

مجموعه ها و ستم های فازی (۱) : مجموعه های فازی و روابط فازی

(۱) تصادفی بودن randomness : عدد احتمال بین صفر و یک با درجه رخداد پیشامدی است که یا

رخ می دهد یا نمی دهد (دو حالت دارد)

فازی بودن fuzziness : میزان درستی یک پدیده با عددی بین صفر و یک بیان می شود.

(این نهایت حالت وجود دارد) : پیشامد تا درصه ای رخ می دهد.

مثلاً :

- احتمال مسوم بودن آب : ۹۰٪ است : یعنی آب مسوم است یا مسوم نیست.

شانس A برابر با ۰.۹ است.

- امکان مسوم بودن آب : ۹۰٪ است : درجهی مسوم بودن آب ۰.۹ است.

(یعنی آب تا حدی مسوم است [بیشتر] تا حدی مسوم نیست!)

$$|A| + |B| = \sum_x A(x) + \sum_x B(x) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |A \cup B| + |A \cap B| &= \sum_x (A \cup B)(x) + \sum_x (A \cap B)(x) \\ &= \sum_x \max(A(x), B(x)) + \sum_x \min(A(x), B(x)) \\ &= \sum_x \frac{1}{2} (A(x) + B(x) + |A(x) - B(x)|) \\ &+ \sum_x \frac{1}{2} (A(x) + B(x) - |A(x) - B(x)|) \\ &= \sum_x (A(x) + B(x)) \\ &= \sum_x A(x) + \sum_x B(x) \\ &= |A| + |B| \end{aligned}$$

$$\text{الف) } |C| = \sum_{i=0}^{20} C(x) = \sum_{i=0}^{20} \frac{x}{x+1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{20}{21} = 17.35 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } |C| &= \int_0^{20} C(x) dx = \int_0^{20} \frac{x}{x+1} dx = [x - \ln(x+1)]_0^{20} = 20 - \ln 21 - 0 \\ &= 16.95 \end{aligned}$$

مر ①

$$A \subseteq B \iff \forall x \ A(x) \leq B(x) \quad (۴)$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+10x} \geq 0 \Rightarrow -1+10x \geq 0 \Rightarrow x \geq -0.1 \\ A(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+10x} \leq 1 \Rightarrow 1+10x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

چون $0 \leq A(x) \leq 1$ است، هر چه توان آن بزرگتر باشد، مقدار حاصل کوچکتر شود.

پس:

$$(A(x))^2 \leq A(x) \leq (A(x))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A^2 \subseteq A \subseteq A^{\frac{1}{2}}$$

الف) $\bar{A}(x) = 1 - \frac{x}{x+2} \quad (۵)$

$$\bar{B}(x) = 1 - 2^{-x}$$

$$\bar{C}(x) = 1 - \frac{1}{1+10(x-2)^2}$$

ب) $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = \frac{1}{2}(A(x) + B(x) + |A(x) - B(x)|)$

$$(B \cup C)(x) = \max(B(x), C(x)) = \frac{1}{2}(B(x) + C(x) + |B(x) - C(x)|)$$

ج) $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = \frac{1}{2}(A(x) + B(x) - |A(x) - B(x)|)$

$$(B \cap C)(x) = \min(B(x), C(x)) = \frac{1}{2}(B(x) + C(x) - |B(x) - C(x)|)$$

د) $(A \cap \bar{C})(x) = \min(A(x), 1 - C(x))$

$$\overline{(A \cup B)}(x) = 1 - \max(A(x), B(x))$$

برای رسم نمودارها فایل ضمیمه assign6-ex5.m را در MATLAB اجرا کنید.

٣

$$\text{supp}(A) = \{x \in X : A(x) > 0\} = (0, 10] \quad X = [0, 10] \quad (٤)$$

$$A(x) > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+2} > 0 \stackrel{x \in X}{\Rightarrow} x > 0, x+2 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$h(A) = \max_{x \in X} A(x) = \max_{x \in X} \frac{x}{x+2} = \max_{x \in X} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) = 1 - \frac{2}{12} < 1 \quad \text{زیرینال}$$

$$\text{crossover}(A) = \{x \in X : A(x) = \frac{1}{2}\} = \{2\}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x = 2$$

$$\text{supp}(B) = [0, 10]$$

$$B(x) > 0 \Rightarrow 2^{-x} > 0 \stackrel{x \in X}{\Rightarrow} x \in [0, 10]$$

