مجموع پی‌آف همه‌ی بازیکن‌ها برای همه‌ی نمونه‌های بازی مشابه است.	تابع هدف Objective Function	
مثلاً در بازی شطرنج: برد (0+1)، باخت (1+0) و مساوی ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$)	تابع تسویه حساب Payoff Function	

درخت بازی



درختی که گره‌های آن حالت‌های بازی و یال‌های آن حرکت‌ها است.

درخت بازی

مثال: بازی دوز

TIC-TAC-TOE GAME-TREE

MAX (X)

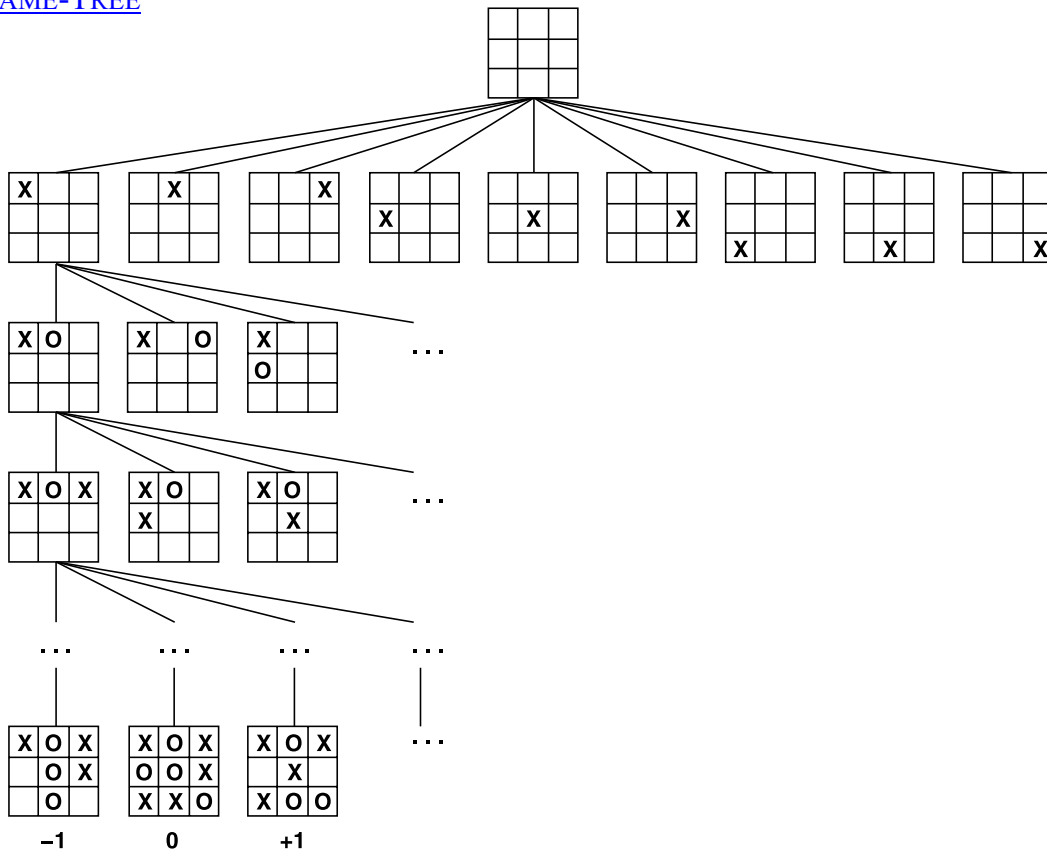
MIN (O)

MAX (X)

MIN (O)

TERMINAL

Utility



می‌نیماکس

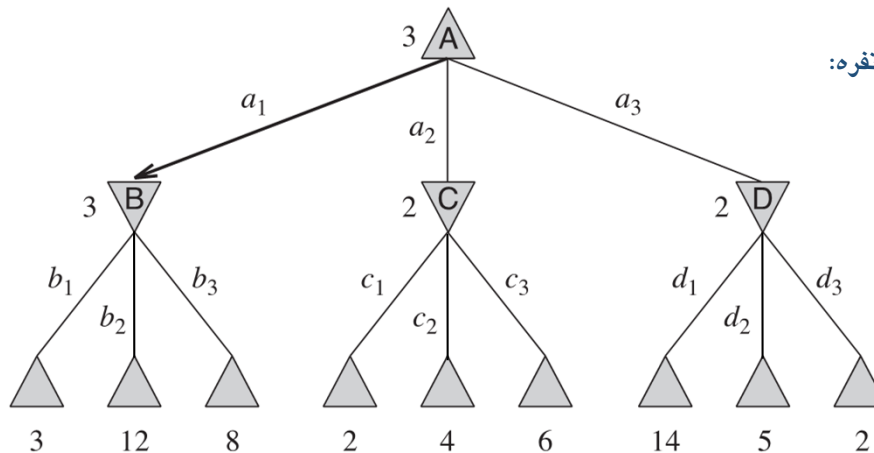
MINIMAX

انتخاب حرکت به سمت بالاترین ارزش می‌نیماکس
 = بهترین پی‌آف قابل دسترس در برابر بهترین بازیکن رقیب

MAX

MIN

مثال: بازی دونفره:



هر دو عامل رسیونال هستند و می‌خواهند سود خود را ماکزیم کنند:
 بازی مجموع صفر است: هر امتیاز عامل معادل با منفی امتیاز رقیب اوست.
 عامل: ماکزیم‌کننده‌ی سود خود
 رقیب: می‌نیمم‌کننده‌ی سود رقیب (= ماکزیم‌کننده‌ی سود خود [منفی سود رقیب])



الگوریتم می‌نیماکس

تابع ریاضی

$$\text{MINIMAX}(s) = \begin{cases} \text{UTILITY}(s) & \text{if } \text{TERMINAL-TEST}(s) \\ \max_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if } \text{PLAYER}(s) = \text{MAX} \\ \min_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if } \text{PLAYER}(s) = \text{MIN} \end{cases}$$

الگوریتم می‌نیماکس

شبه‌کد

function MINIMAX-DECISION(*state*) **returns** *an action*
return $\arg \max_{a \in \text{ACTIONS}(s)} \text{MIN-VALUE}(\text{RESULT}(state, a))$

function MAX-VALUE(*state*) **returns** *a utility value*
if TERMINAL-TEST(*state*) **then return** UTILITY(*state*)
 $v \leftarrow -\infty$
for each *a* **in** ACTIONS(*state*) **do**
 $v \leftarrow \text{MAX}(v, \text{MIN-VALUE}(\text{RESULT}(s, a)))$
return *v*

function MIN-VALUE(*state*) **returns** *a utility value*
if TERMINAL-TEST(*state*) **then return** UTILITY(*state*)
 $v \leftarrow \infty$
for each *a* **in** ACTIONS(*state*) **do**
 $v \leftarrow \text{MIN}(v, \text{MAX-VALUE}(\text{RESULT}(s, a)))$
return *v*

الگوریتم جستجوی می‌نیماکس

ویژگی‌ها

ارزیابی الگوریتم جستجوی می‌نیماکس			
۱	۲	۳	۴
تمامیت <i>Completeness</i>	بهینگی <i>Optimality</i>	پیچیدگی زمانی <i>Time Complexity</i>	پیچیدگی فضایی <i>Space Complexity</i>

بله
(در صورت متناهی بودن درخت بازی)

در یک درخت نامتناهی هم ممکن است استراتژی متناهی وجود داشته باشد!

بله
(در مقابل حریف بهینه)

اگر حریف بهینه بازی نکند، لزوماً بهینه نیست.

