هوش مصنوعی پیشرفته

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

Fuzzy Sets and Systems

کاظم فولادی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
دانشگاه تهران

http://courses.fouladi.ir/aai

هوش مصنوعی پیشرفته

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

۱

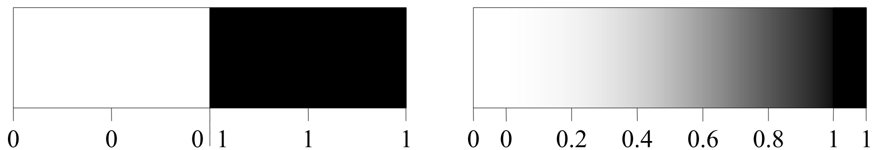
مقدمه

منطق فازی

یک منطق چندمقداری

FUZZY LOGIC

برخلاف منطق بولی **دومقداری**،
منطق فازی **چندمقداری** است.



(*a*) Boolean Logic. (*b*) Multi-valued Logic.

منطق فازی با **درجه‌ی عضویت** و **درجه‌ی درستی** سر و کار دارد.

منطق فازی با یک پیوستار از مقادیر منطقی بین صفر (کاملاً نادرست) و یک (کاملاً درست) کار می‌کند.
(به‌جای فقط سیاه یا سفید، یک طیف از رنگ‌های خاکستری بین آنها داریم)

منطق فازی اجازه می‌دهد که یک چیز به‌طور همزمان مقداری درست و مقداری نادرست باشد.

مفهوم «فازی»

مثال: رنگ گل رز

رنگ این گل رز چیست؟

مفهوم «فازی»

مثال: رنگ پلنگ

رنگ این پلنگ چیست؟

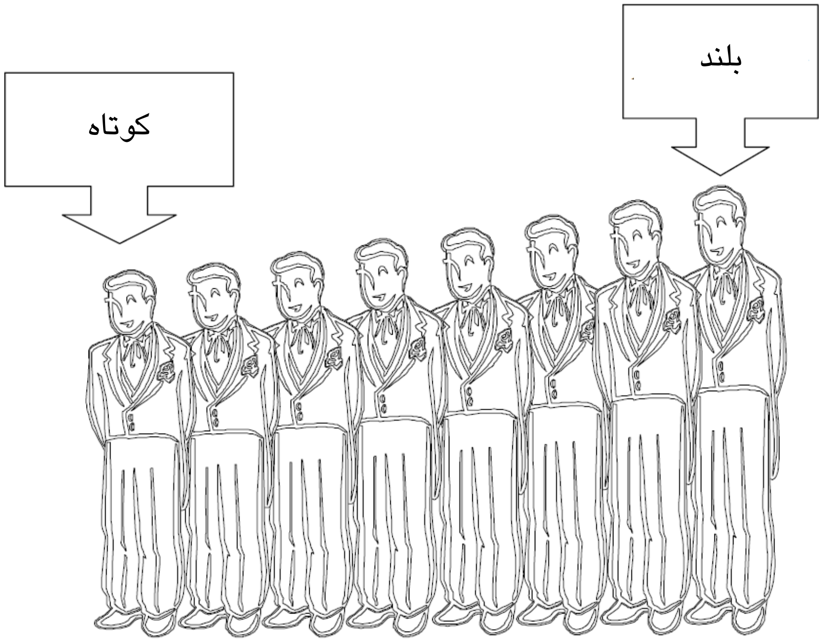
مفهوم «فازی»

مثال: پر بودن لیوان

این لیوان پر است یا خالی؟

مفهوم «فازی»

مثال: بلندی قد



مرز کوتاه و بلند در این صف کجاست؟

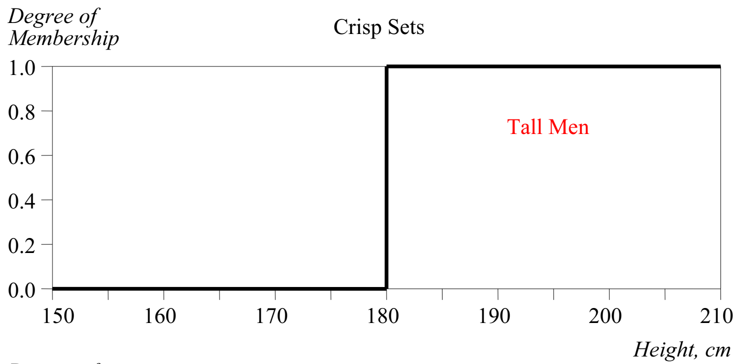
مفهوم «فازی»

مثال : بلندی قد

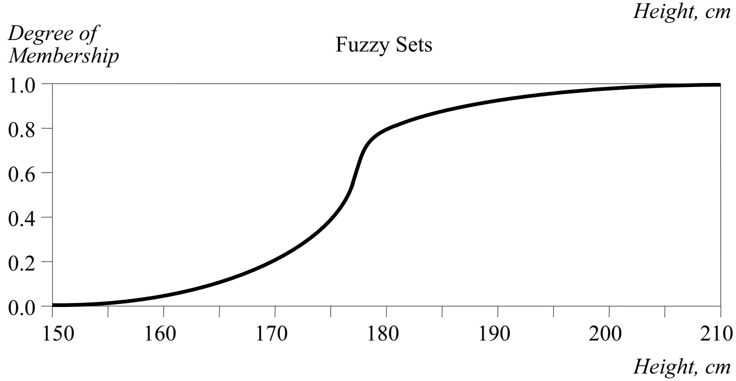
Name	Height, cm	Degree of Membership	
		Crisp	*Fuzzy*
Chris	208	1	1.00
Mark	205	1	1.00
John	198	1	0.98
Tom	181	1	0.82
David	179	0	0.78
Mike	172	0	0.24
Bob	167	0	0.15
Steven	158	0	0.06
Bill	155	0	0.01
Peter	152	0	0.00

مفهوم «فازی»

مثال : بلندی قد



درجه‌ی عضویت



قد

۲

مجموعه‌های فازی

تابع مشخصه

CHARACTERISTIC FUNCTION

فرض می‌کنیم X مجموعه‌ی مرجع باشد و $x \in X$.
زیرمجموعه‌ی A از X توسط تابع مشخصه‌ی آن تعریف می‌شود:

$$\chi_A : X \to \{0,1\} \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \in A \\ 0, \text{if } x \notin A \end{cases}$$

تابع مشخصه

خصوصیات

Characteristic Function

$$\chi_A : X \to \{0,1\} \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \in A \\ 0, \text{if } x \notin A \end{cases}$$

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \, (\chi_A(x) \le \chi_B(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \chi_A \le \chi_B$$

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

تابع مشخصه

مجموعه‌ی توانی، مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی مرجع

Characteristic Function

مجموعه‌ی همه‌ی توابع مشخصه روی X (نماینده‌ی مجموعه‌ی توانی)

$$Chi(X) = \{\chi \mid \chi : X \to \{0,1\}\}$$

مجموعه‌ی تهی

$$\chi_{\varnothing} \qquad \mathbf{0} : X \to \{0,1\} \qquad \forall x \in X \;\; \mathbf{0}(x) = 0$$

مجموعه‌ی مرجع

$$\chi_{X} \qquad \mathbf{1} : X \to \{0,1\} \qquad \forall x \in X \;\; \mathbf{1}(x) = 0$$

تابع مشخصه

عدد اصلی (کاردینالیته)

CHARACTERISTIC FUNCTION

عدد اصلی (کاردینالیته) = تعداد اعضای مجموعه

$$|A| = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$$

$$A \subseteq X$$

تابع عضویت

MEMBERSHIP FUNCTION

فرض می‌کنیم X مجموعه‌ی مرجع باشد و $x \in X$.
زیرمجموعه‌ی فازی A از X توسط تابع عضویت آن تعریف می‌شود:

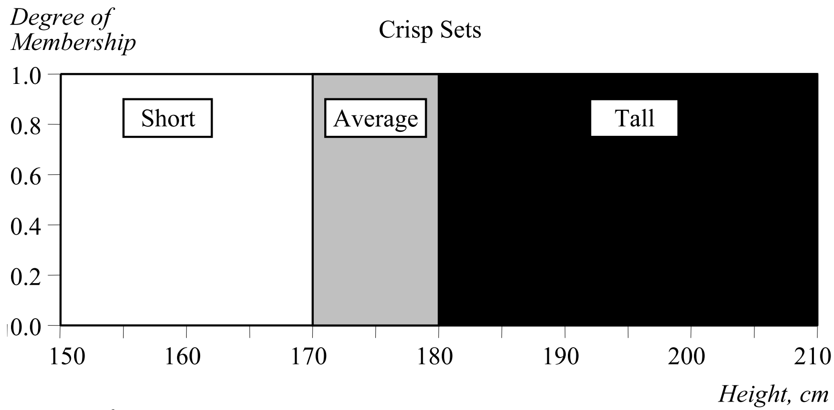
$$\mu_A : X \to [0,1] \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \text{ is totally in } A \\ c, \text{if } x \text{ is partly in } A, 0 < c < 1 \\ 0, \text{if } x \text{ is not in } A \end{cases}$$

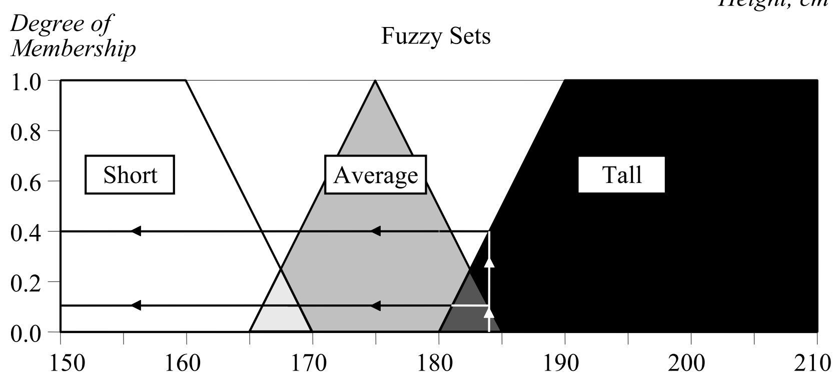
برای بازنمایی یک مجموعه‌ی فازی، از تابع عضویت آن استفاده می‌کنیم.

تابع عضویت $\mu_A(x)$ به‌صورت $A(x)$ هم نشان داده می‌شود.

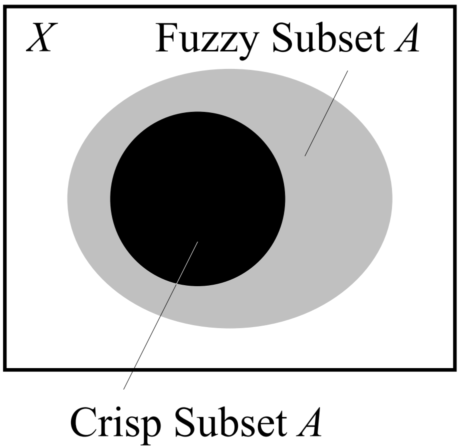
تابع مشخصه (غیرفازی) و تابع عضویت (فازی)

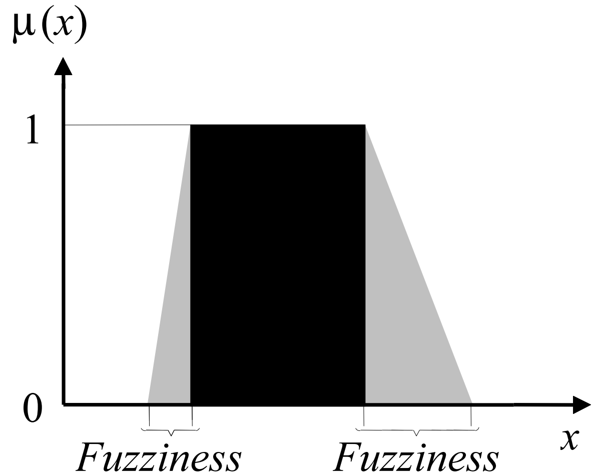
مثال: سه مجموعه‌ی «کوتاه»، «متوسط» و «بلند»





بازنمایی زیرمجموعه‌های کریسپ و فازی





استفاده از توابع تکه تکه خطی
(به‌جای توابع منحنی)
برای افزایش سرعت محاسبات

نمایش مجموعه‌ی فازی

نمادگذاری ویژه

$$a_i = \mu_A(x_i) = A(x_i)$$

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2 + a_3/x_3 + \cdots + a_n/x_n$$

حالت گسسته :

$$A = \sum_i a_i/x_i$$

حالت پیوسته :

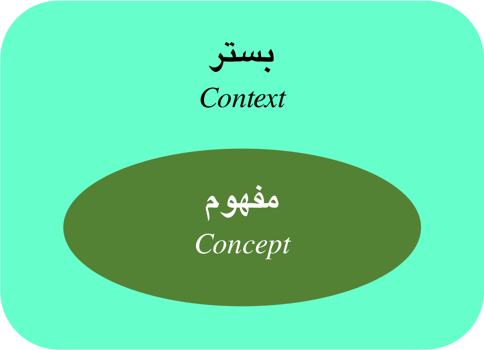
$$A = \int_{x \in X} A(x)/x$$

مفاهیم زبانی و منطق فازی

LINGUISTIC CONCEPTS AND FUZZY LOGIC

مجموعه‌های فازی این امکان را به ما می‌دهند که مفاهیم زبانی در زبان طبیعی را مدل و بیان کنیم.