$$h(B) = \max_{x \in X} 2^{-x} = 2^0 = 1 \quad \text{در}$$

$$\text{crossover}(B) = \{1\}$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{-1} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{supp}(C) = [0, 10]$$

$$C(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+10(x-2)^2} > 0 \stackrel{x \in X}{\Rightarrow} x \in [0, 10]$$

$$h(C) = \max_{x \in X} C(x) = C(2) = 1 \quad \text{در}$$

$$\text{crossover}(C) = \left\{2 \pm \frac{\sqrt{10}}{10}\right\}$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+10(x-2)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1+10(x-2)^2 = 2 \Rightarrow$$

$$10x^2 - 20x + 39 = 0 \stackrel{x \in X}{\Rightarrow} 2 \pm \frac{\sqrt{10}}{10} = x$$

$$[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\} = \left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}, 10\right] \quad (٥)$$

$$A(x) \geq \alpha \Rightarrow \frac{x}{x+2} \geq \alpha \Rightarrow x \geq \alpha x + 2\alpha \Rightarrow x(1-\alpha) \geq 2\alpha$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

$$A(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{x+2} \leq 1 \Rightarrow x \leq x+2 \stackrel{x \in X}{\Rightarrow} x \in [0, 10] \Rightarrow x \leq 10$$

$$[A]^{\alpha+} = \{x \in X : A(x) > \alpha\} = \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}, 10\right]$$

$$A(x) > \alpha \Rightarrow \frac{x}{x+2} > \alpha \Rightarrow x > \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

$$A(x) \leq 1 \Rightarrow x \leq 10$$

(F) ص

$X = \{$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\}$	(A)
A_1 تقریباً 5	0	0	0.7	0.9	1	0.9	0.7	0	0	0		
A_2 ضعیف بزرگ تراز 5	0	0	0	0	0	0.1	0.5	0.8	1	1		
A_3 کوچک	1	0.8	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0	0		
A_4 دور از 4	1	0.5	0.1	0	0.1	0.5	0.7	0.8	0.9	1		
A_5 بزرگ و در بزرگ تراز 7	0	0.1	0.4	0.6	0.8	0.9	1	0	0	0		
A_6 ضعیف کوچک	1	0.64	0.25	0.09	0.01	0	0	0	0	0		
												$(A_3)^2$

	$[A]^\alpha$	$[A]^{\alpha+}$	(9)
$\alpha = 0.4$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	
$\alpha = 0.5$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_5\}$	
$\alpha = 0.7$	$\{x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_4, x_5\}$	
$\alpha = 0.8$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5\}$	
$\alpha = 1.0$	$\{x_5\}$	$\{ \}$	

$$A(x) = \frac{x}{x+2} \quad X = [1 \dots 10] \quad f(x) = x^2 \quad (10)$$

$$(f(A))(y) = \sup_{x: y=x^2} \frac{x}{x+2} = \sup \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+2} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+2}$$

$$B(x) = 2^{-x}$$

$$(f(B))(y) = \sup_{x: y=x^2} 2^{-x} = \sup 2^{-\sqrt{y}} = 2^{-\sqrt{y}}$$

$$C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)^2}$$

$$(f(C))(y) = \sup_{x: y=x^2} \frac{1}{1+10(x-2)^2} = \inf_{x: y=x^2} (1+10(x-2)^2) = (1+10(\sqrt{y}-2)^2)$$

د)

$$D = \frac{0.5}{4} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.7}{25} + \frac{1}{100} \quad Y = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots, 100\}$$

$$((f^{-1})(D))(x) = D(f(x))$$

$$= D(x^2)$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{y} & , x \leq y \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

$$X = [1 \dots 100]$$

$$Y = [50 \dots 100]$$

$$\text{الف) } \text{dom } R(x, y) = \max_{y \in Y} R(x, y) = 1 - \frac{x}{100}$$

$$\text{ran } R(x, y) = \max_{x \in X} R(x, y) = 1 - \frac{1}{y}$$

$$h(R) = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} R(x, y) = 1 - \frac{1}{100} = 0.99 < 1 \quad \text{نیز مثال}$$

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{y} & , x \leq y \\ 0 & , x > y \end{cases}$$

$$R(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2} \quad \text{نیز مثال (12)}$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

نوشر max-min

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (R \circ S)(X, Z)$$

0 1 2

ص 6

	R	S
بازتابی	X	✓ $\forall x S(x, x) = 1$
تقارنی	X	X
ترانزیتی	$R \supseteq R \circ R$?	$S \supseteq S \circ S$?
پادبازتابی	X	X
پادتقارنی	X	X