نمایی
 $O(b^m)$

خطی
 $O(bm)$

پیمایش عمق-اول

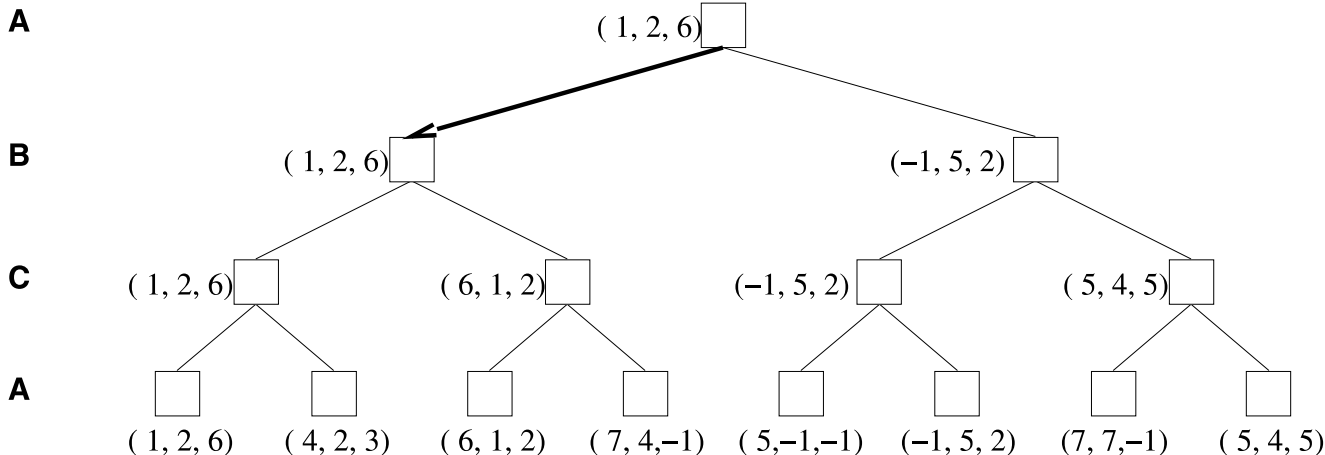
زمان جستجو بسیار بالاست (مثلاً برای شطرنج $m \approx 100$ و $b \approx 35$) $\Leftarrow$ نیاز به روش‌های برای کاهش فضای جستجو

تصمیم‌های بهینه در بازی‌های چندنفره

به هر گره، برداری از امتیازهای هر بازیکن نسبت داده می‌شود.
هر بازیکن برای انتخاب حرکت، روی امتیاز خودش ماکزیمم می‌گیرد.

$$\langle v_A, v_B, v_C \rangle$$

to move



در بازی‌های دونفره‌ی مجموع-صفر، بردار $\langle v_A, v_B \rangle = \langle v_A, -v_A \rangle$ را داریم که با یک عدد v_A قابل خلاصه شدن است.

۳

هرس
آلفا - بتا

هرس کردن درخت بازی

مشکل بزرگ الگوریتم جستجوی می نیماکس:
وجود رابطه‌ی نمایی بین تعداد حرکتهای بازی و تعداد حالت‌های بازی

مقابله با این مشکل

هرس کردن درخت بازی

نادیده گرفتن بخشی از درخت جستجو
که در راه حل تأثیر ندارد.

هرس کردن
Pruning

هرس آلفا-بتا

ALPHA-BETA PRUNING α - β Pruning

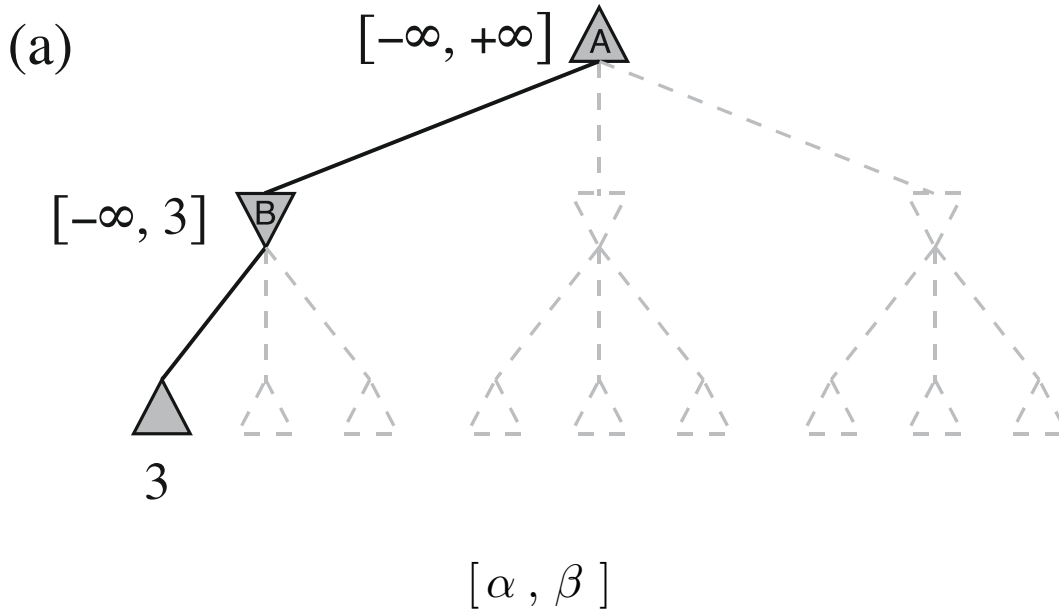
در هرس آلفا-بتا همانند روش می نیماکس عمل می شود؛
با این تفاوت که شاخه های غیر مؤثر در تصمیم گیری نهایی، دنبال نمی شوند.

α = حد پایین ترین مقدار برای یک گره
 β = حد بالاترین مقدار برای یک گره

هرگاه $\alpha \geq \beta$ جستجو در آن شاخه و زیرشاخه های آن قطع می شود.