مفاهیم زبانی، به بستر استفاده هم وابستگی دارند.



مثال:

مفهوم
دمای بالا
بستر:
- برای کوره
- برای اتاق

مثال:

مفهوم
ارتفاع
بستر:
- برای انسان
- برای ساختمان

مفید بودن استفاده از این نظریه، وابسته به توانایی ما در تعریف توابع عضویت است.

متغیرهای زبانی

Linguistic Variables

یک **متغیر زبانی**، یک متغیر فازی است.

مثال: اگر بگوییم

John is tall

یعنی متغیر زبانی John مقدار زبانی tall را می‌گیرد.

متغیرهای زبانی و هج‌ها

مثال

LINGUISTIC VARIABLES AND HEDGES

در سیستم‌های خبره‌ی فازی متغیرهای زبانی در قاعده‌های فازی استفاده می‌شوند.
مثلاً:

IF wind is strong
THEN sailing is good

IF project_duration is long
THEN completion_risk is high

IF speed is slow
THEN stopping_distance is short

متغیرهای زبانی و هج‌ها

مثال

Linguistic Variables and Hedges

دامنه‌ی مقادیر ممکن یک متغیر زبانی، عالم سخن آن متغیر را نشان می‌دهد.

برای مثال:

عالم سخن متغیر زبانی **سرعت** (speed):

بازه‌ای بین 0 تا 220 km/h است

و می‌تواند شامل زیرمجموعه‌های فازی زیر باشد:

بسیار کند	کند	متوسط	تند	بسیار تند
very slow	*slow*	*medium*	*fast*	*very fast*

هج‌ها

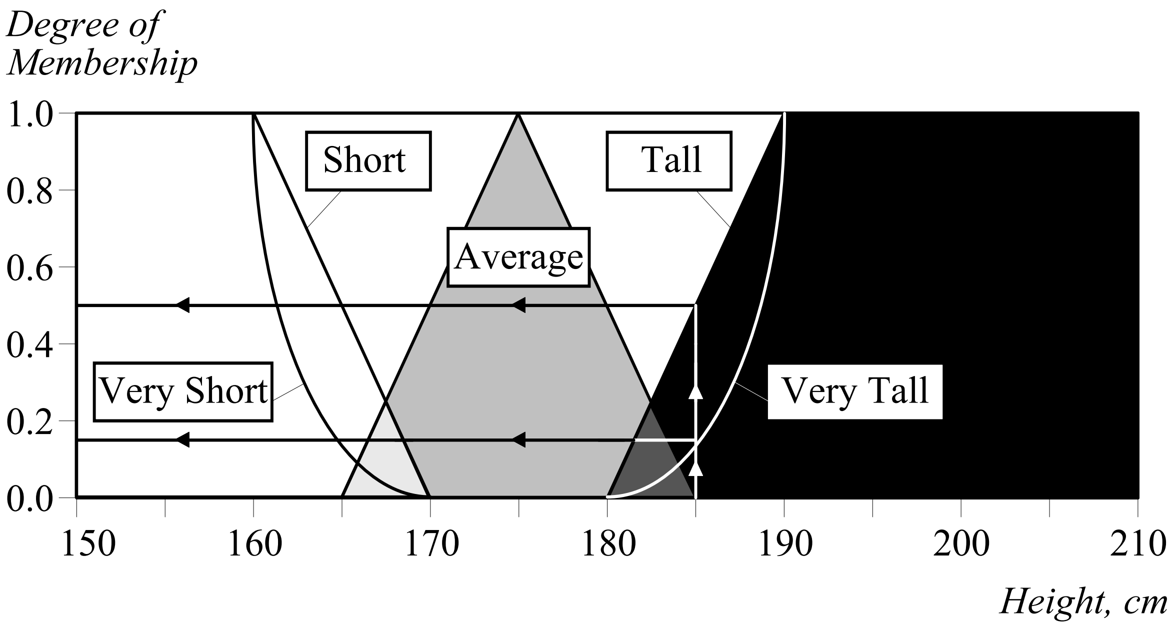
HEDGES

یک **هج**، عبارتی است که شکل مجموعه‌ی فازی را تغییر می‌دهد.

مانند: قیدهایی چون بسیار، مقداری، بکلی، کم و بیش، اندکی، ...

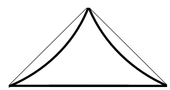
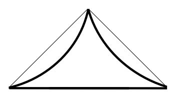
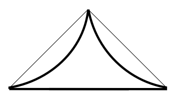
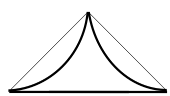
هج‌ها

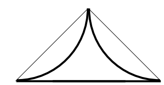
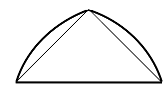
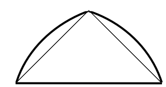
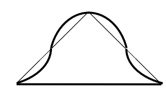
مثال: مجموعه‌های فازی با هج very



هج‌ها

بازنمایی هج‌ها در منطق فازی

Hedge	*Mathematical Expression*	*Graphical Representation*
A little	$[\mu_A(x)]^{1.3}$	
Slightly	$[\mu_A(x)]^{1.7}$	
Very	$[\mu_A(x)]^{2}$	
Extremely	$[\mu_A(x)]^{3}$	

Hedge	*Mathematical Expression*	*Graphical Representation*
Very very	$[\mu_A(x)]^{4}$	
More or less	$\sqrt{\mu_A(x)}$	
Somewhat	$\sqrt{\mu_A(x)}$	
Indeed	$2\,[\mu_A(x)]^2$ if $0 \le \mu_A \le 0.5$ $1 - 2\,[1-\mu_A(x)]^2$ if $0.5 < \mu_A \le 1$	

برش آلفا

α-CUT

برش آلفا
α-cut

مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی که درجه‌ی عضویت آنها بزرگتر از یا مساوی با α است.

$$[A]^{\alpha} = \{x : A(x) \geq \alpha\}$$

برش آلفای قوی
strongly α-cut

مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی که درجه‌ی عضویت آنها بزرگتر از α است.

$$[A]^{\alpha+} = \{x : A(x) > \alpha\}$$

مجموعه‌ی سطوح

LEVEL SET

مجموعه‌ی سطوح
Level Set

مجموعه‌ی حاوی همه‌ی سطوح برش ممکن در برش‌های آلفا

$$\Lambda(A) = \{\alpha : \exists x \in X,\ A(x) = \alpha\}$$

برش آلفا

خاصیت تودرتویی

برش‌های آلفای یک مجموعه‌ی فازی، یک **خانواده‌ی تودرتو** ایجاد می‌کند.

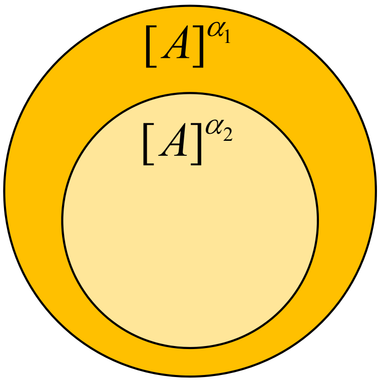
خانواده‌ی تودرتو از مجموعه‌های معمولی

$$\alpha_1 \leq \alpha_2, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$$

$$\Downarrow$$

$$[A]^{\alpha_1} \supseteq [A]^{\alpha_2}$$

$$[A]^{\alpha_1+} \supseteq [A]^{\alpha_2+}$$



برش آلفا

حالات خاص

Zero-cut of A

$$[A]^0 = X$$

Strongly one-cut of A

$$[A]^{1+} = \varnothing$$

برش آلفا

بازنمایی یک مجموعه‌ی فازی با برش‌های آلفای آن

$$[A]_\alpha = \alpha \cdot [A]^\alpha$$

تجزیه
Decomposition

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [A]_\alpha$$

برش آلفا

بازنمایی یک مجموعه‌ی فازی با برش‌های آلفای آن: مثال

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]^{0.2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]^{0.4} = \frac{0}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]^{0.6} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]^{0.8} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]^{1} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$[A]_\alpha = \alpha \cdot [A]^\alpha \quad \Rightarrow$$

$$[A]_{0.2} = 0.2 \cdot [A]^{0.2} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.2}{x_4} + \frac{0.2}{x_5}$$

$$[A]_{0.4} = 0.4 \cdot [A]^{0.4} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.4}{x_4} + \frac{0.4}{x_5}$$

$$[A]_{0.6} = 0.6 \cdot [A]^{0.6} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.6}{x_5}$$

$$[A]_{0.8} = 0.8 \cdot [A]^{0.8} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{0.8}{x_5}$$

$$[A]_{1} = 1.0 \cdot [A]^{1.0} = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [A]_\alpha = [A]_{0.2} + [A]_{0.4} + [A]_{0.6} + [A]_{0.8} + [A]_1$$

تکیه‌گاه (پشتیبان، محمل)

SUPPORT

تکیه‌گاه
Support

تکیه‌گاه یک مجموعه‌ی فازی: همه‌ی عناصری که درجه عضویت ناصفر دارند.

$$\operatorname{supp}(A) = \{x \in X : A(x) > 0\}$$

Support of A = Strongly zero-cut of A

$$\operatorname{supp}(A) = [A]^{0+}$$

مغز

CORE

مغز
Core

مغز یک مجموعه‌ی فازی: همه‌ی عناصری که درجه عضویت یک دارند.

$$\text{core}(A) = \{x \in X : A(x) = 1\}$$

Core of A = one-cut of A

$$\text{core}(A) = [A]^1$$

ارتفاع

HEIGHT

ارتفاع
Height

ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی: بزرگترین درجه‌ی عضویت آن مجموعه‌ی فازی

