



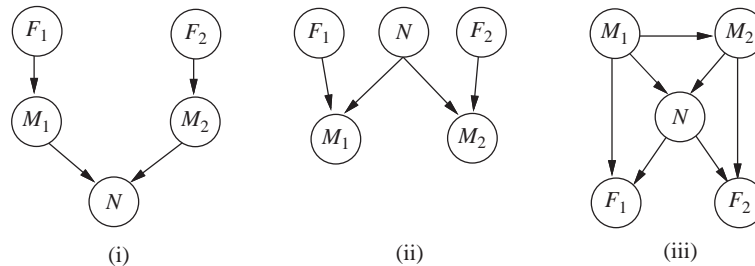
## تکلیف شماره ۲

### فصل چهاردهم

## استدلال احتمالاتی

### PROBABILISTIC REASONING

۱) دو ستاره‌شناس در دو نقطه‌ی مختلف دنیا مقادیر  $M_1$  و  $M_2$  را برای تعداد ستاره‌ها ( $N$ ) در بخش کوچکی از آسمان، با استفاده از تلسکوپ‌هایشان اندازه گرفته‌اند. معمولاً یک امکان کوچک خطا  $e$  به دلیل وجود بیش از یک ستاره در هر جهت وجود دارد. هر تلسکوپ می‌تواند (با احتمال خیلی پایین  $f$ ) به دلیل خراب بودن از کانون خراب باشد (پیشامدهای  $F_1$  و  $F_2$ ) که در این صورت ستاره‌شناس تعداد ستاره‌ها را سه یا بیشتر، کمتر از مقدار واقعی محاسبه می‌کند (در صورتی که  $N$  کمتر از ۳ باشد، اساساً ستاره‌ای را کشف نمی‌کند). سه شبکه‌ی بیزی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



(الف) کدام یک از شبکه‌های بیزی، یک بازنمایی درست (نه لزوماً مؤثر) از اطلاعات فوق است؟

(ب) بهترین شبکه‌ی بیزی کدام است؟ توضیح دهید.

(ج) توزیع شرطی  $P(M_1|N)$  را بنویسید به طوری که  $N \in \{1, 2, 3\}$ ,  $M_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

(د) محتمل‌ترین تعداد ستاره‌ها با معلوم بودن این مشاهدات چیست؟ نحوه‌ی محاسبه‌ی آن را توضیح دهید، یا اگر امکان محاسبه‌ی آن نیست، توضیح دهید چه اطلاعات اضافی لازم است و چگونه نتایج را تحت تأثیر می‌گذارد.

۲) شبکه‌ی (ii) شکل فوق را در نظر بگیرید و فرض کنید هر دو تلسکوپ مثل هم کار می‌کنند.  $M_1, M_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $N \in \{1, 2, 3\}$  و همچنین جداول احتمال شرطی (CPT) نمادین تمرین فوق را مورد استفاده قرار دهید. به کمک الگوریتم برشماری (ENUMERATION-ASK) توزیع احتمال  $P(N|M_1=2, M_2=2)$  را محاسبه کنید.

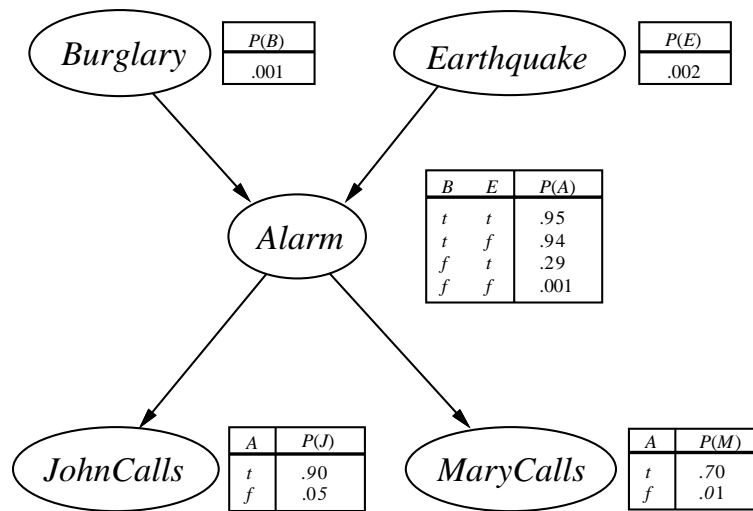
۳) در یک شبکه‌ی بیزی دو متغیره، فرض کنید  $X_1$  والد  $X_2$  باشد که  $X_1$  احتمال پیشین گاوسی دارد و  $P(X_2|X_1)$  یک توزیع گاوسی خطی باشد. نشان دهید که توزیع توأم  $P(X_2, X_1)$  یک توزیع گاوسی چندمتغیره است و ماتریس کوواریانس آن را محاسبه کنید.

۴) این تمرین به اعمال الگوریتم حذف متغیر (ELIMINATION-ASK) مربوط می‌شود.

(الف) با توجه به شبکه‌ی بیزی زیر، حذف متغیر را به پرس‌وجوی

$$P(\text{Burglary} | \text{JohnCalls} = \text{true}, \text{MaryCalls} = \text{true})$$

اعمال کنید و با انجام محاسبات لازم، درستی پاسخ را بررسی کنید.



(ب) تعداد عملیات محاسباتی اعمال شده را محاسبه کرده و با تعداد عملیات الگوریتم برشماری مقایسه کنید.

(ج) فرض کنید یک شبکه شکل یک زنجیره دارد: یک دنباله از متغیرهای بولی  $X_1, \dots, X_n$  که در آن  $Parents(X_i) = \{X_{i-1}\}$  برای  $i = 2, \dots, n$ . پیچیدگی محاسباتی  $P(X_1 | X_n = true)$  را با استفاده از برشماری به دست آورید. همین کار را با استفاده از حذف متغیر نیز انجام دهید.

(د) ثابت کنید که پیچیدگی اجرای حذف متغیر بر روی یک شبکه‌ی چنددرختی، برای هر ترتیب از متغیرها که با ساختار شبکه سازگار باشد، برحسب اندازه‌ی درخت، خطی است.