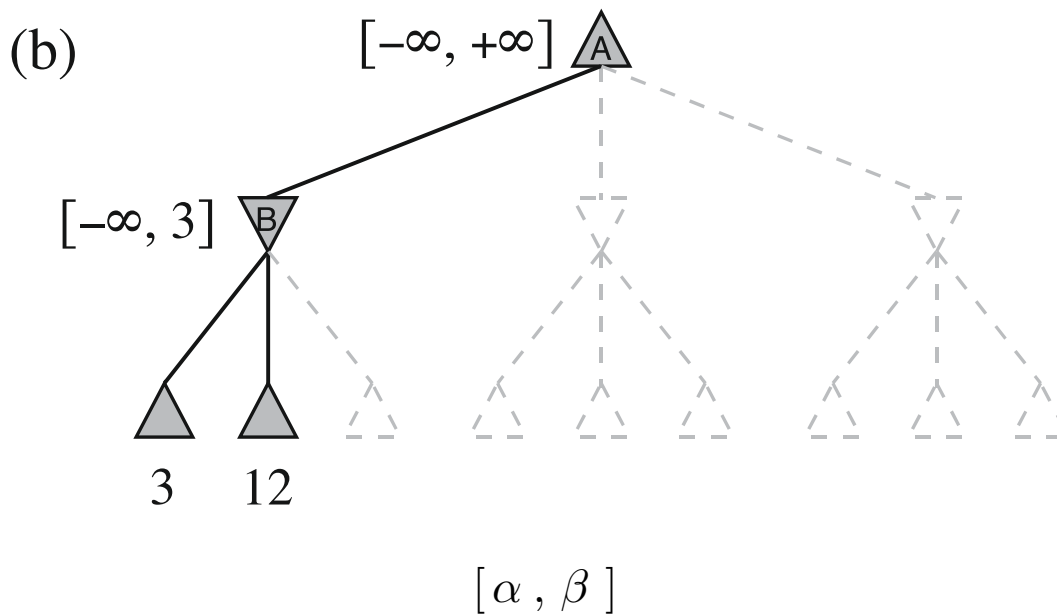
هرس آلفا-بتا

مثال (۱ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

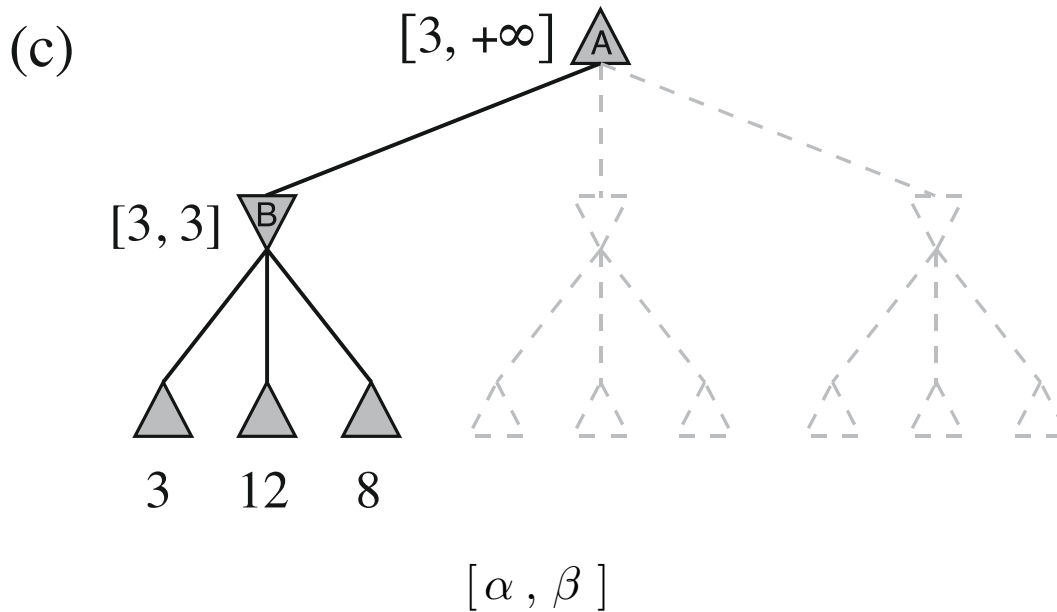
هرس آلفا-بتا

مثال (۲ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

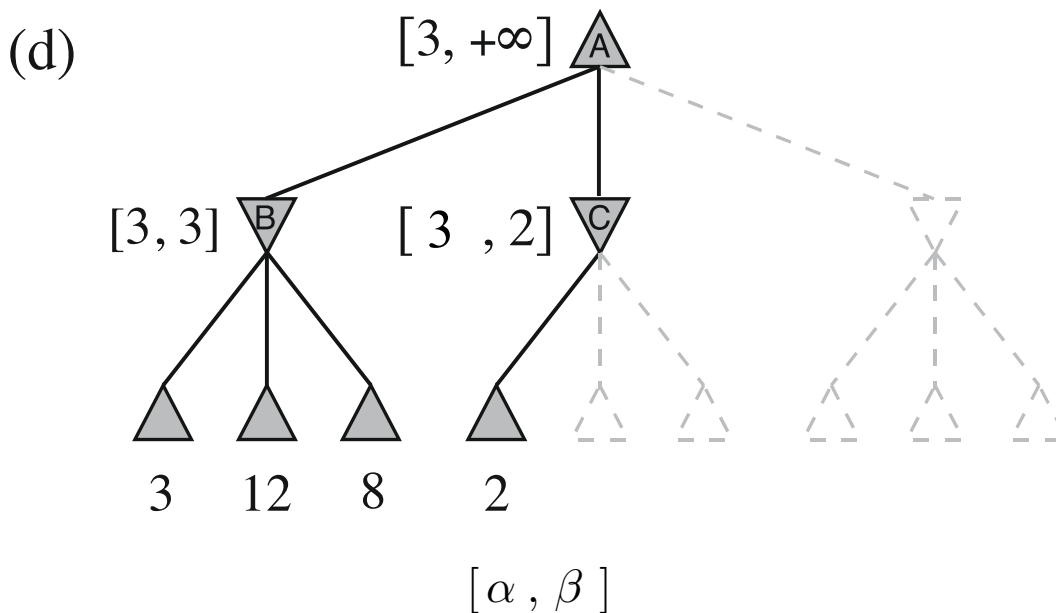
هرس آلفا-بتا

مثال (۳ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

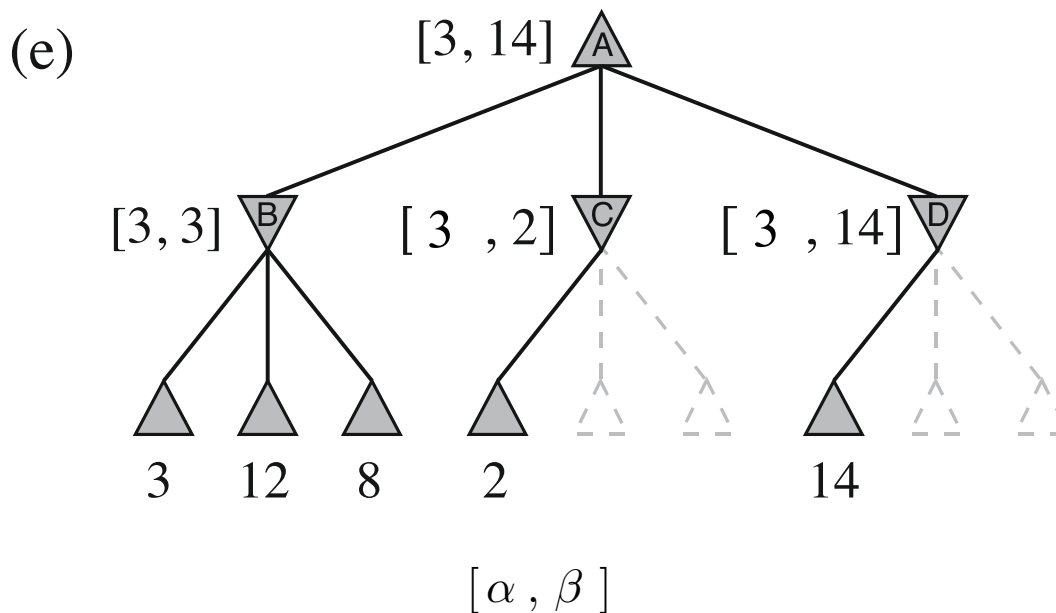
هرس آلفا-بتا

مثال (۴ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

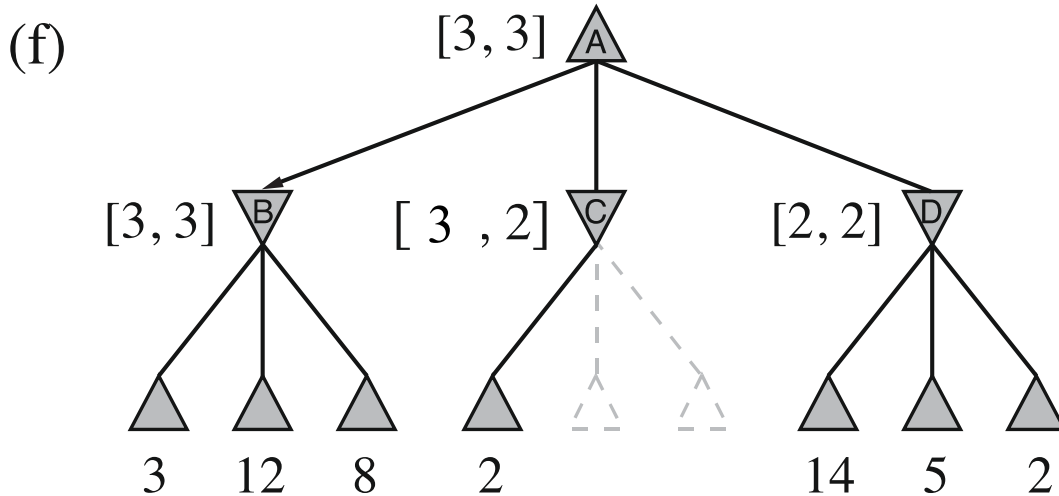
هرس آلفا-بتا

مثال (۵ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

هرس آلفا-بتا

مثال (۶ از ۶)