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$$

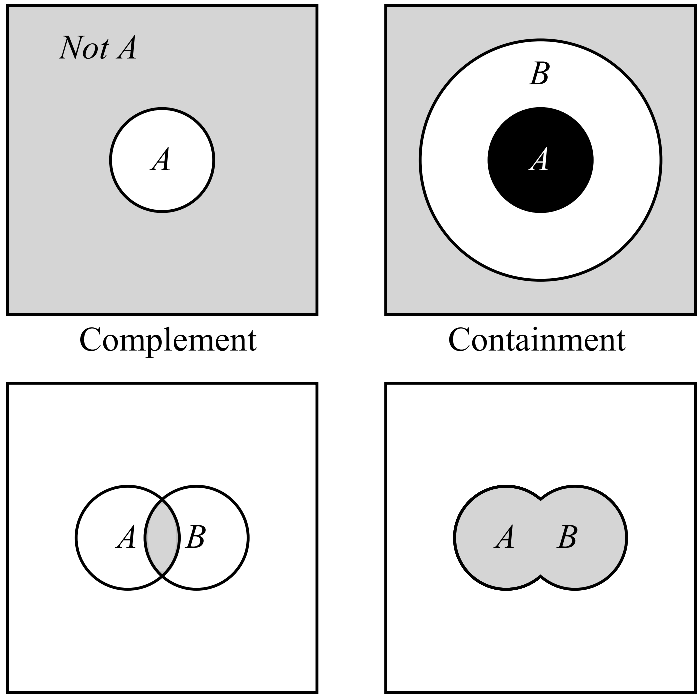
Normal Fuzzy Set:

$$h(A) = 1$$

Sub-normal Fuzzy Set:

$$h(A) < 1$$

عملیات روی مجموعه‌های معمولی



Complement
Containment
Intersection
Union

عملیات روی مجموعه‌های فازی

عمل متمم (مکمل) استاندارد

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

عملیات روی مجموعه‌های فازی

عمل زیرمجموعه استاندارد

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(\mu_A(x) \le \mu_B(x))$$

عملیات روی مجموعه‌های فازی

عمل اشتراک استاندارد

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}=\mu_A(x)\cap\mu_B(x)$$

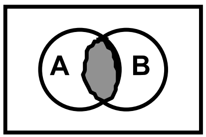
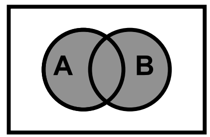
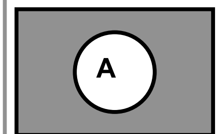
عملیات روی مجموعه‌های فازی

عمل اجتماع استاندارد

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \bigcup \mu_B(x)$$

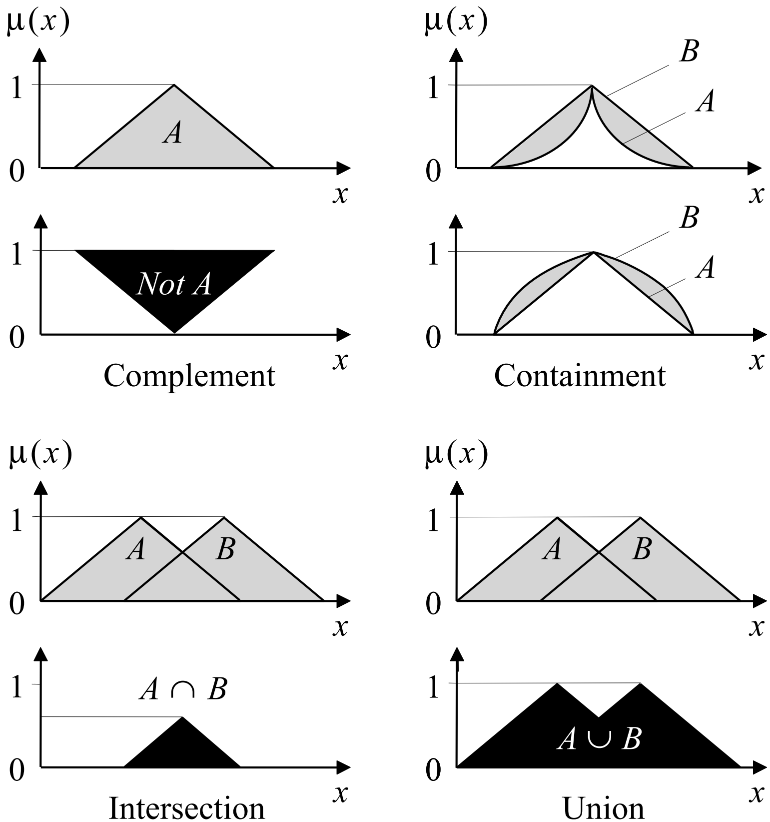
عملیات روی مجموعه‌های فازی

عملگرهای استاندارد

Intersection	Union	Complement
$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A}$
		
$\mu_{A \cap B}(x) =$	$\mu_{A \cup B}(x) =$	$\mu_{\bar{A}}(x) =$
classical $\begin{cases} 1 & x \in A \cap B \\ 0 & x \notin A \cap B \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & x \in A \cup B \\ 0 & x \notin A \cup B \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & x \notin A \\ 0 & x \in A \end{cases}$
fuzzy $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$1 - \mu_A(x)$
AND	**OR**	**NOT**

عملیات روی مجموعه‌های فازی

نمایش نموداری عملگرهای استاندارد



عملیات روی مجموعه‌های فازی

عملگرهای جایگزین

اشتراک *Intersection*	اجتماع *Union*
T-norm	*T-conorm*
$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$	$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$
استاندارد (Standard)	
$\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$	$\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
ضرب (Product)	
$\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
جمع کران‌دار (Bounded Sum)	
$\max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$	$\min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

نقاط تعادل

EQUILIBRIUM POINTS

نقاط تعادل
Equilibrium Points

نقاطی از مجموعه‌ی مرجع که درجه‌ی عضویت در مجموعه‌ی A برابر با درجه عضویت آنها در مکمل A است.

$$x \in X, \quad A(x) = \overline{A}(x)$$

برای عملگر مکمل استاندارد:

$$q_x = 0.5$$

نقض قوانین آشنای مجموعه‌های معمولی در مجموعه‌های فازی

برای مجموعه‌های فازی این دو قانون لزوماً برقرار نیست:

$$\cancel{A \cap \bar{A} = \varnothing}$$

$$\cancel{A \cup \bar{A} = X}$$

کاردینالیته‌ی مجموعه‌ی فازی

کاردینالیته‌ی اسکالر

CARDINALITY

کاردینالیته‌ی اسکالر
Scalar Cardinality

تعبیری از تعداد عناصر یک مجموعه‌ی فازی

حالت گسسته :

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x)$$

(Sigma-count of *A*)

حالت پیوسته :

$$|A| = \int_{x \in X} A(x)\, dx$$

کاردینالیته‌ی مجموعه‌ی فازی

کاردینالیته‌ی نسبی

CARDINALITY

کاردینالیته‌ی نسبی
Relative Cardinality

نسبت کاردینالیته‌ی یک مجموعه‌ی فازی نسبت به کاردینالیته‌ی مجموعه‌ی مرجع آن

به شرط متناهی بودن مجموعه‌ها/انتگرال‌ها

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|}$$

فازی‌سازی یک تابع

FUZZIFICATION OF A FUNCTION

تابع کریسپ
Crips Function

می‌گوییم یک تابع معمولی

$$f : X \to Y$$

فازی شده است، اگر به‌گونه‌ای گسترش پیدا کند
که بر روی مجموعه‌های فازی X و Y عمل کند.

تابع فازی‌شده
Fuzzified Function

$$f : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

$$f^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$$

فازی‌سازی یک تابع

حالت خاص

FUZZIFICATION OF A FUNCTION

$$f : 2^X \to 2^Y$$

$$f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\} = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}$$

$$f^{-1} : 2^Y \to 2^X$$

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

بیان ساختار فوق با تابع مشخصه

$$\Downarrow$$

$$f : 2^X \to 2^Y$$

$$(f(A))(y) = \max_{x:y=f(x)} A(x)$$

$$f^{-1} : 2^Y \to 2^X$$

$$(f^{-1}(B))(x) = B(f(x))$$

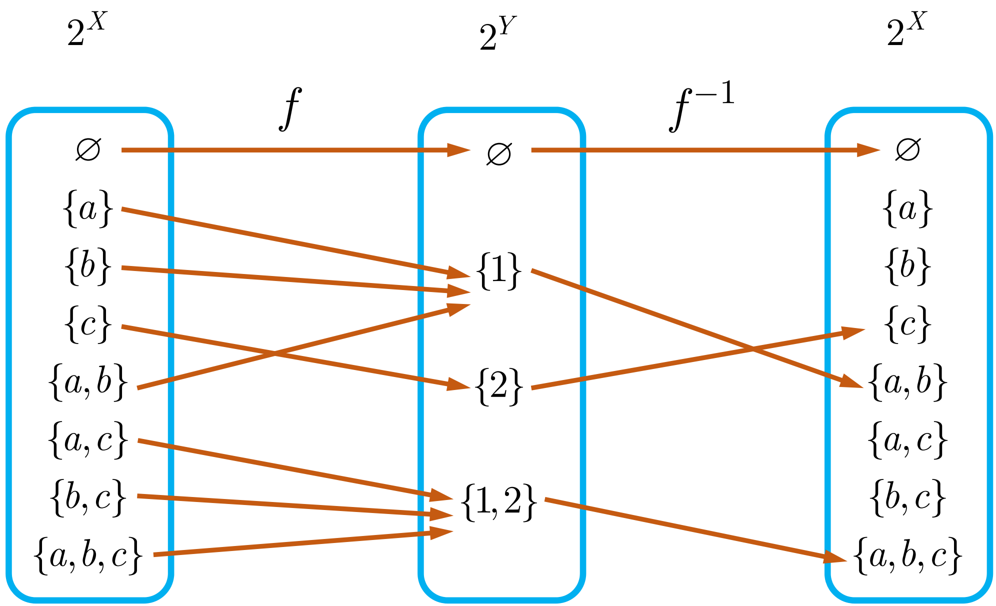
فازی‌سازی یک تابع

حالت خاص: مثال

FUZZIFICATION OF A FUNCTION

$$f = \{a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 2\}$$

$$f(\varnothing) = \varnothing \qquad f(\{b\}) = \{1\} \qquad f(\{a,c\}) = \{1,2\}$$



اصل گسترش برای مجموعه‌های فازی

Extension Principle for Fuzzy Sets

تابع کریسپ
Crips Function

هر تابع معمولی به صورت

$$f : X \rightarrow Y$$

دو تابع فازی را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کند:

تابع فازی‌شده
Fuzzified Function

$$f : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

$$\forall A \in \mathcal{F}(X) \quad (f(A))(y) = \sup_{x:y=f(x)} A(x)$$

$$f^{-1} : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

$$\forall B \in \mathcal{F}(Y) \quad (f^{-1}(B))(x) = B(f(x))$$

هوش مصنوعی پیشرفته

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

۳

رابطه‌های فازی

رابطه

RELATION

یک رابطه میان مجموعه‌های معمولی، یک زیرمجموعه از ضرب دکارتی آن مجموعه‌هاست.

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & ,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R \\ 0 & ,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin R \end{cases}$$

رابطه

نمایش رابطه با آرایه

RELATION

هر رابطه‌ی nتایی را می‌توان با یک آرایه‌ی nتایی نمایش داد:

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

$$R = \left[r[i_1, i_2, \cdots, i_n] \right] \qquad r[i_1, i_2, \cdots, i_n] = \begin{cases} 1 & ,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R \\ 0 & ,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin R \end{cases}$$

رابطه‌ی فازی

FUZZY RELATION

رابطه‌ی فازی با گسترش تابع عضویت رابطه از حالت معمولی به حالت فازی به‌دست می‌آید.

یک رابطه‌ی فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از ضرب دکارتی آن مجموعه‌هاست.

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \mathcal{F}(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]$$

رابطه‌ی دودویی فازی

FUZZY BINARY RELATION

رابطه‌های دودویی، توسعه‌ی رابطه‌های تابعی هستند.

رابطه‌ی فازی دودویی
Fuzzy Binary Relation

$$R(X, Y)$$

رابطه‌ی دودویی فازی

دامنه

FUZZY BINARY RELATION

دامنه‌ی یک رابطه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی است:

هر عنصر مجموعه‌ی X متعلق به دامنه‌ی R است
با درجه‌ای برابر با قوت قوی‌ترین رابطه با هر عنصر Y

دامنه
Domain

$$\operatorname{dom} R(x) = \max_{y \in Y} R(x, y)$$

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

رابطه‌ی دودویی فازی

برد

Fuzzy Binary Relation

برد یک رابطه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی است:

هر عنصر مجموعه‌ی Y متعلق به برد R است
با درجه‌ای برابر با قوت قوی‌ترین رابطه با هر عنصر X

برد
Range

$$\operatorname{ran} R(y) = \max_{x \in X} R(x, y)$$

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition

کاظم فولادی

رابطه‌ی دودویی فازی

مثال

Two fuzzy binary relations, $P(X, Y)$ and $Q(Y, Z)$ are given:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

We read that, e.g.,

$$dom\ P(x_2) = \max[0.0, 0.7, 1.0] = 1.0,$$
$$ran\ Q(y_3) = \max[0.7, 0.0, 0.5] = 0.7.$$

رابطه‌ی دودویی فازی

ارتفاع

FUZZY BINARY RELATION

ارتفاع یک رابطه‌ی فازی،
بزرگ‌ترین درجه عضویت به‌دست آمده از هر زوج رابطه است.

