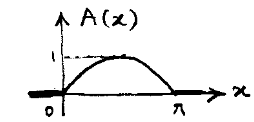
ص ۱

هوش مصنوعی پیشرفته

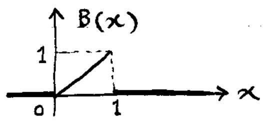
تکلیف شماره‌ی ۸ — مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی (۲):

اعداد فازی، جبر فازی، منطق فازی و استدلال تقریبی

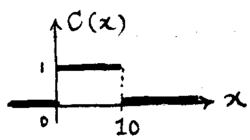
۱)



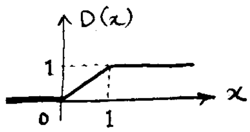
الف) بله : A نرمال، $[A]^\alpha$ بازه‌ی بسته، supp(A) کران‌دار



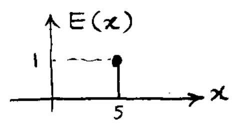
ب) بله : B نرمال، $[B]^\alpha$ بازه‌ی بسته، supp(B) کران‌دار



ج) بله : C نرمال، $[C]^\alpha$ بازه‌ی بسته، supp(C) کران‌دار



د) خیر : D نرمال، $[D]^\alpha$ بازه‌ی باز، supp(D) بی‌کران ← عدد بزرگ



ه) بله : E نرمال، $[E]^\alpha$ بازه‌ی بسته، supp(E) کران‌دار

۲)

الف) $[-1,2]+[1,3] = [-1+1,\ 2+3] = [0,5]$

ب) $[-2,4]-[3,6] = [-2-6,\ 4-3] = [-8,1]$

ج) $[-3,4]\cdot[-3,4] = [\min(-3\times(-3),\ -3\times4,\ 4\times(-3),\ 4\times4),\ \max(-3\times(-3),\ -3\times4,\ 4\times(-3),\ 4\times4)]$

$= [\min(9,-12,-12,16),\ \max(9,-12,-12,16)]$

$= [-12,16]$

د) $[-4,6]/[1,2] = \left[\min\left(\frac{-4}{1},\frac{-4}{2},\frac{6}{1},\frac{6}{2}\right),\ \max\left(\frac{-4}{1},\frac{-4}{2},\frac{6}{1},\frac{6}{2}\right)\right]$

$= [-4,6]$

۳) $A=[a_1,a_2]$, $0<a_1\le a_2$ یا $a_1\le a_2<0$

الف) $A-A=[a_1,a_2]-[a_1,a_2]$

$$=[a_1,a_2]+[-a_2,-a_1]$$

$$=[a_1-a_2\ ,\ a_2-a_1]$$

$$0<a_1\le a_2 \underset{\substack{a_2>0\\ a_1>0}}{\Longrightarrow} -a_2<a_1-a_2\le 0\ ,\ -a_1<0\le a_2-a_1$$

کران پایین منفی و کران بالا مثبت است، پس $0\in A-A$

$$a_1\le a_2<0 \underset{\substack{a_1<0\\ a_2<0}}{\Longrightarrow} 0\le a_2-a_1<-a_1\ ,\ a_1-a_2\le 0<-a_2$$

مجدداً کران پایین منفی و کران بالا مثبت است، پس $0\in A-A$

ب) $A/A=[a_1,a_2]/[a_1,a_2]$

$$=\left[\min\left(\frac{a_1}{a_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_1},\frac{a_2}{a_2}\right),\ \max\left(\frac{a_1}{a_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_1},\frac{a_2}{a_2}\right)\right]$$

$$=\left[\min\left(1,\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_1}\right),\ \max\left(1,\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_1}\right)\right]$$

$$=[l,u]$$

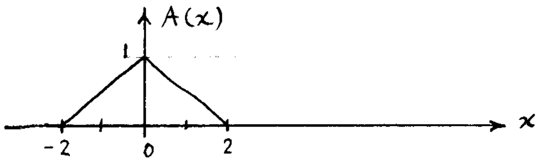
$$0<a_1\le a_2 \underset{\substack{a_1>0\\ a_2>0}}{\Longrightarrow} 0<1\le\frac{a_2}{a_1}\ ,\ 0<\frac{a_1}{a_2}\le 1 \Rightarrow$$