ALPHA-BETA PRUNING

$$\begin{aligned}
 \text{MINIMAX}(\text{root}) &= \max(\min(3, 12, 8), \min(2, x, y), \min(14, 5, 2)) \\
 &= \max(3, \min(2, x, y), 2) \\
 &= \max(3, z, 2) \quad \text{where } z = \min(2, x, y) \leq 2 \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

هرس آلفا-بتا

شبه کد

function ALPHA-BETA-SEARCH(*state*) **returns** an action

$v \leftarrow \text{MAX-VALUE}(\text{state}, -\infty, +\infty)$

return the *action* in $\text{ACTIONS}(\text{state})$ with value v

function MAX-VALUE(*state*, α , β) **returns** a utility value

if $\text{TERMINAL-TEST}(\text{state})$ **then return** $\text{UTILITY}(\text{state})$

$v \leftarrow -\infty$

for each a **in** $\text{ACTIONS}(\text{state})$ **do**

$v \leftarrow \text{MAX}(v, \text{MIN-VALUE}(\text{RESULT}(s, a), \alpha, \beta))$

if $v \geq \beta$ **then return** v

$\alpha \leftarrow \text{MAX}(\alpha, v)$

return v

function MIN-VALUE(*state*, α , β) **returns** a utility value

if $\text{TERMINAL-TEST}(\text{state})$ **then return** $\text{UTILITY}(\text{state})$

$v \leftarrow +\infty$

for each a **in** $\text{ACTIONS}(\text{state})$ **do**

$v \leftarrow \text{MIN}(v, \text{MAX-VALUE}(\text{RESULT}(s, a), \alpha, \beta))$

if $v \leq \alpha$ **then return** v

$\beta \leftarrow \text{MIN}(\beta, v)$

return v

هرس آلفا-بتا

الگوریتم برای اجرای بصری

درخت بازی را با شروع از ریشه به صورت عمق-اول (از چپ به راست) پیمایش کنید تا به اولین برگ برسید:

برای ریشه: $\alpha \leftarrow -\infty$ $\beta \leftarrow +\infty$

در طول پیمایش: $\alpha \leftarrow -\infty$ $\beta \leftarrow$ مقدار پدر $\blacktriangle$ برای گرهی

$\beta \leftarrow +\infty$ $\alpha \leftarrow$ مقدار پدر $\blacktriangledown$ برای گرهی

در برگ‌ها: $\alpha \leftarrow U(n)$ $\beta = \alpha$ $\blacktriangle$ برای گرهی

$\beta \leftarrow U(n)$ $\alpha = \beta$ $\blacktriangledown$ برای گرهی

بعد از پایان ارزیابی هر گره n در هر مرحله، مقدار پدر آن را بهنگام کنید:

$\alpha \leftarrow \max(\alpha, \beta(n))$ اگر پدر n ، $\blacktriangle$ بود

$\beta \leftarrow \min(\beta, \alpha(n))$ اگر پدر n ، $\blacktriangledown$ بود

هرگاه $\alpha \geq \beta$ شد، سایر فرزندان آن گره بررسی نمی‌شوند (هرس می‌شوند).

۳

۲

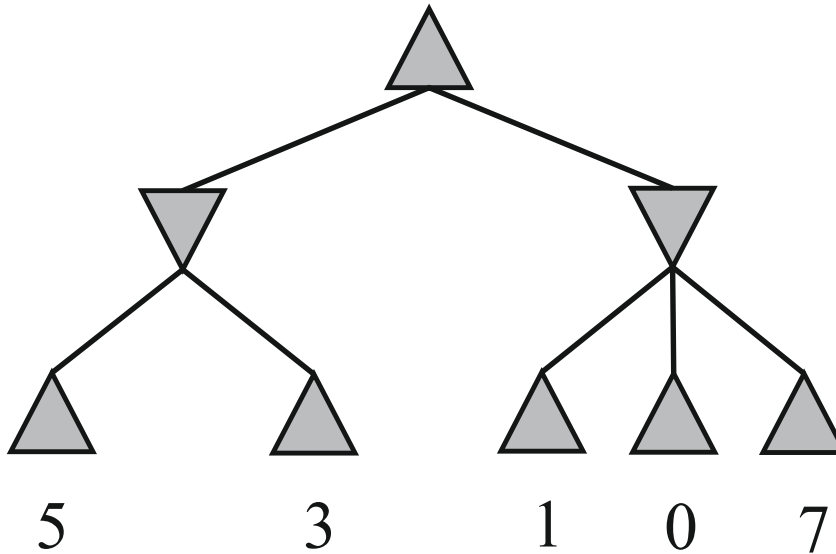
۱

هرس آلفا-بتا

مثال

ALPHA-BETA PRUNING

در درخت بازی زیر، اگر الگوریتم می‌نیماکس را با هرس-آلفا بتا اجرا کنیم، کدام گره‌ها بررسی نمی‌شوند؟

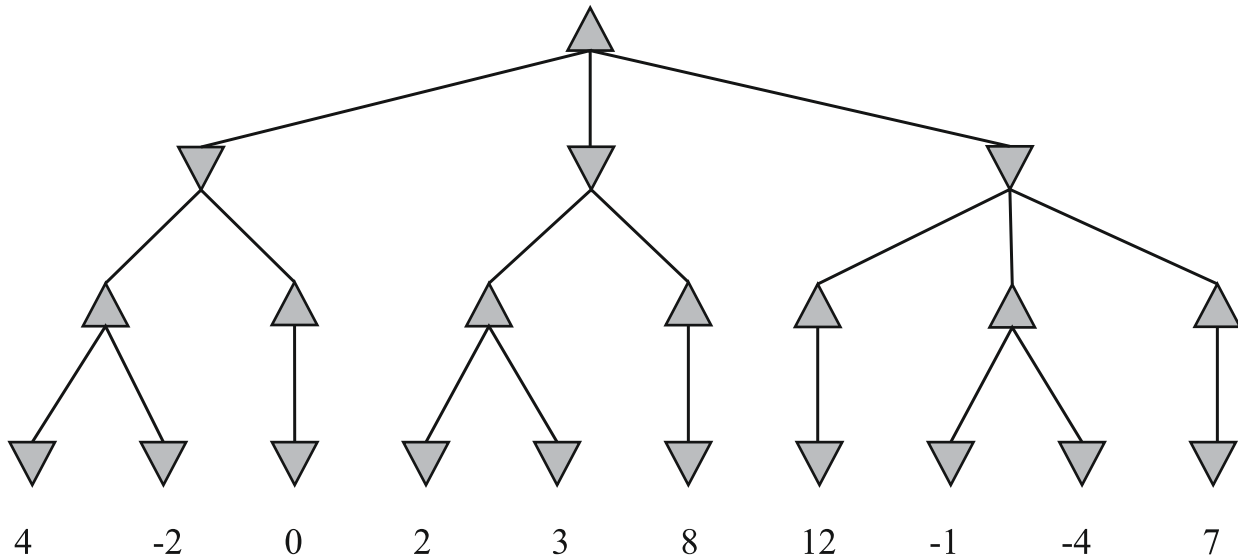


هرس آلفا-بتا

مثال

ALPHA-BETA PRUNING

در درخت بازی زیر، اگر الگوریتم می‌نیماکس را با هرس-آلفا بتا اجرا کنیم، کدام گره‌ها بررسی نمی‌شوند؟