ارتفاع
Height

$$h(R) = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} R(x, y)$$

رابطه‌ی دودویی فازی

روش‌های نمایش

FUZZY BINARY RELATION

روش‌های نمایش رابطه‌ی دودویی فازی		
ماتریس عضویت *Membership Matrix*	نمودار پیکانی *Sagittal Diagram*	نمایش مجموعه‌ای *Set Representation*

رابطه‌ی دودویی فازی

نمایش با ماتریس عضویت

FUZZY BINARY RELATION

روش‌های نمایش رابطه‌ی دودویی فازی		
ماتریس عضویت *Membership Matrix*	نمودار پیکانی *Sagittal Diagram*	نمایش مجموعه‌ای *Set Representation*

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \qquad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

$$\mathbf{R} = [r_{xy}]_{m\times n}$$

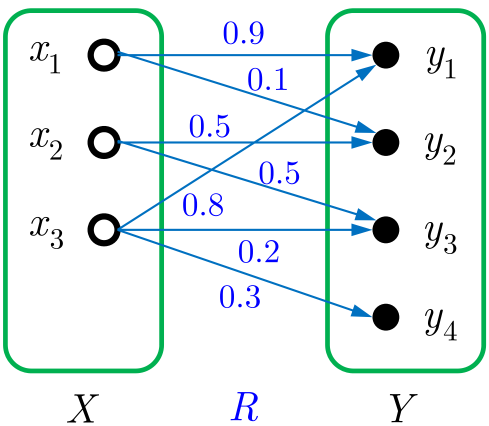
$$r_{xy} = R(x, y)$$

رابطه‌ی دودویی فازی

نمایش با نمودار پیکانی

FUZZY BINARY RELATION

روش‌های نمایش رابطه‌ی دودویی فازی		
ماتریس عضویت *Membership Matrix*	**نمودار پیکانی** *Sagittal Diagram*	نمایش مجموعه‌ای *Set Representation*



- هر مجموعه‌ی X و Y به صورت مجموعه‌ای از گره‌ها نمایش داده می‌شود.
- اعضای $X \times Y$ با درجه‌ی عضویت ناصفر در $R(X,Y)$ با یال‌های جهت‌داری که گره‌های مربوط را به هم وصل می‌کنند، نشان داده می‌شود.
- برچسب این یال‌ها درجه‌ی عضویت است.

رابطه‌ی دودویی فازی

نمایش مجموعه‌ای

FUZZY BINARY RELATION

روش‌های نمایش رابطه‌ی دودویی فازی

نمایش مجموعه‌ای *Set Representation*	نمودار پیکانی *Sagittal Diagram*	ماتریس عضویت *Membership Matrix*

$$R = \frac{0.1}{(x_1, y_1)} + \frac{0.5}{(x_1, y_2)} + \frac{0.4}{(x_1, y_3)} + \frac{0.3}{(x_2, y_1)} + \frac{0.1}{(x_2, y_2)}$$

رابطه‌ی دودویی فازی

وارون یک رابطه

FUZZY BINARY RELATION

وارون (معکوس) یک رابطه‌ی دودویی فازی $R(X,Y)$ به صورت $R^{-1}(Y,X)$ نمایش داده می‌شود.

وارون
Reverse

$$R(X,Y) \in \mathcal{F}(X \times Y)$$
$$\Downarrow$$
$$R^{-1}(Y,X) \in \mathcal{F}(Y \times X)$$

$$\forall x \in X, y \in Y \; R^{-1}(y,x) = R(x,y)$$

ماتریس عضویت رابطه‌ی R^{-1} ترانهاده‌ی ماتریس عضویت رابطه‌ی R است:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$$

خاصیت برگشتی: برای هر رابطه‌ی دودویی فازی داریم: $(R^{-1})^{-1} = R$.

رابطه‌ی دودویی فازی

ترکیب روابط فازی

Composition

دو رابطه‌ی فازی P و Q زیر را با مجموعه‌ی مشترک Y به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P(X,Y), \quad Q(Y,Z)$$

ترکیب استاندارد این دو رابطه:

$$P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$$

یک رابطه‌ی دودویی R به صورت زیر تولید می‌کند:

$$R(X,Z)$$

$$\forall x \in X, z \in Z \quad R(x,z) = (P \circ Q)(x,z) = \max_{y \in Y} \min\{P(x,y), Q(y,z)\}$$

$$\boxed{\forall x \in X, z \in Z \quad R(x,z) = (P \circ Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \wedge \{P(x,y), Q(y,z)\}}$$

رابطه‌ی دودویی فازی

ترکیب روابط فازی: خصوصیات

Composition

خاصیت وارون ترکیب

$$(P(X,Y) \circ Q(Y,Z))^{-1} = Q^{-1}(Z,Y) \circ P^{-1}(Y,X)$$

شرکت‌پذیری

$$(P(X,Y) \circ Q(Y,Z)) \circ R(Z,W) = P(X,Y) \circ (Q(Y,Z) \circ R(Z,W))$$

جابجاناپذیری ترکیب استاندارد

$$P(X,Y) \circ Q(Y,Z) \neq Q(Y,Z) \circ P(X,Y)$$

رابطه‌ی دودویی فازی

ترکیب روابط فازی: نمایش ماتریسی

COMPOSITION

با داشتن ماتریس روابط

$$\mathbf{P} = [p_{ik}], \quad \mathbf{Q} = [q_{kj}]$$

ماتریس رابطه‌ی ترکیب دو رابطه‌ی فوق می‌شود:

$$\mathbf{R} = [\mathrm{r}_{ij}]$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$$

$$[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}]$$

$$r_{ij} = \max_{k} \min\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

رابطه‌ی دودویی فازی

مثال

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$R = P \circ Q = [r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}] = [\max_k \min(p_{ik}, q_{kj})]$$

$$\begin{aligned} R &= P \circ Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For example

$$\begin{aligned} r_{23} &= \max[\min(0.0, 0.7), \min(0.7, 0.0), \min(1.0, 0.5)] \\ &= \max[0.0, 0.0, 0.5] = 0.5. \end{aligned}$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X) \qquad R(X^2)$$

حالت کریسپ

$$R(X^2) \subseteq X \times X = X^2$$

حالت فازی

$$R(X^2) \in \mathcal{F}(X \times X) = \mathcal{F}(X^2)$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

روش‌های نمایش

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

روش‌های نمایش رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد			
ماتریس عضویت *Membership Matrix*	**نمودار پیکانی** *Sagittal Diagram*	**نمایش مجموعه‌ای** *Set Representation*	**گراف جهت‌دار** *Directed Graph*
ماتریس مربعی			**گره‌ها:** اعضای X **یال‌ها:** رابطه‌ی اعضا برچسب یال‌ها = درجه‌ی عضویت مخالف صفر

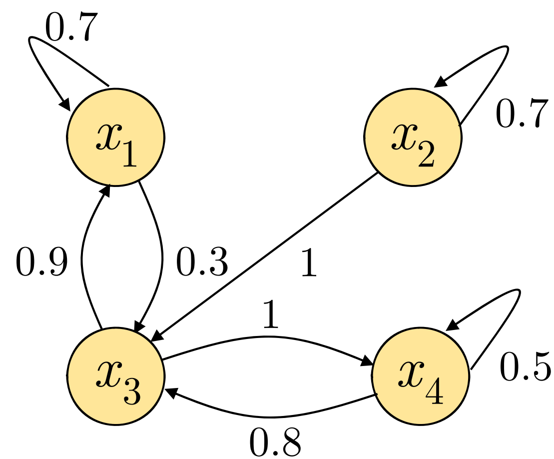
رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

نمایش با گراف جهت‌دار

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$



رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت بازتابی

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X)$$

بازتابی

Reflexive

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in X \rightarrow R(x, x) = 1$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت غیربازتابی

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X)$$

غیربازتابی

Irreflexive

$$\Updownarrow$$

$$\exists x \in X \wedge R(x, x) \neq 1$$

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت ضدبازتابی

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X)$$

پادبازتابی

Anti-reflexive

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in X \rightarrow R(x, x) \neq 1$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت اپسیلون–بازتابی

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

$$R(X, X)$$

ε–بازتابی

ε-reflexive

$$\Updownarrow$$

$$\exists\varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)\ \forall x \in X \rightarrow R(x, x) \geq \varepsilon$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت تقارنی

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

$$R(X, X)$$

تقارنی

Symmetric

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, y \in X \rightarrow R(x, y) = R(y, x)$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت غیرتقارنی

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X)$$

غیرتقارنی

Asymmetric

$$\Updownarrow$$

$$\exists x, y \in X \to R(x, y) \neq R(y, x)$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت پادتقارنی

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X, X)$$

پادتقارنی

Anti-symmetric

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, y \in X \ (R(x, y) > 0 \wedge R(y, x) > 0) \rightarrow x = y$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت تراگذری

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

$$R(X, X)$$

تراگذری

Transitive

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, z \in X \rightarrow R(x, z) \geq \max_{y \in X} \min\{R(x, y), R(y, z)\}$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت غیرتراگذری

FUZZY BINARY RELATION ON A SINGLE SET

$$R(X,X)$$

غیرتراگذری

Non-transitive

$$\Updownarrow$$

$$\exists x,z \in X \wedge R(x,z) \ngeq \max_{y\in X} \min\{R(x,y), R(y,z)\}$$

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

خاصیت پادتراگذری

Fuzzy Binary Relation on a Single Set

$$R(X, X)$$

پادتراگذری

Anti-transitive

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, z \in X \to R(x,z) < \max_{y \in X} \min\{R(x,y), R(y,z)\}$$

max-min transitive

رابطه‌ی دودویی فازی روی یک مجموعه‌ی واحد

برخی روابط مهم و معروف

	بازتابی *Reflexive*	پادبازتابی *Anti-reflexive*	تقارنی *Symmetric*	پادتقارنی *Anti-Symmetric*	تراگذری *Transitive*
هم‌ارزی / تشابه *Equivalence/ Similarity*	■		■		■
شبه–هم‌ارزی *Quasi-equivalence*			■		■
سازگاری / تحمل *Compatibility / Tolerance*	■		■		
ترتیب جزئی *Partial Ordering*	■			■	■
پیش‌ترتیب / شبه–ترتیب *Preordering / Quasi-ordering*	■				■
ترتیب اکید *Strict Ordering*		■		■	■

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

هوش مصنوعی پیشرفته

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

۴

اعداد فازی
و
جبر فازی

اعداد تقریبی

Approximate Numbers

عدد تقریبی *Approximate Number*	«اعدادی که به یک عدد حقیقی داده شده نزدیک هستند.» «اعدادی که پیرامون یک بازه‌ی داده شده از اعداد حقیقی قرار دارند.»

اعداد فازی

استفاده از مجموعه‌های فازی برای بیان اعداد تقریبی

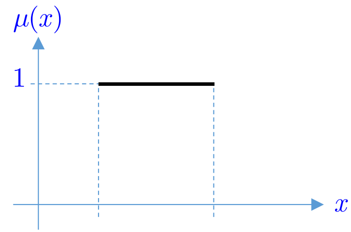
FUZZY NUMBERS

عدد تقریبی *Approximate Number*	«اعدادی که به یک عدد حقیقی داده شده نزدیک هستند.» «اعدادی که پیرامون یک بازه‌ی داده شده از اعداد حقیقی قرار دارند.»
عدد فازی *Fuzzy Number*	نوع خاصی از مجموعه‌های فازی تعریف شده به صورت $A: \mathbb{R} \to [0,1]$ برای اینکه مجموعه فازی A روی $\mathbb{R}$ یک عدد فازی باشد، باید حداقل خواص زیر را داشته باشد:

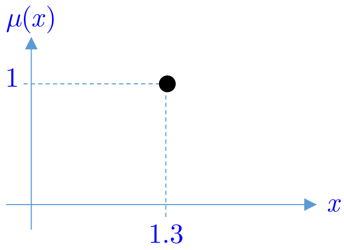
- A باید یک مجموعه‌ی فازی **نرمال** باشد.
  (زیرا مجموعه‌ی «اعداد حقیقی نزدیک به r» باید در r کاملاً ارضا شود [عضویت کامل].)
- $[A]^\alpha$ باید برای هر $\alpha > 0$ یک **بازه‌ی بسته** باشد.
  (تا بتوان اعمال فازی را بر حسب اعمال روی بازه‌ها به‌طور معنی‌داری تعریف کرد.)
- تکیه‌گاه A باید **کران‌دار** باشد.