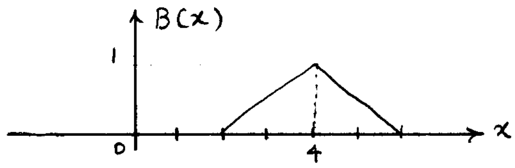
$$l=\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{\le 1}\ ,\ u=\underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{\ge 1} \Rightarrow 1\in A/A$$

$$a_1\le a_2<0 \underset{\substack{a_1<0\\ a_2<0}}{\Longrightarrow} 1\ge\frac{a_2}{a_1}>0\ ,\ \frac{a_1}{a_2}\ge 1>0 \Rightarrow$$

$$l=\underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{\le 1}\ ,\ u=\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{\ge 1} \Rightarrow 1\in A/A$$

ص ۳





۴)

$$\frac{x+2}{2} = \alpha \Rightarrow x = 2\alpha - 2$$

$$\frac{2-x}{2} = \alpha \Rightarrow x = 2 - 2\alpha$$

$$[A]^{\alpha} = [2\alpha - 2 \,,\, 2 - 2\alpha]$$

$$\frac{x-2}{2} = \alpha \Rightarrow x = 2\alpha + 2$$

$$\frac{6-x}{2} = \alpha \Rightarrow x = 6 - 2\alpha$$

$$[B]^{\alpha} = [2\alpha + 2 \,,\, 6 - 2\alpha]$$

الف) $A + B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A+B]^{\alpha}$

$$[A+B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} + [B]^{\alpha} = [2\alpha - 2 \,,\, 2 - 2\alpha] + [2\alpha + 2 \,,\, 6 - 2\alpha]$$

$$= [4\alpha \,,\, 8 - 4\alpha]$$

$$x_{min} = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} x_{min} \xrightarrow{0<\alpha\leq 1} 0 < x_{min} \leq 4$$

$$x_{max} = 8 - 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{8 - x_{max}}{4} = 2 - \frac{1}{4} x_{max} \xrightarrow{0<\alpha\leq 1} 4 < x_{max} \leq 8$$

$$A + B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A+B]^{\alpha} = \begin{cases} \frac{x}{4} & , \ 0 < x \leq 4 \\ \frac{8-x}{4} & , \ 4 < x \leq 8 \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

اجتماع بی‌نهایت بازه برای $0 < \alpha \leq 1$
که ارتفاع هر بازه برابر با α است.

ب) $A - B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A-B]^{\alpha}$

$$[A-B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} - [B]^{\alpha} = [2\alpha - 2 \,,\, 2 - 2\alpha] + [2\alpha - 6 \,,\, -2\alpha - 2]$$

$$= [4\alpha - 8 \,,\, -4\alpha]$$

$$x_{min} = 4\alpha - 8 \Rightarrow \alpha = \frac{x_{min} + 8}{4} \xrightarrow{0<\alpha\leq 1} -8 < x_{min} \leq -4$$

$$x_{max} = -4\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} x_{max} \xrightarrow{0<\alpha\leq 1} -4 < x_{max} \leq 0$$

$$A - B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A-B]^{\alpha} = \begin{cases} \frac{x+8}{4} & , \ -8 < x \leq -4 \\ -\frac{x}{4} & , \ -4 < x \leq 0 \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

ج) $B - A = \bigcup_{\alpha} \alpha . [B - A]^{\alpha}$

$$[B-A]^{\alpha} = [B]^{\alpha} - [A]^{\alpha}$$

$$= [2\alpha + 2 , 6 - 2\alpha] - [2\alpha - 2 , 2 - 2\alpha]$$

$$= [2\alpha + 2 , 6 - 2\alpha] + [2\alpha - 2 , 2 - 2\alpha]$$

$$= [4\alpha , 8 - 4\alpha]$$

$$= [A + B]^{\alpha}$$ در این مثال :

$B - A = A + B$ پس :