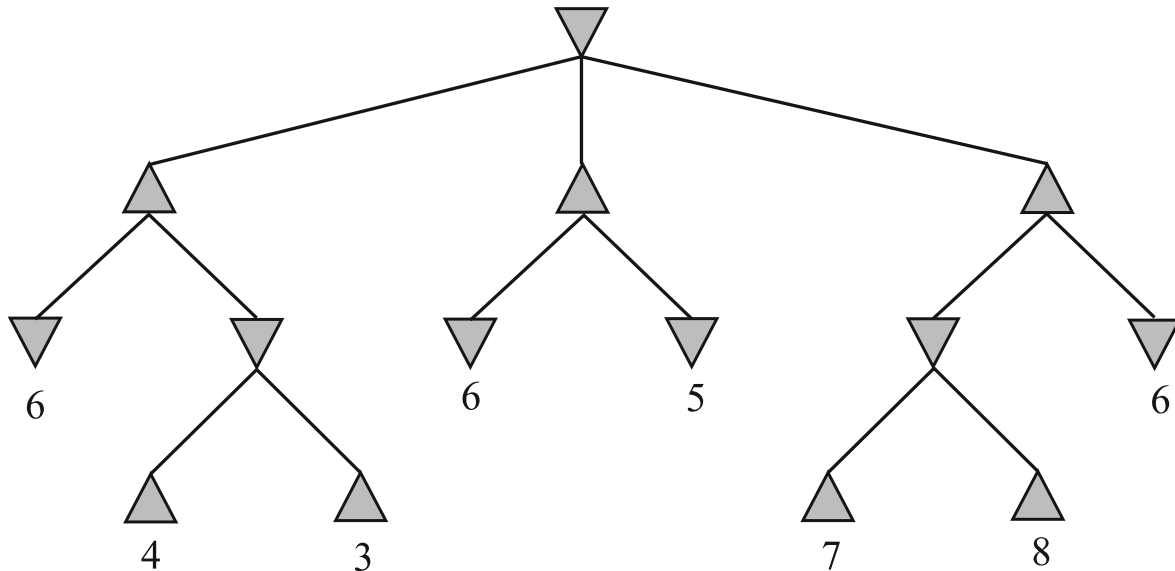


هرس آلفا-بتا

مثال

ALPHA-BETA PRUNING

در درخت بازی زیر، اگر الگوریتم می-نیماکس را با هرس-آلفا بتا اجرا کنیم، کدام گره‌ها بررسی نمی‌شوند؟

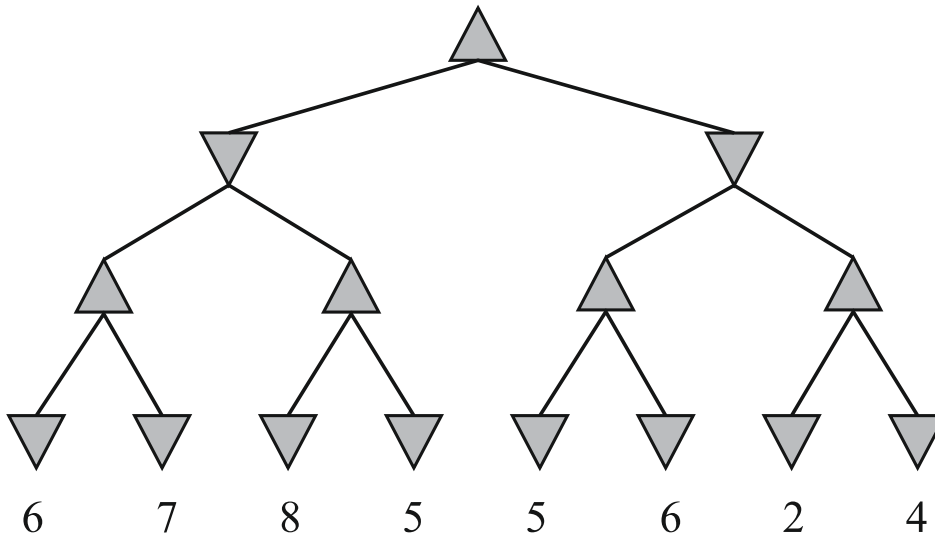


هرس آلفا-بتا

مثال

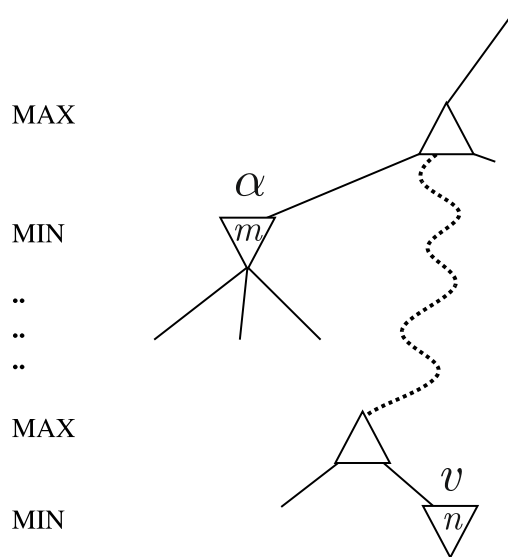
ALPHA-BETA PRUNING

در درخت بازی زیر، اگر الگوریتم می‌نیماکس را با هرس-آلفا بتا اجرا کنیم، کدام گره‌ها بررسی نمی‌شوند؟



هرس آلفا-بتا

منطق روش

ALPHA-BETA PRUNING

α تا کنون بهترین مقدار (برای MAX) است که در طول مسیر جاری یافت شده است.
 اگر v بدتر از α باشد، MAX از آن اجتناب می‌کند $\Leftarrow$ آن شاخه هرس می‌شود.
 (به طور مشابه β برای MIN)

هرس آلفا-بتا

ویژگی‌ها

ALPHA-BETA PRUNING

هرس کردن بر نتیجه‌ی نهایی تأثیری ندارد.

ترتیب خوب حرکت‌ها (ترتیب گره‌های درخت جستجو)، اثربخشی هرس کردن را بهبود می‌دهد.

با ترتیب‌دهی کامل، پیچیدگی زمانی $O(b^{m/2})$ $\Leftarrow$ دو برابر شدن عمق راه‌حل

در هر گره به طور متوسط نیمی از فرزندان بررسی نمی‌شود، پس فاکتور انشعاب نصف می‌شود.