مقایسه‌ی اعداد فازی با اعداد حقیقی

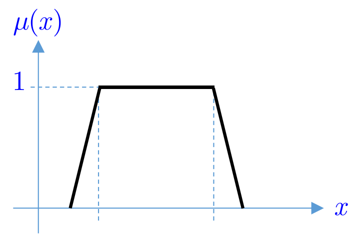
بازه‌ی حقیقی
Real Interval



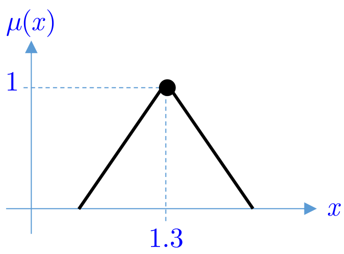
عدد حقیقی
Real Number



بازه‌ی فازی
Fuzzy Interval



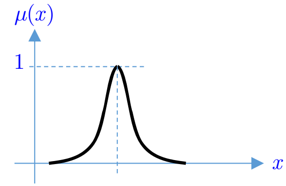
عدد فازی
Fuzzy Number



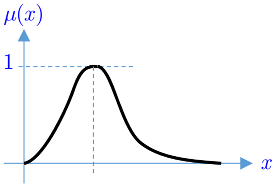
انواع پایه‌ی عدد فازی

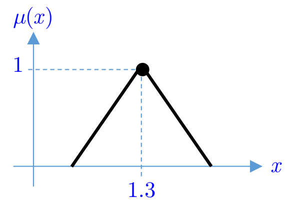
عدد متقارن
Symmetric

عدد نامتقارن
Asymmetric

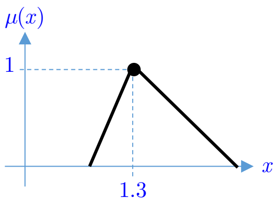


زنگوله‌ای شکل
Bell-Shaped

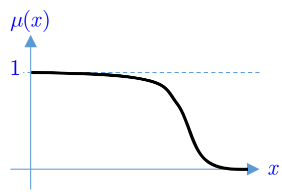




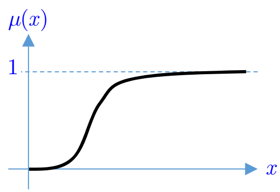
مثلثی شکل
Triangle-Shaped



عدد کوچک
Small



عدد بزرگ
Large



عدد فازی

قضیه

قضیه

فرض می‌کنیم $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد.

در این صورت، A یک عدد فازی است **اگر و فقط اگر**

یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b] \neq \emptyset$ وجود داشته باشد که

$$A(x) = \begin{cases} l(x) & , x \in (-\infty, a) \\ 1 & , x \in [a, b] \\ r(x) & , x \in (b, +\infty) \end{cases}$$

که در آن:

$l: (-\infty,a) \to [0,1]$ یک تابع یکنوای صعودی پیوسته از راست است که

$$l(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \in (-\infty, \omega_1)$$

و

$r: (b, +\infty) \to [0,1]$ یک تابع یکنوای نزولی پیوسته از چپ است که

$$r(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \in (\omega_2, +\infty)$$

حساب فازی

عملیات روی اعداد فازی

حساب فازی بر اساس دو خاصیت اعداد فازی استوار است:

۱) هر مجموعه‌ی فازی و در نتیجه هر عدد فازی می‌تواند به‌طور کامل و یکتا با برش‌های آلفای آن بازنمایی شود.
۲) برش‌های آلفای اعداد فازی (غیر از برش صفر)، بازه‌های بسته‌ی اعداد حقیقی هستند.

$\Downarrow$

می‌توانیم اعمال حسابی روی اعداد فازی را
بر حسب اعمال حسابی روی **برش‌های آلفای آنها** تعریف کنیم.

$\Downarrow$

می‌توانیم اعمال حسابی روی اعداد فازی را
بر حسب اعمال حسابی روی **بازه‌های بسته** تعریف کنیم.

اعداد بازه‌ای

عدد بازه‌ای
Interval Number

عدد بازه‌ای بازنمایی‌کننده‌ی یک **عدد حقیقی نامطمئن** است.

$$A = [a_1, a_2] = \{x : a_1 \le x \le a_2,\ x \in \mathbb{R}\}$$

حساب بازه‌ای

عملیات روی اعداد بازه‌ای

برای بازه‌های A و B و عملگرهای $\{+, -, \times, \div\} \ni \circledast$ تعریف می‌کنیم:

$$A \circledast B = \{a \circledast b : a \in A, b \in B\}$$

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$[a, b] \div [c, d] = [a, b] \cdot \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right] \text{provided that } 0 \notin [c, d]$$

$$\alpha[a, b] = \begin{cases} [\alpha a, \alpha b] & \text{for } \alpha > 0 \\ [\alpha b, \alpha a] & \text{for } \alpha < 0 \end{cases}$$

(تقسیم زمانی تعریف می‌شود که $0 \notin B$)

حساب بازه‌ای

مثال

$$-3 \cdot [1, 2] = [-6, -3]$$

$$[0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$$

$$[1, 3] \cdot [2, 4] = [\min(2, 4, 6, 12), \max(2, 4, 6, 12)] = [2, 12]$$

$$[1, 2] \div [1, 2] = [1, 2] \cdot [\tfrac{1}{2}, 1] = [\tfrac{1}{2}, 2]$$

حساب بازه‌ای

خواص اعمال

$$A = [a_1, a_2] \quad B = [b_1, b_2] \quad C = [c_1, c_2] \quad 0 = [0,0] \quad 1 = [1,1]$$

زیرتوزیع‌پذیری
Sub-distributivity

$$A \times (B + C) \subseteq A \times B + A \times C$$

توزیع‌پذیری
Distributivity

$$(\text{if} \;\; \forall b \in B, c \in C \rightarrow bc \geq 0) \Rightarrow$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
$$(\text{if} \;\; A = [a, a]) \Rightarrow$$
$$a \times (B + C) = a \times B + a \times C$$

یکنوایی در شمول
Inclusion Monotonicity

$$(\text{if} \;\; A \subseteq E \wedge B \subseteq F) \Rightarrow$$
$$A + B \subseteq E + F$$
$$A - B \subseteq E - F$$
$$A \times B \subseteq E \times F$$
$$A \div B \subseteq E \div F$$

جابجایی
Commutativity

$$A + B = B + A$$
$$A \times B = B \times A$$

شرکت‌پذیری
Associativity

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

عضو همانی
Identity

$$A = 0 + A = A + 0$$
$$A = 1 \times A = A \times 1$$

$$0 \in A - A$$
$$1 \in A \div A$$

حساب بازه‌ای

خواص اعمال : مثال

زیرتوزیع‌پذیری
Sub-distributivity

$$A \times (B + C) \subseteq A \times B + A \times C$$

Consider the following example of subdistributivity. For $\mathrm{I} = [1, 2]$, $\mathrm{J} = [2, 3]$, $\mathrm{K} = [1, 4]$, then

$$\mathrm{I} \cdot (\mathrm{J} - \mathrm{K}) = [1, 2] \cdot ([2, 3] - [1, 4]) = [1, 2] \cdot [-2, 2] = [-4, 4]$$
$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{J} - \mathrm{I} \cdot \mathrm{K} = [1, 2] \cdot [2, 3] - [1, 2] \cdot [1, 4] = [2, 6] - [1, 8] = [-6, 5]$$

Now, $[-4, 4] \neq [-6, 5]$, but $[-4, 4] \subset [-6, 5]$.

حساب روی اعداد فازی

حساب روی اعداد فازی	
روش مبتنی بر حساب بازه‌ای *Based on Interval Arithmetics*	روش مبتنی بر اصل گسترش فازی *Based on Fuzzy Extension Principle*

برای اعداد فازی **پیوسته** هر دو تعریف همارز هستند.

حساب روی اعداد فازی

روش مبتنی بر حساب بازه‌ای

حساب روی اعداد فازی	
روش مبتنی بر حساب بازه‌ای *Based on Interval Arithmetics*	روش مبتنی بر اصل گسترش فازی *Based on Fuzzy Extension Principle*

$$[A \circledast B]^\alpha = [A]^\alpha \circledast [B]^\alpha$$

$$A \circledast B = \bigcup_\alpha \alpha \cdot [A \circledast B]^\alpha$$

حساب روی اعداد فازی

روش مبتنی بر اصل گسترش فازی

حساب روی اعداد فازی	
روش مبتنی بر حساب بازه‌ای *Based on Interval Arithmetics*	**روش مبتنی بر اصل گسترش فازی** *Based on Fuzzy Extension Principle*

$$A \circledast B = \sup_{z=x\circledast y} \min\Big(A(x), B(x)\Big)$$

هوش مصنوعی پیشرفته

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

۵

منطق فازی
و
استدلال
تقریبی

منطق

LOGIC

علم منطق: مطالعه‌ی اصول و روش‌های استدلال در همه‌ی صورت‌های ممکن آن.

منطق کلاسیک

منطق گزاره‌ای

Classical Logic

گزاره *Proposition*	جمله‌ای که باید **درست** (true) یا **نادرست** (false) باشد.
ارزش درستی *Truth Value*	ارزش درستی هر گزاره، مخالف ارزش درستی **نقیض** آن است.
متغیر منطقی *Logic Variable*	متغیر منطقی می‌تواند یکی از دو ارزش درستی را به‌دست آورد وقتی که با یک گزاره‌ی خاص جایگزین شود.

منطق گزاره‌ای، قواعد تولید متغیرهای جدید منطقی که می‌توانند از متغیرهای منطقی داده شده ایجاد شوند را مطالعه می‌کند.

در منطق گزاره‌ای (منطق مرتبه صفر) ساختار داخلی گزاره‌های پنهان شده پشت متغیرها مهم نیست.!

منطق کلاسیک

تابع منطقی

CLASSICAL LOGIC

تابع منطقی *Logic Function*	تابع منطقی به ترکیب ارزش‌های درستی متغیرهای آن، یک ارزش درستی نسبت می‌دهد.

$$f:\{true, flase\}^n \rightarrow \{true, false\}$$

برای n آرگومان، 2^n انتخاب وجود دارد $\Leftarrow$ 2^{2^n} تابع منطقی از n متغیر وجود دارد.