د) $A . B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A . B]^{\alpha}$

$$[A . B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} . [B]^{\alpha}$$

$$= [2\alpha - 2 , 2 - 2\alpha] . [2\alpha + 2 , 6 - 2\alpha]$$

$$= [\min(4\alpha^2 - 4 , (2\alpha - 2)(6 - 2\alpha) , 4 - 4\alpha^2 , (2 - 2\alpha)(6 - 2\alpha)) ,$$

test_alpha.m
با رسم نمودار

$$\max(4\alpha^2 - 4 , (2\alpha - 2)(6 - 2\alpha) , 4 - 4\alpha^2 , (2 - 2\alpha)(6 - 2\alpha))]$$

$$= [-(2 - 2\alpha)(6 - 2\alpha) , (2 - 2\alpha)(6 - 2\alpha)]$$

$$= [-(4\alpha^2 - 16\alpha + 12) , (4\alpha^2 - 16\alpha + 12)]$$

به ازای α های مختلف از 0 تا 1 ، مقداردهی می‌کنیم و حاصل را با ارتفاع α به عنوان یک بازه رسم می‌کنیم .

$$x = 4\alpha^2 - 16\alpha + 12 \Rightarrow 4\alpha^2 - 16\alpha + (12 - x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(12 - x)}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{16 - 12 + x}}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + x} \xrightarrow{0 < \alpha \leq 1} \alpha = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 + x} \quad 0 < x \leq 12$$

$$x = -(4\alpha^2 - 16\alpha + 12) \Rightarrow 4\alpha^2 - 16\alpha + (12 + x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(12 + x)}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{16 - 12 - x}}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - x} \xrightarrow{0 < \alpha \leq 1} \alpha = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - x} \quad -12 < x \leq 0$$

$$A . B = \bigcup_{\alpha} \alpha . [A . B]^{\alpha} = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - x} & , -12 < x \leq 0 \\ 2 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + x} & , 0 < x \leq 12 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

fuzzy_arith.m

تقسیم A/B مشابه ضرب و به صورت $A . \left(\frac{1}{B}\right)$ محاسبه می‌شود .

$X = \{x_1, x_2, x_3\} \qquad Y = \{y_1, y_2\}$ (۵

$$r_1(A') = h(A' \wedge A_1) = \sup_{x \in X} \min(A'(x), A_1(x))$$
$$= \max\{\min(0.8, 1), \min(0.9, 0.9), \min(0.1, 0.1)\}$$
$$= \max\{0.8, 0.9, 0.1\} = 0.9$$

$$r_2(A') = h(A' \wedge A_2) = \sup_{x \in X} \min(A'(x), A_2(x))$$
$$= \max\{\min(0.8, 0.9), \min(0.9, 1), \min(0.1, 0.2)\}$$
$$= \max\{0.8, 0.9, 0.1\} = 0.9$$

$$B_1'(y_1) = \min[r_1(A'), B_1(y_1)] = \min[0.9, 1] = 0.9$$

$$B_1'(y_2) = \min[r_1(A'), B_1(y_2)] = \min[0.9, 0.2] = 0.2$$

$$B_2'(y_1) = \min[r_2(A'), B_2(y_1)] = \min[0.9, 0.2] = 0.2$$

$$B_2'(y_2) = \min[r_2(A'), B_2(y_2)] = \min[0.9, 0.9] = 0.9$$

$$B'(y) = \sup_{j=1,2} B_j'(y)$$

$$B'(y_1) = \max(B_1'(y_1), B_2'(y_1))$$
$$= \max(0.9, 0.2) = 0.9$$
$$B'(y_2) = \max(B_1'(y_2), B_2'(y_2))$$
$$= \max(0.2, 0.9) = 0.9$$

پس داریم:

$$B' = \frac{0.9}{y_1} + \frac{0.9}{y_2}$$

ص ⑥

$$A(x) = \frac{1}{1+e^{-x+40}} \quad , \quad x > 0$$ (۶

الف) very old: $(A(x))^2 = \left(\frac{1}{1+e^{-x+40}}\right)^2$

ب) very very old: $\left[(A(x))^2\right]^2 = (A(x))^4 = \left(\frac{1}{1+e^{-x+40}}\right)^4$

ج) somewhat old: $\sqrt{A(x)} = \sqrt{\frac{1}{1+e^{-x+40}}}$

د) not very old: $1 - (A(x))^2 = 1 - \left(\frac{1}{1+e^{-x+40}}\right)^2$