۴

تصمیم‌های
بی‌درنگ
ناکامل

جستجو در درخت بازی با وجود محدودیت منابع

۱ استفاده از تابع آزمون قطع CUTOFF-TEST به جای تابع آزمون پایان TERMINAL-TEST

تابع آزمون پایان
TERMINAL-TEST



تابع آزمون قطع
CUTOFF-TEST

مانند حد عمق برای جستجو
(قطع زودهنگام جستجو)

۲ استفاده از تابع ارزیابی حالت EVAL به جای تابع سودمندی UTILITY

تابع سودمندی
UTILITY



تابع ارزیابی حالت
EVAL

تخمین میزان مطلوبیت یک حالت
(تابع هیوریستیک)

$H\text{-MINIMAX}(s, d) =$

$$\begin{cases} \text{EVAL}(s) & \text{if CUTOFF-TEST}(s, d) \\ \max_{a \in \text{Actions}(s)} H\text{-MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a), d + 1) & \text{if PLAYER}(s) = \text{MAX} \\ \min_{a \in \text{Actions}(s)} H\text{-MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a), d + 1) & \text{if PLAYER}(s) = \text{MIN}. \end{cases}$$

تابع ارزیابی

شرایط لازم

EVALUATION FUNCTION (EVAL)

باید مقدار آن در حالت‌های پایانی با مقدار تابع سودمندی هماهنگ باشد.

باید محاسبه‌ی آن ساده و سریع باشد.

باید شانس برنده شدن را به خوبی نشان دهد.

می‌توان تابع ارزیابی را به صورت ترکیب خطی تعدادی ویژگی تعریف کرد:

$$\text{EVAL}(s) = w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \dots + w_n f_n(s) = \sum_{i=1}^n w_i f_i(s)$$

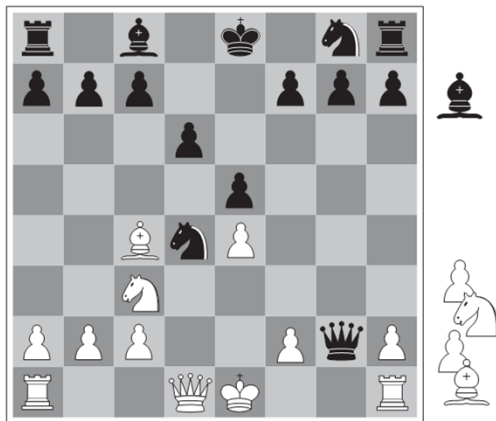
تعیین وزن‌ها را می‌توان با یادگیری ماشین انجام داد.

تابع ارزیابی

مثال: بازی شطرنج

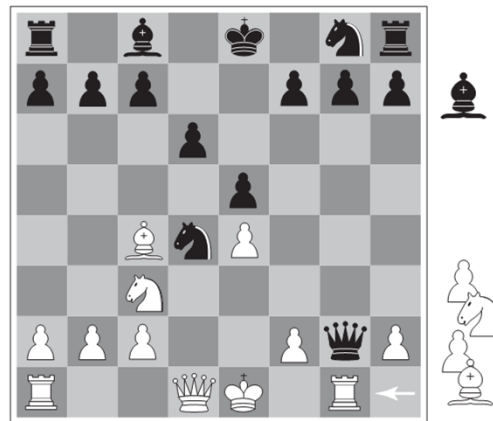
EVALUATION FUNCTION (EVAL)

سیاه با از دست دادن وزیر بازی را می‌بازد.



(a) White to move

سیاه با جلو بردن یک اسب و دو سرباز بازی را می‌برد.



(b) White to move

$$\text{EVAL}(s) = w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \dots + w_n f_n(s) = \sum_{i=1}^n w_i f_i(s)$$

$$f_1(s) = (\text{number of white queens}) - (\text{number of black queens}), \quad w_1 = 9$$

وزن بر اساس ارزش هر مهره

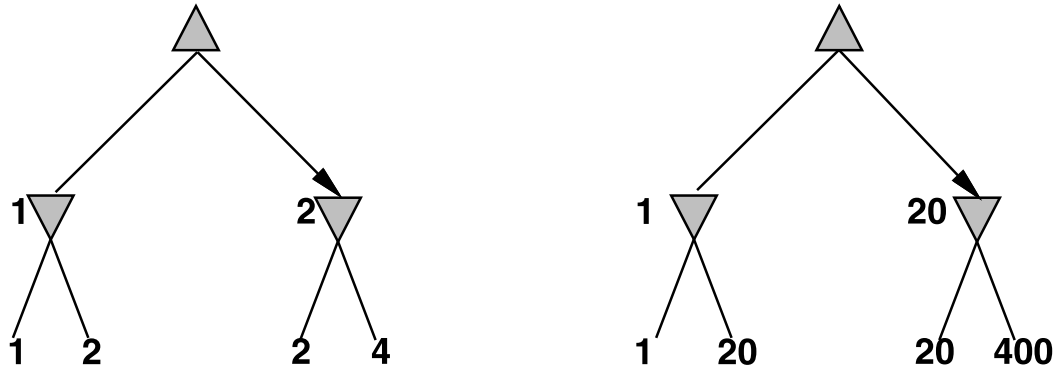
تابع سودمندی

تابع سودمندی / ارزیابی ترتیبی

تابع سودمندی / ارزیابی در بازی‌های قطعی، به صورت یک تابع ترتیبی عمل می‌کند:
(Ordinal Utility Function)

MAX

MIN



رفتار بازی تحت هر تبدیل یکنوای تابع سودمندی / ارزیابی ثابت می‌ماند.

تابع آزمون قطع

قطع جستجو

CUT-OFF TEST FUNCTION: CUTTING-OFF SEARCH

حد عمقی: جستجو تا عمق d انجام شود.

حد زمانی: جستجو تا زمان $time-out$ انجام شود.

۵

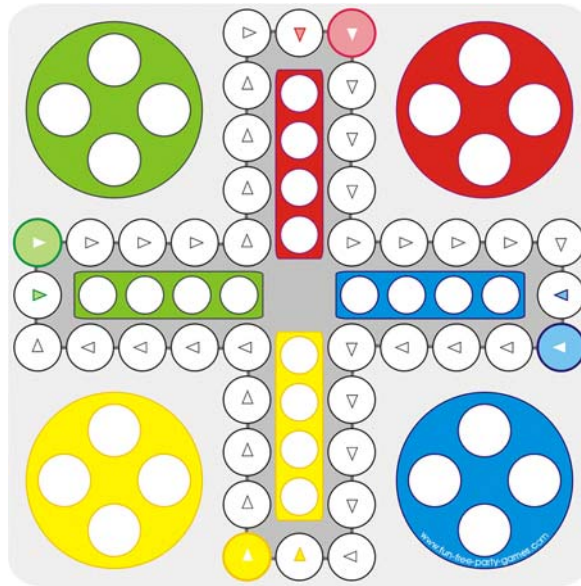
بازی‌های اتفاقی

بازی‌های اتفاقی

بازی‌هایی که در آنها عامل شانس نقش دارد

STOCHASTIC GAMES

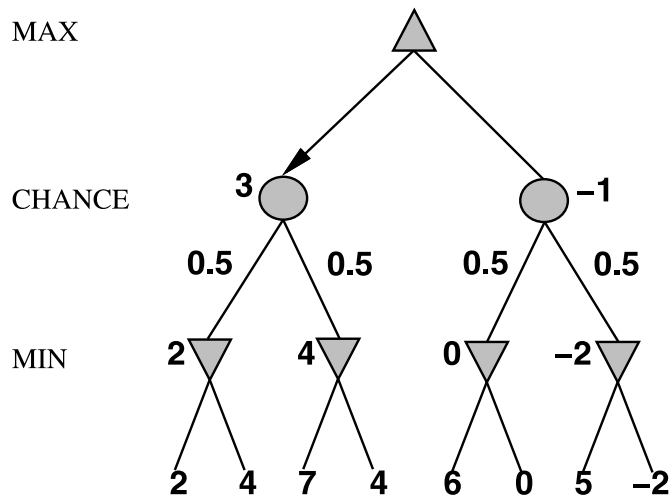
در بازی‌های اتفاقی، موردی مانند پرتاب تاس، حرکت مجاز را مشخص می‌کند.