منطق کلاسیک

۱۶ تابع منطقی دو متغیره

CLASSICAL LOGIC

Logic functions of two variables

v_2 v_1	1 1	1 0	0 1	0 0	Function name	Adopted symbol
ω_1	0	0	0	0	Zero function	**0**
ω_2	0	0	0	1	NOR function	$v_1 \downarrow v_2$
ω_3	0	0	1	0	Inhibition	$v_1 > v_2$
ω_4	0	0	1	1	Negation	$\overline{v_2}$
ω_5	0	1	0	0	Inhibition	$v_1 < v_2$
ω_6	0	1	0	1	Negation	$\overline{v_1}$
ω_7	0	1	1	0	Exclusive OR	$v_1 \oplus v_2$
ω_8	0	1	1	1	NAND function	$v_1 \uparrow v_2$
ω_9	1	0	0	0	Conjunction	$v_1 \wedge v_2$
ω_{10}	1	0	0	1	Equivalence	$v_1 \Leftrightarrow v_2$
ω_{11}	1	0	1	0	Assertion	v_1
ω_{12}	1	0	1	1	Implication	$v_1 \Leftarrow v_2$
ω_{13}	1	1	0	0	Assertion	v_2
ω_{14}	1	1	0	1	Implication	$v_1 \Rightarrow v_2$
ω_{15}	1	1	1	0	Disjunction	$v_1 \vee v_2$
ω_{16}	1	1	1	1	One function	**1**

منطق کلاسیک

مجموعه‌های کامل از توابع ابتدایی منطقی

CLASSICAL LOGIC

Logic functions of two variables

v_2	1	1	0	0	Function	Adopted
v_1	1	0	1	0	name	symbol
ω_1	0	0	0	0	Zero function	**0**
ω_2	0	0	0	1	NOR function	$v_1 \downarrow v_2$
ω_3	0	0	1	0	Inhibition	$v_1 > v_2$
ω_4	0	0	1	1	Negation	$\overline{v_2}$
ω_5	0	1	0	0	Inhibition	$v_1 < v_2$
ω_6	0	1	0	1	Negation	$\overline{v_1}$
ω_7	0	1	1	0	Exclusive OR	$v_1 \oplus v_2$
ω_8	0	1	1	1	NAND function	$v_1 \uparrow v_2$
ω_9	1	0	0	0	Conjunction	$v_1 \wedge v_2$
ω_{10}	1	0	0	1	Equivalence	$v_1 \Leftrightarrow v_2$
ω_{11}	1	0	1	0	Assertion	v_1
ω_{12}	1	0	1	1	Implication	$v_1 \Leftarrow v_2$
ω_{13}	1	1	0	0	Assertion	v_2
ω_{14}	1	1	0	1	Implication	$v_1 \Rightarrow v_2$
ω_{15}	1	1	1	0	Disjunction	$v_1 \vee v_2$
ω_{16}	1	1	1	1	One function	**1**

Observe, e.g.:

$$\begin{aligned}\omega_{14}(v_1, v_2) &= \omega_{15}(\omega_6(v_1, v_2), v_2)\\ \omega_{10}(v_1, v_2) &= \omega_9(\omega_{14}(v_1, v_2), \omega_{12}(v_1, v_2))\end{aligned}$$

A task: Express all the logic functions of n variables by using only a small number of simple logic functions, preferably of one or two variables.

Such a set is **a complete set of logic primitives**.

Examples:

$$\{\textit{negation}, \textit{conjunction}, \textit{disjunction}\} = \{\omega_6, \omega_9, \omega_{15}\},$$
$$\{\textit{negation}, \textit{implication}\} = \{\omega_6, \omega_{14}\}.$$

منطق چندارزشی

MULTI-VALUED LOGIC

منطق چندارزشی
Multivalued Logic

منطقی که در آن n ارزش درستی متمایز وجود دارد.

مجموعه‌ی ارزش‌های درستی:

$$T_n = \left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

ارزش‌های درستی با عنوان **درجه‌ی درستی** تعبیر می‌شوند.

منطق چندارزشی

عملیات ابتدایی در منطق n ارزشی لوکاسویچ

MULTI-VALUED LOGIC

منطق چندارزشی *Multivalued Logic*	منطقی که در آن n ارزش درستی متمایز وجود دارد.

مجموعه‌ی ارزش‌های درستی:

$$T_n = \left\{0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\}$$

عملیات ابتدایی در منطق n ارزشی لوکاسویچ L_n با ارزش‌های درستی T_n:

$$\neg p = 1 - p$$

$$p \wedge q = \min[p, q]$$

$$p \vee q = \max[p, q]$$

$$p \Rightarrow q = \min[1, 1 + q - p]$$

$$p \Leftrightarrow q = 1 - |p - q|$$

منطق چندارزشی

منطق‌های لوکاسویچ

MULTI-VALUED LOGIC

منطق n ارزشی لوکاسویچ L_n با ارزش‌های درستی T_n:

L_2	منطق دوارزشی کلاسیک = منطق گزاره‌ای (همریخت با نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی)
L_∞	منطق بی‌نهایت‌ارزشی (ارزش‌ها هر عدد **گویا** در بازه‌ی $[0,1]$)
L_1	منطق بی‌نهایت‌ارزشی (ارزش‌ها هر عدد **حقیقی** در بازه‌ی $[0,1]$) = منطق استاندارد لوکاسویچ (همریخت با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی با عملیات استاندارد)

نکته: برای منطق‌های بی‌نهایت ارزشی، هیچ مجموعه‌ی کاملی از عملیات منطقی ابتدایی وجود ندارد:
با استفاده از یک مجموعه‌ی متناهی از عملیات منطقی ابتدایی،
تنها زیرمجموعه‌ای از همه‌ی توابع منطقی ممکن می‌تواند تعریف شود.

گزاره‌های فازی

FUZZY PROPOSITION

تفاوت بنیادی بین گزاره‌های کلاسیک و گزاره‌های فازی، در بازه‌ی مقادیر درستی آنهاست:

- هر گزاره‌ی کلاسیک باید درست یا نادرست باشد: $\{0,1\}$
- درستی یا نادرستی یک گزاره‌ی فازی با یک درجه بیان می‌شود: $[0,1]$

طبقه‌بندی انواع گزاره‌های فازی	
غیرشرطی و غیرکیفی‌شده	**Unconditional** and **unqualified** propositions “The temperature is high.”
غیرشرطی و کیفی شده	**Unconditional** and **qualified** propositions “The temperature is high is very true."
شرطی و غیرکیفی‌شده	**Conditional** and **unqualified** propositions “If the temperature is high, then it is hot.”
شرطی و کیفی‌شده	**Conditional** and **qualified** propositions “If the temperature is high, then it is hot is true.”

هج‌های زبانی

LINGUISTIC HEDGES

یک **هج زبانی**، عبارتی است که توسط آن دیگر عبارت‌های زبانی تغییر می‌یابند.

Examples of hedges: **very, fairly, extremely**.

“Tina is young is true.”
“Tina is **very** young is true.”
“Tina is young is **very** true.”
“Tina is **very** young is **very** true.”

محمول‌های فازی و ارزش‌های درستی فازی می‌توانند تغییر پیدا کنند.
محمول‌های کریسپ نمی‌توانند تغییر پیدا کنند.

Prepared by Kazim Fouladi | Spring 2017 | 2nd Edition
کاظم فولادی

هج‌های زبانی

LINGUISTIC HEDGES

اگر یک محمول فازی F روی X داشته باشیم
و هج زبانی H داده شده باشد،
محمول فازی جدید (تغییریافته) HF به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$HF(X) = h(F(x)) \qquad x \in X$$

تغییردهنده‌ی h یک عمل تکی است که:

$$h : [0,1] \to [0,1]$$

$$h(0) = 0 \quad h(1) = 1$$

$$h \text{ is a continuous function}$$

$$\forall a \in [0,1] \;\; h(a) < a \Leftrightarrow h^{-1}(a) > a$$

و ترکیب تغییردهنده‌ها نیز باید یک تغییردهنده باشد.

هج‌های زبانی

تغییردهنده‌ها

MODIFIERS

یک کلاس متداول از تغییردهنده‌ها:

$$h_\alpha(a) = a^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+, a \in [0,1]$$

تغییردهنده‌ی ضعیف *Weak Modifier*	ارزش درستی گزاره را افزایش می‌دهد. $h(a) > a$ $\alpha < 1$ H : fairly $\leftrightarrow$ $h(a) = \sqrt{a}$
تغییردهنده‌ی همانی *Identity Modifier*	ارزش درستی گزاره را ثابت نگه می‌دارد. $\alpha = 1$
تغییردهنده‌ی قوی *Strong Modifier*	ارزش درستی گزاره را کاهش می‌دهد. $h(a) < a$ $\alpha > 1$ H : very $\leftrightarrow$ $h(a) = a^2$

MODIFIERS

Example: Tina is 26.
p_1: Tina is young. $YOUNG(26) = 0.8$
p_2: Tina is very young. $VERY\_YOUNG(26) = 0.8^2 = 0.64$
p_3: Tina is fairly young. $FAIRLY\_YOUNG(26) = \sqrt{0.8} = 0.89$

گزاره‌های فازی

گزاره‌های غیرشرطی و غیرکیفی‌شده

FUZZY PROPOSITION

$$p : \quad v \quad \text{is} \quad F$$

متغیری از مجموعه مرجع V

محمول فازی: یک مجموعه‌ی فازی روی مجموعه مرجع V

درجه‌ی درستی گزاره‌ی p عبارت است از:

$$T(p) = F(v) \quad , v \in V$$

گزاره‌های فازی

گزاره‌های غیرشرطی و کیفی‌شده

FUZZY PROPOSITION

کیفیت‌بخش به ارزش درستی

$$p: \quad v \quad \text{is} \quad F \quad \text{is} \quad S$$

متغیری از مجموعه مرجع V

محمول فازی: یک مجموعه‌ی فازی روی مجموعه مرجع V

درجه‌ی درستی گزاره‌ی p عبارت است از:

$$T(p) = S(F(v)) \quad , v \in V$$

گزاره‌های فازی

گزاره‌های غیرشرطی و کیفی‌شده: مثال

FUZZY PROPOSITION

$$p: \quad Tina \quad \text{is} \quad Young \quad \text{is} \quad very\ true$$

$$Tina \text{ is } 26$$

درجه‌ی درستی گزاره‌ی p عبارت است از:

$$T(p) = VeryTrue(\underbrace{Young(26)}_{=0.87}) = 0.76$$

گزاره‌های فازی

گزاره‌های شرطی و غیرکیفی‌شده

FUZZY PROPOSITION

زیرمجموعه‌ای فازی از X

زیرمجموعه‌ای فازی از Y

$$p: \quad \mathcal{X} \text{ is } A, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B$$

متغیری از مجموعه مرجع X

متغیری از مجموعه مرجع Y

نمایش معادل

$$p: \quad (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \text{ is } R$$

$$R(x, y) = \mathcal{J}(A(x), B(y))$$

$R \in \mathcal{F}(X \times Y)$

یک رابطه‌ی ایجاب فازی مناسب

گزاره‌های فازی

گزاره‌های شرطی و کیفی‌شده

FUZZY PROPOSITION

زیرمجموعه‌ای فازی از X

زیرمجموعه‌ای فازی از Y

$$p: \quad \mathcal{X} \text{ is } A, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B \text{ is } S$$

متغیری از مجموعه مرجع X

متغیری از مجموعه مرجع Y

کیفیت‌بخش به ارزش درستی

ایجاب فازی

گزینه‌های متعددی برای انتخاب عمل ایجاب فازی وجود دارد، از جمله:

$$\mathcal{J}(a,b) = \begin{cases} 1 & ,a \leq b \\ b & ,a > b \end{cases}$$

$$\mathcal{J}(a,b) = \min[1, 1 - a + b]$$

عملگر ایجاب لوکاسویچ

استدلال تقریبی

Approximate Reasoning

قواعد استنتاج فازی، پایه‌های **استدلال تقریبی** هستند.

قواعد استنتاج کلاسیک

(وضع مقدم، رفع تالی، قیاس افتراضی)

با استفاده از قاعده‌ی ترکیبی استنتاج به حوزه‌ی فازی تعمیم داده می‌شوند.

Compositional Rule of Inference

برای رابطه‌ی فازی R روی $X \times Y$ و

مجموعه‌ی فازی A' روی X،

مجموعه‌ی فازی B' روی Y به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min[A'(x), R(x,y)] \quad , y \in Y$$

به بیان ماتریسی:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A}' \circ \mathbf{R}$$

استدلال تقریبی

Approximate Reasoning

برای گزاره‌ی فازی داده شده به صورت:

$$p: \quad \mathcal{X} \text{ is } A, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B$$

داریم:

$$p: \quad (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \text{ is } R$$

$$R(x, y) = \mathcal{I}(A(x), B(y))$$

GENERALIZED MODUS PONENS

Rule:	If $\mathcal{X}$ is A, then $\mathcal{Y}$ is B
Fact:	$\mathcal{X}$ is A'
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'

In this case,

$$R(x, y) = \mathcal{J}[A(x), B(y)]$$

and

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min[A'(x), R(x, y)].$$

استدلال تقریبی

قواعد استنتاج: وضع مقدم تعمیم‌یافته: مثال

Generalized Modus Ponens

Let $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ and $Y = \{y_1, y_2\}$ be the sets of values of variables $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.
Let $A = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3$ and $B = 1/y_1 + 0.4/y_2$.
Let $A' = 0.6/x_1 + 0.9/x_2 + 0.7/x_3$.
Let $R(x, y) = \mathcal{I}[A(x), B(y)] = \min[1, 1 — A(x) + B(y)]$.
By using Generalized modus ponens, derive the conclusion $\mathcal{Y}$ is B'.