بازی‌های اتفاقی

عامل شانس

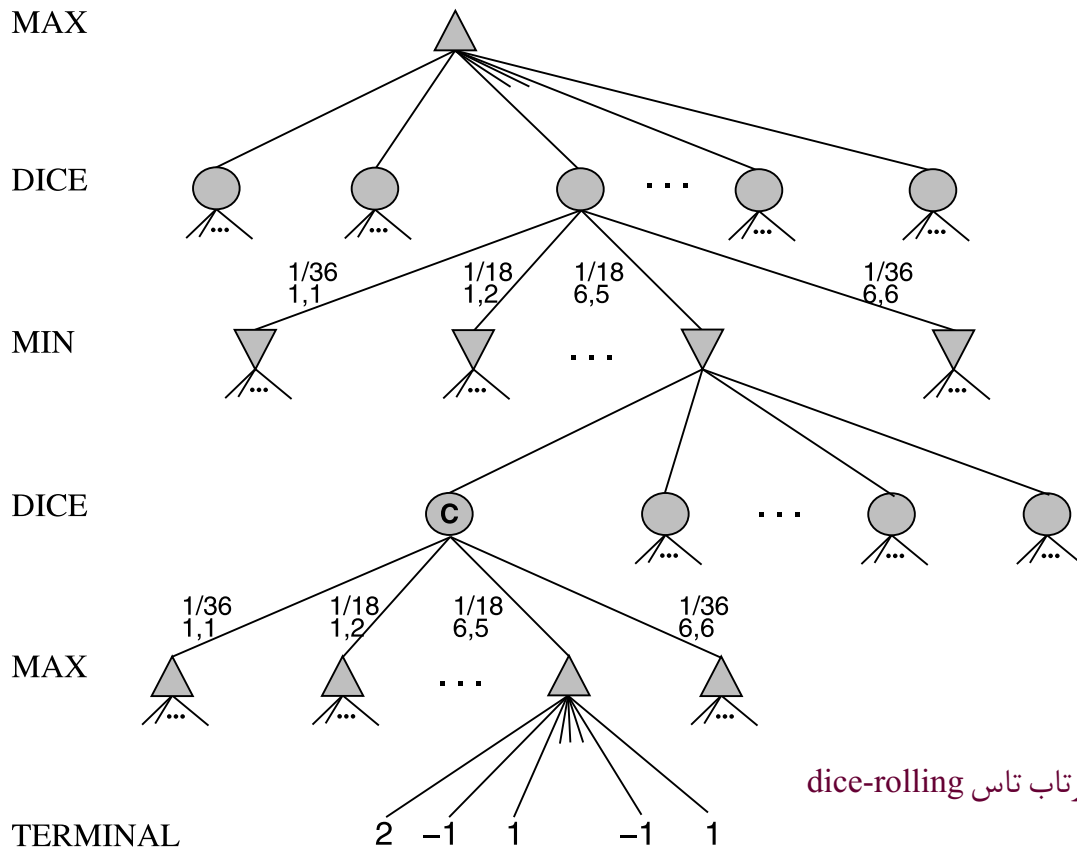
عامل شانس مانند یک بازیکن وارد می‌شود:
 هر برآمد شانس، مانند یک کنش با یک احتمال مشخص است.
 گره شانس در درخت بازی با دایره نشان داده می‌شود و حامل یک توزیع احتمال است.



مثال: پرتاب سکه coin-flipping

بازی‌های اتفاقی

مثال



مثال: پرتاب تاسی dice-rolling

الگوریتم «امید می‌نیماکس» برای بازی‌های اتفاقی

در بازی‌های اتفاقی، هر گره به‌جای تابع ارزیابی، دارای مقدار امید می‌نیماکس است.

مشابه الگوریتم می‌نیماکس
فقط، در گره‌های شانس، ارزش فرزندان میانگین‌گیری می‌شود.

$\text{EXPECTIMINIMAX}(s) =$

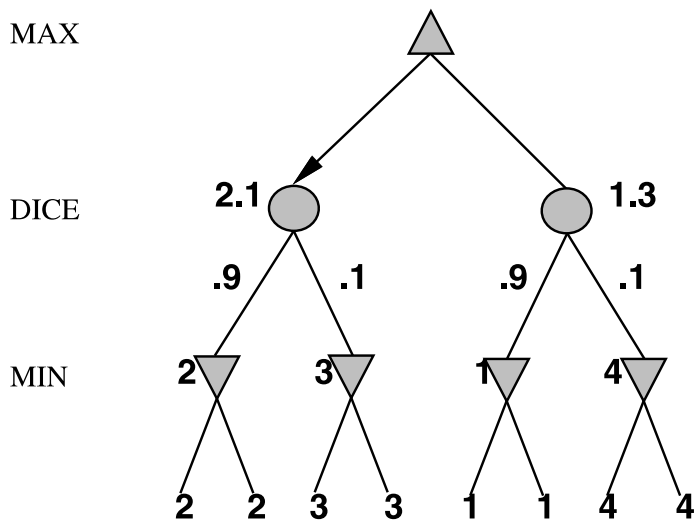
$$\begin{cases} \text{UTILITY}(s) & \text{if } \text{TERMINAL-TEST}(s) \\ \max_a \text{EXPECTIMINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if } \text{PLAYER}(s) = \text{MAX} \\ \min_a \text{EXPECTIMINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if } \text{PLAYER}(s) = \text{MIN} \\ \sum_r P(r) \text{EXPECTIMINIMAX}(\text{RESULT}(s, r)) & \text{if } \text{PLAYER}(s) = \text{CHANCE} \end{cases}$$

پیچیدگی زمانی: $O(c^m b^m)$

c تعداد برآمدهای شانس

الگوریتم «امید می‌نیماکس» برای بازی‌های اتفاقی

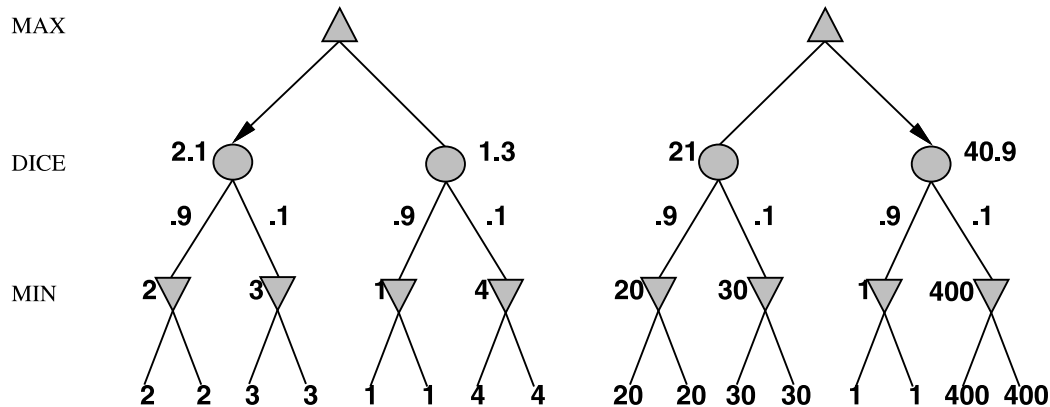
مثال



تابع سودمندی

تابع سودمندی / ارزیابی ترتیبی

مقادیر تابع سودمندی / ارزیابی در بازی‌های اتفاقی، اهمیت دارد:



رفتار بازی تنها تحت تبدیل خطی مثبت تابع سودمندی / ارزیابی ثابت می‌ماند.