We compute:

$$
\begin{aligned}
R &= 1/x_1, y_1 + 0.9/x_1, y_2 + 1/x_2, y_1 + 0.4/x_2, y_2 + 1/x_3, y_1 + 0.8/x_3, y_2 \\
B'(y_1) &= \sup_{x \in X} \min[A'(x), R(x, y_1)] \\
&= \max[\min(0.6, 1), \min(0.9, 1), \min(0.7, 1)] \\
&= \max[0.6, 0.9, 0.7] = 0.9 \\
B'(y_2) &= \sup_{x \in X} \min[A'(x), R(x, y_2)] \\
&= \max[\min(0.6, 0.9), \min(0.9, 0.4), \min(0.7, 0.8)] \\
&= \max[0.6, 0.4, 0.7] = 0.7
\end{aligned}
$$

We conclude that $B' = 0.9/y_1 + 0.7/y_2$.

استدلال تقریبی

قواعد استنتاج: رفع تالی تعمیم‌یافته

GENERALIZED MODUS TOLLENS

Rule:	If $\mathcal{X}$ is A, then $\mathcal{Y}$ is B
Fact:	$\mathcal{Y}$ is B'
Conclusion:	$\mathcal{X}$ is A'

In this case,

$$R(x, y) = \mathcal{J}[A(x), B(y)]$$

and

$$A'(x) = \sup_{y \in Y} \min[B'(y), R(x, y)].$$

استدلال تقریبی

قواعد استنتاج : رفع تالی تعمیم‌یافته : مثال

GENERALIZED MODUS TOLLENS

Let $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ and $Y = \{y_1, y_2\}$ be the sets of values of variables $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.
Let $A = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3$ and $B = 1/y_1 + 0.4/y_2$.
Let $B' = 0.9/y_1 + 0.7/y_2$.
Let $R(x, y) = \mathcal{J}[A(x), B(y)] = \min[1, 1 - A(x) + B(y)]$.
By using Generalized modus tollens, derive the conclusion $\mathcal{X}\, is A'$.

We compute:

$$
\begin{aligned}
R &= 1/x_1, y_1 + 0.9/x_1, y_2 + 1/x_2, y_1 + 0.4/x_2, y_2 + 1/x_3, y_1 + 0.8/x_3, y_2. \\
A'(x_1) &= \sup_{y \in Y} \min[B'(y), R(x_1, y)] \\
&= \max[\min(0.9, 1), \min(0.7, 0.9)] = \max[0.9, 0.7] = 0.9 \\
A'(x_2) &= \sup_{y \in Y} \min[B'(y), R(x_2, y)] \\
&= \max[\min(0.9, 1), \min(0.7, 0.4)] = \max[0.9, 0.4] = 0.9 \\
A'(x_3) &= \sup_{y \in Y} \min[B'(y), R(x_3, y)] \\
&= \max[\min(0.9, 1), \min(0.7, 0.8)] = \max[0.9, 0.7] = 0.9
\end{aligned}
$$

We conclude that $A' = 0.9/x_1 + 0.9/x_2 + 0.9/x_3$.

Generalized Hypothetical Syllogism

For variables $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ taking values from sets X, Y, Z respectively, and A, B, C being fuzzy sets on X, Y, Z, respectively:

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A, then $\mathcal{Y}$ is B
Rule 2:	If $\mathcal{Y}$ is B, then $\mathcal{Z}$ is C
Conclusion:	If $\mathcal{X}$ is A, then $\mathcal{Z}$ is C

In this case, three relations are defined:

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \mathcal{J}[A(x), B(y)] \\ R_2(y, z) &= \mathcal{J}[B(y), C(z)] \\ R_3(x, z) &= \mathcal{J}[A(x), C(z)]. \end{aligned}$$

The generalized hypothetical syllogism holds if

$$R_3(x, z) = \sup_{y \in Y} \min[R_1(x, y), R_2(x, y)]$$

or, in matrix notation, if

$$\mathbf{R_3} = \mathbf{R_1} \circ \mathbf{R_2}.$$

GENERALIZED HYPOTHETICAL SYLLOGISM

Let $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, and $Z = \{z_1, z_2\}$ be the sets of values of variables $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}$.

Let $A = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3$,
$B = 1/y_1 + 0.4/y_2$
$C = 0.2/z_1 + 1/z_2$.

Let

$$R(x, y) = \mathcal{J}[A(x), B(y)] = \begin{cases} 1 & a \le b \\ b & a > b \end{cases} .$$

Check if generalized hypothetical syllogism holds.

We write

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.2 & 1 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

and we check that $\mathbf{R_1} \circ \mathbf{R_2} = \mathbf{R_3}$.

استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی

Multiconditional Approximate Reasoning

$$
\begin{array}{ll}
\text{Rule 1:} & \text{If } \mathcal{X} \text{ is } A_1, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B_1 \\
\text{Rule 2:} & \text{If } \mathcal{X} \text{ is } A_2, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B_2 \\
 & \ldots \\
\text{Rule n:} & \text{If } \mathcal{X} \text{ is } A_n, \text{ then } \mathcal{Y} \text{ is } B_n \\
\text{Fact:} & \mathcal{X} \text{ is } A' \\
\hline
\text{Conclusion:} & \mathcal{Y} \text{ is } B'
\end{array}
$$

A', A_j are fuzzy sets on X,

B', B_j are fuzzy sets on Y, for all j.

استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی

Multiconditional Approximate Reasoning by Interpolation Method

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
	...
Rule n:	If $\mathcal{X}$ is A_n, then $\mathcal{Y}$ is B_n
Fact:	$\mathcal{X}$ is A'
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'

A', A_j are fuzzy sets on X,
B', B_j are fuzzy sets on Y, for all j.

۱ محاسبه‌ی درجه‌ی سازگاری
میان واقعیت (Fact) داده شده و مقدم هر یک از قاعده‌ها:

$$r_j(A') = h(A' \wedge A_j) = \sup_{x \in X} \min[A'(x), A_j(x)]$$

۲ برش هر یک از B_jها تا سطح $r_j(A')$

$$B_j'(y) = \min[r_j(A'), B_j(y)] \quad , y \in Y$$

۳ محاسبه‌ی اجتماع ${B_j}'$ها

$$B'(y) = \sup_{j=1,2,\cdots,n} {B_j}'(y) \quad , y \in Y$$

استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی

Multiconditional Approximate Reasoning by Interpolation Method

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
	$\ldots$
Rule n:	If $\mathcal{X}$ is A_n, then $\mathcal{Y}$ is B_n
Fact:	$\mathcal{X}$ is A'
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'

A', A_j are fuzzy sets on X,
B', B_j are fuzzy sets on Y, for all j.

روش درون‌یابی حالت خاص
قاعده‌ی ترکیبی استنتاج
است که در آن

$$R(x,y) = \sup_{j=1,2,\cdots,n} \min[A_j(x), B_j(y)] \quad , y \in Y$$

در نتیجه:

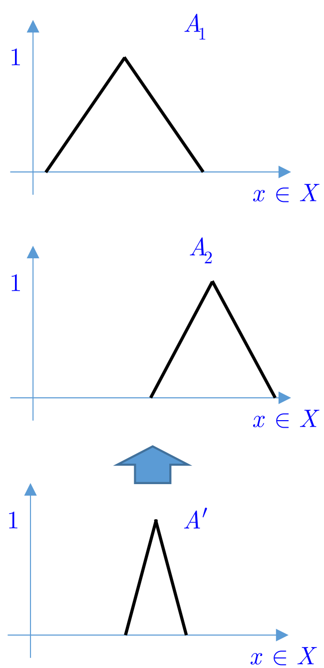
$$\begin{aligned} B'(y) &= \sup_{x \in X} \min[A'(x), R(x,y)] \quad , y \in Y \\ &= (A' \circ R)(y) \end{aligned}$$

استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی : مثال

MULTICONDITIONAL APPROXIMATE REASONING BY INTERPOLATION METHOD

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'

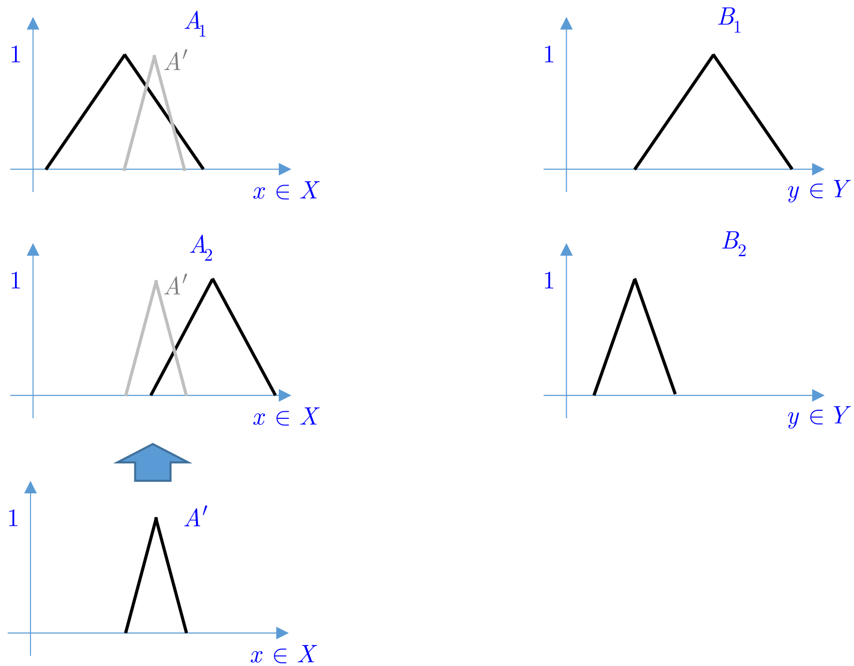


استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی : مثال

Multiconditional Approximate Reasoning by Interpolation Method

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'

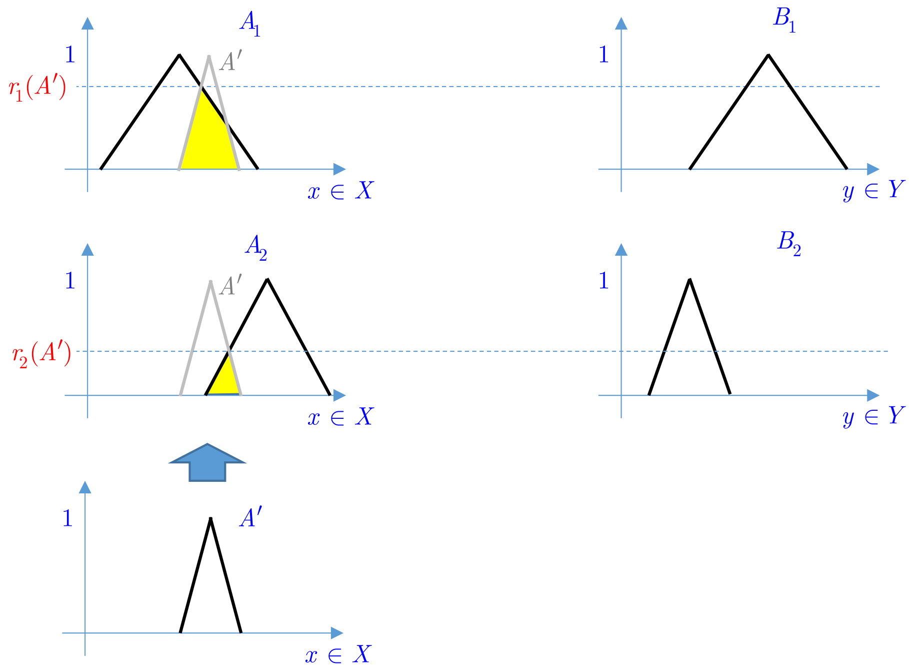


استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی : مثال

Multiconditional Approximate Reasoning by Interpolation Method

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'