۶

بازی‌های
مشاهده‌پذیر
جزئی

بازی‌های مشاهده‌پذیر جزئی

بازی‌هایی با اطلاعات ناکامل

PARTIALLY OBSERVABLE GAMES

در بازی‌های مشاهده‌پذیر جزئی
وضع رقیب نامشخص است و پس از برخورد مشخص می‌شود.
⇐ لزوم گردآوری اطلاعات، جاسوسی، اختفا و بلوف برای گیج کردن رقیب

راه‌حل: مقدار می‌نیماکس هر کنش را در هر حالت محاسبه کنید،
سپس کنشی را انتخاب کنید که دارای بزرگ‌ترین مقدار متوسط بین همه‌ی حالت‌هاست:

$$\operatorname{argmax}_a \sum_s P(s) \operatorname{MINIMAX}(\operatorname{RESULT}(s, a))$$

۷

مرزهای
دانش
برنامه‌های
بازی

بازی شطرنج



$$b^m = 10^6, \quad b = 35 \Rightarrow m = 4$$

4-ply $\approx$ انسان تازه‌کار

8-ply $\approx$ کامپیوتر شخصی نوعی، انسان وارد

12-ply $\approx$ DeepBlue، Kasparov



Kasparov, Garry: Kasparov playing against Deep Blue, 1997

Garry Kasparov playing against Deep Blue, the chess-playing computer built by IBM.



RYBKA, winner of the 2008 and 2009 World Computer Chess Championships, is considered the strongest current computer player. It uses an **off-the-shelf 8-core 3.2 GHz Intel Xeon processor**, but little is known about the design of the program. RYBKA's main advantage appears to be its evaluation function, which has been tuned by its main developer, International Master Vasik Rajlich, and at least three other grandmasters.

The most recent matches suggest that the top computer chess programs have pulled ahead of all human contenders.



هوش مصنوعی

جستجوی رقابتی

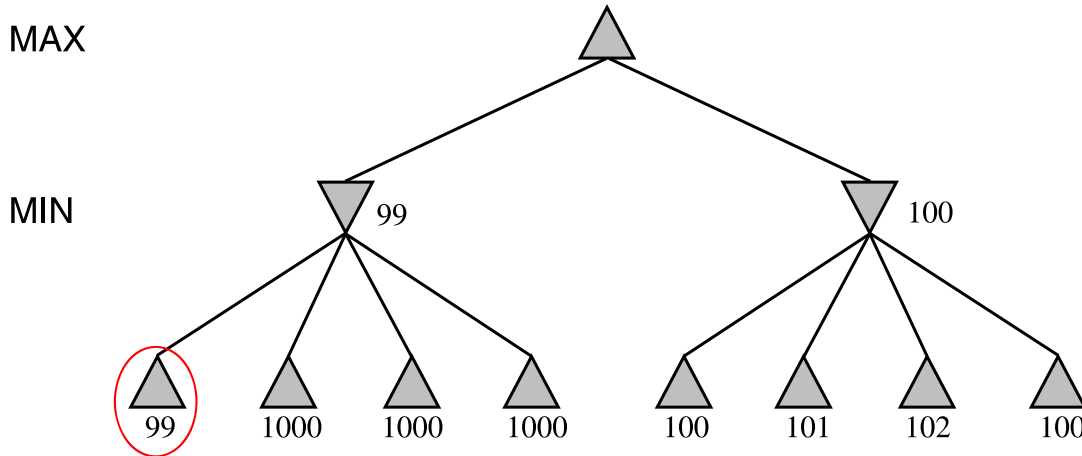


رویکردهای
جایگزین

رویکردهای جایگزین

مواردی که الگوریتم می‌نیماکس مناسب نیست

ALTERNATIVE APPROACHES



می‌نیماکس: انتخاب حرکت بهینه به شرط درست بودن ارزیابی‌ها در گره‌ی برگ
(در عمل ارزیابی‌ها تخمین خام از ارزش وضعیت‌ها و دارای خطای زیاد هستند)

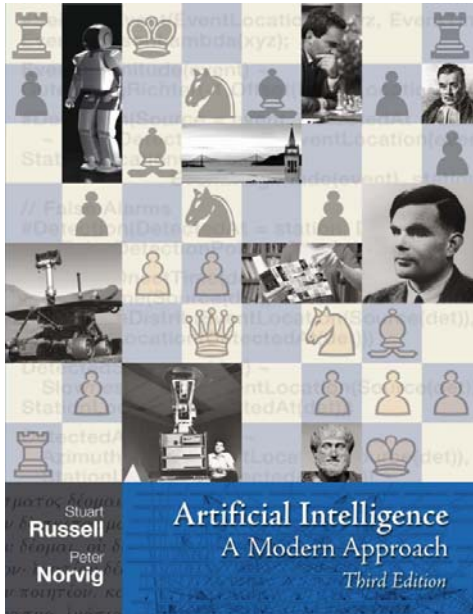
رویکردهای جایگزین

ALTERNATIVE APPROACHES

استدلالی برای انتخاب مناسب‌ترین نوع محاسبات (استدلال در مورد استدلال)	فرا استدلال <i>Meta-reasoning</i>
مانند: جستجوی آلفا-بتا	
در نظر گرفتن یک هدف ویژه و تولید و انتخاب طرح‌های ممکن به کمک این هدف	استدلال هدایت‌شده با هدف <i>goal-directed reasoning</i>

۹

منابع،
مطالعه،
تکلیف



Stuart Russell and Peter Norvig,
Artificial Intelligence: A Modern Approach,
 3rd Edition, Prentice Hall, 2010.

Chapter 5

5 ADVERSARIAL SEARCH

In which we examine the problems that arise when we try to plan ahead in a world where other agents are planning against us.

5.1 GAMES

GAME

ZERO-SUM GAMES
 PERFECT
 INFORMATION

Chapter 2 introduced **multiagent environments**, in which each agent needs to consider the actions of other agents and how they affect its own welfare. The unpredictability of these other agents can introduce **contingencies** into the agent's problem-solving process, as discussed in Chapter 4. In this chapter we cover **competitive environments**, in which the agents' goals are in conflict, giving rise to **adversarial search** problems—often known as **games**.

Mathematical **game theory**, a branch of economics, views any multiagent environment as a game, provided that the impact of each agent on the others is "significant," regardless of whether the agents are cooperative or competitive.¹ In AI, the most common games are of a rather specialized kind—what game theorists call deterministic, turn-taking, two-player, **zero-sum games of perfect information** (such as chess). In our terminology, this means deterministic, fully observable environments in which two agents act alternately and in which the utility values at the end of the game are always equal and opposite. For example, if one player wins a game of chess, the other player necessarily loses. It is this opposition between the agents' utility functions that makes the situation adversarial.

Games have engaged the intellectual faculties of humans—sometimes to an alarming degree—for as long as civilization has existed. For AI researchers, the abstract nature of games makes them an appealing subject for study. The state of a game is easy to represent, and agents are usually restricted to a small number of actions whose outcomes are defined by precise rules. Physical games, such as croquet and ice hockey, have much more complicated descriptions, a much larger range of possible actions, and rather imprecise rules defining the legality of actions. With the exception of robot soccer, these physical games have not attracted much interest in the AI community.

¹ Environments with very many agents are often viewed as **economies** rather than games.