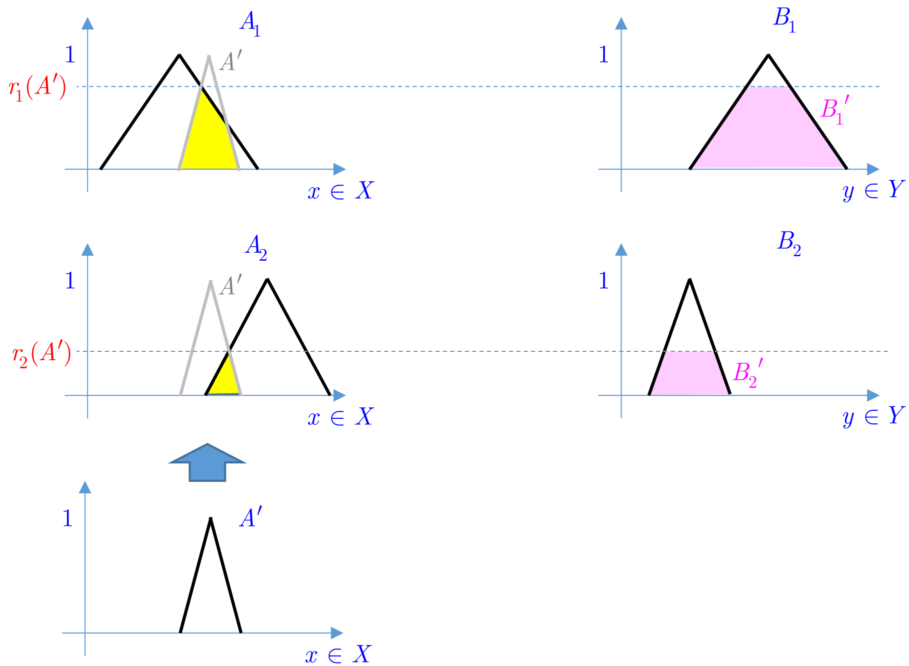
استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی : مثال

MULTICONDITIONAL APPROXIMATE REASONING BY INTERPOLATION METHOD

Rule 1: If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2: If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2

Conclusion: $\mathcal{Y}$ is B'

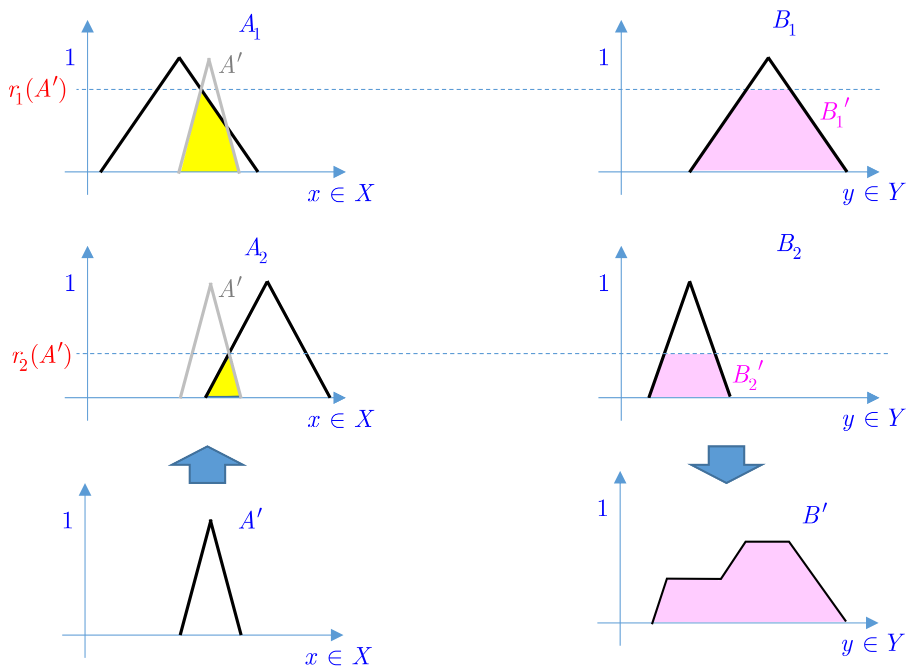


استدلال تقریبی

استدلال تقریبی چندشرطی با روش درون‌یابی : مثال

MULTICONDITIONAL APPROXIMATE REASONING BY INTERPOLATION METHOD

Rule 1:	If $\mathcal{X}$ is A_1, then $\mathcal{Y}$ is B_1
Rule 2:	If $\mathcal{X}$ is A_2, then $\mathcal{Y}$ is B_2
Conclusion:	$\mathcal{Y}$ is B'



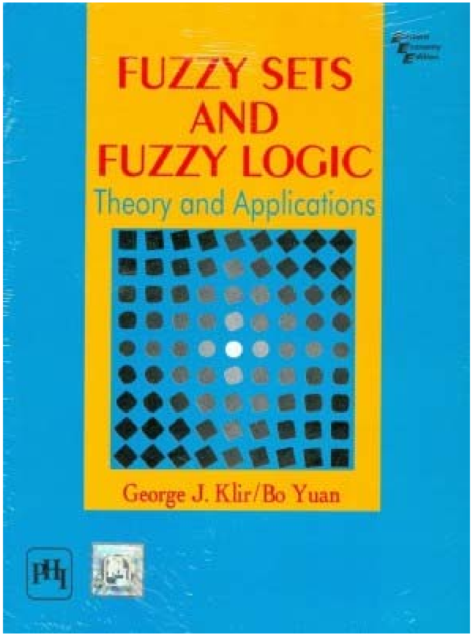
هوش مصنوعی

مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی

۶

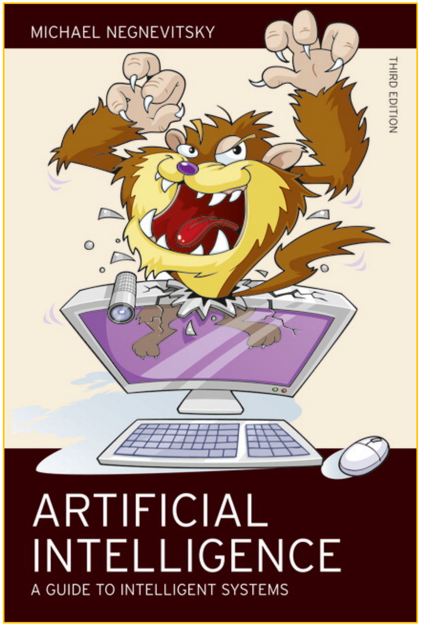
منابع، مطالعه، تکلیف

منبع اصلی



George J. Klir, Bo Yuan,
Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications,
Prentice Hall, 1995.
Chapter 1,2,4,5,8,11

منبع دوم



Michael Negnevitsky,
Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems,
Pearson Education Canada, 2011.
Chapter 4

Fuzzy expert systems 4

In which we present fuzzy set theory, consider how to build fuzzy expert systems and illustrate the theory through an example.

4.1 Introduction, or what is fuzzy thinking?

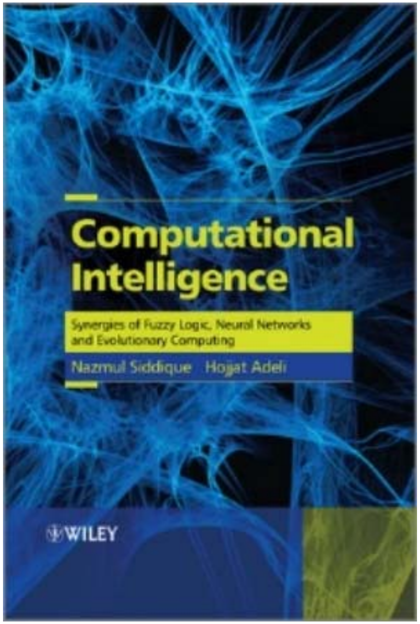
Experts usually rely on **common sense** when they solve problems. They also use vague and ambiguous terms. For example, an expert might say, 'Though the power transformer is **slightly** overloaded, I can keep this load for **a while**'. Other experts have no difficulties with understanding and interpreting this statement because they have the background to hearing problems described like this. However, a knowledge engineer would have difficulties providing a computer with the same level of understanding. How can we represent expert knowledge that uses vague and ambiguous terms in a computer? Can it be done at all?

This chapter attempts to answer these questions by exploring the **fuzzy set theory** (or **fuzzy logic**). We review the philosophical ideas behind fuzzy logic, study its apparatus and then consider how fuzzy logic is used in fuzzy expert systems.

Let us begin with a trivial, but still basic and essential, statement: fuzzy logic is not logic that is fuzzy, but logic that is used to describe fuzziness. Fuzzy logic is the theory of fuzzy sets, sets that calibrate vagueness. Fuzzy logic is based on the idea that all things admit of degrees. Temperature, height, speed, distance, beauty – all come on a sliding scale. The motor is running **really hot**. Tom is a **very tall** guy. Electric cars are **not very fast**. **High**-performance drives require **very rapid** dynamics and **precise** regulation. Hobart is **quite a short** distance from Melbourne. Sydney is a **beautiful** city. Such a sliding scale often makes it impossible to distinguish members of a class from non-members. When does a hill become a mountain?

Boolean or conventional logic uses sharp distinctions. It forces us to draw lines between members of a class and non-members. It makes us draw lines in the sand. For instance, we may say, 'The maximum range of an electric vehicle is short', regarding a range of 300 km or less as short, and a range greater than 300 km as long. By this standard, any electric vehicle that can cover a distance of 301 km (or 300 km and 500 m or even 300 km and 1 m) would be described as

منبع سوم



Nazmul Siddique, Hojjat Adeli,
Computational Intelligence: Synergies of Fuzzy Logic, Neural Networks and Evolutionary Computing,
John Wiley & Sons, 2013.
Chapter 2, 3

2

Introduction to Fuzzy Logic

2.1 Introduction

In classical (Newtonian) mechanics, uncertainty was considered as undesirable and to be avoided by any means. In the late nineteenth century, researchers started to realize that no physical system exists without a certain amount of uncertainty. This is a phenomenon without which the description of a system or model is incomplete. A trend started then in science and engineering to incorporate uncertainty in system models. At this stage uncertainty was quantified with the help of probability theory, developed in the eighteenth century by Thomas Bayes (Price, 1763). The expression of uncertainty using probability theory was first challenged by Max Black (Black, 1937). He proposed a degree as a measure of vagueness. Vagueness can be used to describe a certain kind of uncertainty. For example, John is young. The proposition defined here is vague. He pointed out two main ideas: one is the nature and observability of vagueness and the other is the relevance of vagueness for logic. Black proposed vague sets defined by a membership curve. This was the first attempt to give a precise mathematical theory for sets where there is a membership curve.

There was another movement present in the philosophy, among logicians. The most basic assumptions of classical (or two-valued) propositional as well as first-order logic are the principles of bivalence and compositionality. The principle of bivalence is the assumption that each sentence is either true or false under any one of the interpretations, i.e., has exactly one of the truth values usually denoted numerically by 1 and 0. The problem of future contingencies was a source of many unresolved debates during the middle ages, continuing until the revival of the field of logic in the second half of the nineteenth century. In the second half of the nineteenth century, dissatisfaction with the principle of bivalence appeared (Gottwald, 2001). Charles Sanders Peirce laughed at the 'sheep and goat separators' who split the world into true and false. Around 1867, Peirce set up a triadic trichotomic semiotic as a new type of logic of universal nature. It necessarily derives from a general philosophical system, the doctrine of the continuum. All that exists is continuous and such a continuum governs knowledge and implies generality (Eisele, 1979).

Following the doctrine of the continuum, new interest in multi-valued logic began in the early twentieth century. The real starting phase of many-valued logic began in the 1920s and continued until 1930. The main driving force behind the development was the Polish

Computational Intelligence: Synergies of Fuzzy Logic, Neural Networks and Evolutionary Computing, First Edition.
Nazmul Siddique and Hojjat Adeli.